M1 f. ET **1. Lösungsblatt** Woche vom 15. 10. 2007

Bsp. 1)

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot \cdot 7, \quad 1824 = 2^5 \cdot 3 \cdot 19, \quad 3193 = 31 \cdot 103$$

Bsp. 2)

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \ .$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \ .$$
$$(2x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$
$$(x+2y+3z)^2 = x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$$
$$(x^3 - 2x^2 + x - 5)(x^2 + 7x - 1) = x^5 + 5x^4 - 14x^3 + 4x^2 - 36x + 5$$

Bsp. 3) Es sei $P = (x_0, y_0)$, $Q = (x_1, y_1)$. Ein beliebiger Punkt (x, y) auf der Geraden durch P und Q erfüllt die Gleichung

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

da auf beiden Seiten der Gleichung die Steigung der Geraden steht. Durch Umformen bringt man die Gleichung in die gewünschte Form $ax + by = c$:

$$(y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y = (y_1 - y_0)x_0 - y_0(x_1 - x_0).$$

Einsetzen der angegebenen Punkte ergibt die Geradengleichungen:
a) $P = (1, 2)$, $Q = (4, 1)$, $\quad x + 3y = 7$,
b) $P = (-2, -1)$, $Q = (3, 2)$, $\quad -3x + 5y = 1$,
c) $P = (-3, 2)$, $Q = (7, 2)$, $\quad y = 2$,
d) $P = (4, 5)$, $Q = (4, 4)$, $\quad x = 4$.

Bsp. 4) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) \ .$$

Man berechnet

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1+3 = 4, \quad a_3 = 1+3+5 = 9, \quad a_4 = 1+3+5+7 = 16 \ .$$

Dies ergibt die
Behauptung: $a_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$.
Beweis: mittels vollständiger Induktion
1) Induktionsanfang: $a_1 = 1$, daher stimmt die Behauptung für $n = 1$.
2) Induktionsschluß: Es gelte

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

Dann gilt

$$1+3+\cdots+(2(n+1)-1) = \underbrace{1+3+\cdots+(2n-1)}_{=n^2} + (2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Bsp. 5)
a) Aus

$$a_{n+1} = 2a_n, \qquad a_0 = 1 \ .$$

folgt

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 2^2, \quad a_3 = 2^3, \quad a_4 = 2^4, \quad a_5 = 2^5 \ .$$

Dies ergibt die
Behauptung: $a_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$.
Beweis: mittels vollständiger Induktion
1) Induktionsanfang: $a_0 = 1$, daher stimmt die Behauptung für $n = 0$.
2) Induktionsschluß: Es gelte

$$a_n = 2^n \ .$$

Dann gilt

$$a_{n+1} = 2a_n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \ .$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

b) Aus

$$b_{n+1} = 2b_n - 3, \qquad b_0 = 1$$

folgt

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = -5, \quad b_3 = -13, \quad b_4 = -29, \quad b_5 = -61 \ .$$

Um eine explizite Formel zu finden folgen wir dem Hinweis: Durch

$$b_n := 3 + c_n$$

werden Zahlen c_n, $n \in \mathbb{N}_0$ definiert. Einsetzen in die Rekursion für b_n ergibt eine Rekursion für c_n:

$$3 + c_{n+1} = b_{n+1} = 2b_n - 3 = 2(3 + c_n) - 3$$

$$3 + c_{n+1} = 6 + 2c_n - 3$$

$$c_{n+1} = 2c_n.$$

Aus $c_0 = -2$ folgt analog zu a) (der Induktionsbeweis dafür wird hier ausgelassen)

$$c_n = -2^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Daher gilt

$$b_n = 3 - 2^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Bsp. 6) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $\quad n^3 \leq 2^n$?
Man verifiziert leicht, dass die Ungleichung für $n = 1$ stimmt und für $2 \leq n \leq 9$ falsch ist. Für $n \geq 10$ scheint die Ungleichung zu stimmen.
Behauptung:

$$n^3 \leq 2^n, \quad \forall n \geq 10$$

Beweis: mittels vollständiger Induktion
1) Induktionsanfang: für $n = 10$ gilt $10^3 = 1000 \leq 1024 = 2^{10}$
2) Induktionsschluss: es gelte

$$n^3 \leq 2^n \ .$$

Es ist zu zeigen, dass dann gilt

$$(n+1)^3 \leq 2^{n+1} \ .$$

Dazu berechnen wir

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

und schätzen diesen Ausdruck nach oben ab

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + 3n^2 + n^2 + n^2 = n^3 + 5n^2 \leq n^3 + n^3 = 2n^3 \ .$$

