M1 f. ET **1. Übungsblatt** Woche vom 15. 10. 2007

1. Schreiben Sie jede der Zahlen 105, 1824 und 3193 als Produkt von Primzahlen.

2. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und vereinfachen Sie soweit wie möglich.
$$(x+y)^2 =$$
$$(x-y)^2 =$$
$$(2x+3y)^2 =$$
$$(x+2y+3z)^2 =$$
$$(x+y)^3 =$$
$$(x-y)^3 =$$
$$(x+y)(x-y) =$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2) =$$
$$(x^3-2x^2+x-5)(x^2+7x-1) =$$

3. Ein Punkt in der Ebene wird durch seine Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beschrieben. Die Gesamtheit aller Lösungen einer Gleichung der Form
$$ax + by = c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$
entspricht einer Geraden.

   Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden (in der angegebenen Form!), die durch die Punkte P und Q geht. Skizzieren Sie die Punkte und die Geraden.

   a) $P = (1, 2)$, $Q = (4, 1)$

   b) $P = (-2, -1)$, $Q = (3, 2)$

   c) $P = (-3, 2)$, $Q = (7, 2)$

   d) $P = (4, 5)$, $Q = (4, 4)$

4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei
$$a_n := 1 + 3 + \cdots + (2n-1) \ .$$
   Bestimmen Sie eine Formel für a_n und beweisen Sie diese.

5. a) eine Folge von Zahlen a_n, $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ist rekursiv definiert

$$a_{n+1} = 2a_n, \qquad a_0 = 1 \ .$$

   Berechnen Sie $a_0, a_1, \ldots, a_5$. Geben Sie eine explizite Formel für a_n, $n \in \mathbb{N}$ an und beweisen Sie diese.

   b) eine Folge von Zahlen b_n, $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ist rekursiv definiert

$$b_{n+1} = 2b_n - 3, \qquad b_0 = 1 \ .$$

   Berechnen Sie $b_0, b_1, \ldots, b_5$. Geben Sie eine explizite Formel für b_n, $n \in \mathbb{N}$ an und beweisen Sie diese.

   Hinweis zu b): Setzen Sie $b_n = 3 + c_n$ und zeigen Sie, dass für c_n die Rekursion $c_{n+1} = 2c_n$ gilt.

6. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $\quad n^3 \leq 2^n$? (Beweis verlangt!)

7. Verifizieren Sie mittels einer Wahrheitstafel die folgenden Äquivalenzen

$$A \Rightarrow B \Longleftrightarrow B \vee \neg A,$$

$$\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B),$$

$$A \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \ .$$

8. Beweisen Sie die Regel vom Syllogismus:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

   indem Sie zeigen, dass die obige Aussage für alle möglichen Wahrheitswerte von A, B, C immer wahr ist.

9. Graf Eutin ist ermordet woden. Als Täter kommen Frl. Ming, Herr Bloom, Frau Weiss und Oberst Gatow in Frage. Alle vier werden verhört und machen folgende Aussagen:

   Frl. Ming: Ich bin unschuldig. Herr Bloom ist nicht der Täter, denn ich war zur Tatzeit mit ihm zusammen.

   Herr Bloom: Ich bin unschuldig. Oberst Gatow war zur Tatzeit im Salon.

   Frau Weiss: Ich bin unschuldig. Frl. Ming, Oberst Gatow und ich waren zur Tatzeit nicht im Salon.

Oberst Gatow: Ich bin unschuldig. Der Mord ist im Salon passiert.

Mit der Ausnahme des Mörders/der Mörderin sagen alle beim Verhör die Wahrheit. Wer ist der Mörder/die Mörderin?

10. Das MU Rätsel: Eine formale Sprache wird folgendermaßen definiert. Die Wörter der Sprache sind Zeichenketten, die aus den Buchstaben I, M, U bestehen, z.B. $MIUIU$.

    Folgende **Axiome** legen fest welche Wörter es gibt:

    1) MI ist ein Wort

    2) Falls ein Wort die Form XI hat so ist auch XIU ein Wort, d.h. an ein Wort, das ein I am Ende hat darf ein U abgehängt werden (dabei steht X für eine beliebige Zeichenkette).

    3) Falls MX ein Wort ist so ist auch MXX ein Wort (dabei steht X für eine beliebige Zeichenkette).

    4) Falls $XIII