Dabei haben wir die für $n \geq 5$ sicher gültigen Ungleichungen $3n \leq n^2$, $1 \leq n^2$ und $5n^2 \leq n^3$ benutzt. Somit gilt

$$(n+1)^3 \leq 2n^3 \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

wobei im letzten Schritt die als wahr angenommene Ungleichung $n^3 \leq 2^n$ benutzt wurde. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Somit stimmt die Ungleichung $n^3 \leq 2^n$ für $n = 1$ und alle $n \geq 10$.

Bsp. 7) + 8) Beweis durch Aufstellen der Wahrheitstafeln.

Bsp. 9) Die Aussagen von Herrn Bloom und Frau Weiss können nicht beide wahr sein, da sie bezüglich Oberst Gatow widersprüchliche Aussagen machen. Eine(r) der beiden muss daher lügen und somit der Täter sein.
Wenn Herr Bloom der Täter ist, müßte die Aussage von Frl. Ming wahr sein, was einen Widerspruch zur Annahme, dass Herr Bloom der Täter ist, ergibt. Daher ist Herr Bloom nicht der Täter. Daher ist Frau Weiss die Täterin.

Bsp. 10) Das MU Rätsel: Eine formale Sprache wird folgendermaßen definiert. Die Wörter der Sprache sind Zeichenketten, die aus den Buchstaben I, M, U bestehen, z.B. $MIUIU$.
Folgende **Axiome** legen fest welche Wörter es gibt:
1) MI ist ein Wort
2) Falls ein Wort die Form XI hat so ist auch XIU ein Wort, d.h. an ein Wort, das ein I am Ende hat darf ein U angehängt werden (dabei steht X für eine beliebige Zeichenkette).
3) Falls MX ein Wort ist so ist auch MXX ein Wort (dabei steht X für eine beliebige Zeichenkette).
4) Falls $XIII$ ein Wort ist so ist auch XU ein Wort, d.h III am Ende eines Wortes kann durch ein U ersetzt werden.
5) Falls in einem Wort UU vorkommt können diese beiden Zeichen in dem Wort gestrichen werden.
Aufgabe: Untersuchen Sie, ob MU ein Wort dieser Sprache ist.

Lösung: Durch Bilden von Worten entwickelt man etwas Gefühl für die Sprache. Man erkennt vermutlich, dass jedes Wort mit M beginnt. Das Wort MU kann nur aus $MIII$ unter Verwendung von Regel 4) oder aus $MUUU$ unter Verwendung von Regel 5) gebildet werden. Diese zu erzeugen, will aber nicht gelingen...
Daher gelangt man zur

Behauptung: MU ist kein Wort der Sprache.

Beweis: Zum Beweis muss man eine “Theorie” über die Sprache bzw. über die Wörter der Sprache entwickeln.
Eine dafür gut geeignete Hilfsgröße ist die Anzahl der in einem Wort auftretenden I. Sei X ein Wort, dann ist

$$G(X) := \text{Anzahl der in } X \text{ auftretenden } I\ .$$

Es gilt

$$G(MU) = 0, \qquad G(MIII) = 3, \qquad G(MUUU) = 0,$$

das sind jeweils Vielfache von 3. Falls man zeigen kann, dass für alle Wörter X der Sprache $G(X)$ kein Vielfaches von 3 ist, ist die Behauptung bewiesen.

Lemma: Für alle Wörter X der Sprache gilt, $G(X)$ ist kein Vielfaches von 3.
Beweis:
i) Es gilt $G(MI) = 1$.
ii) Die Regeln 2) und 5) ändern die Anzahl von I in einem Wort nicht.
iii) Regel 3): Falls $G(MX)$ kein Vielfaches von 3, ist so ist auch $G(MXX)$ kein Vielfaches von 3.
iv) Regel 4) transformiert Worte X, deren $G(X)$ kein Vielfaches von 3 ist, in Worte $\tilde{X}$, deren $G(\tilde{X})$ kein Vielfaches von 3 ist.
Somit kann ausgehend von MI kein Wort X erzeugt werden, für das $G(X)$ ein Vielfaches von 3 ist.
Das Lemma ist bewiesen.

Damit ist bewiesen, dass MU kein Wort ist.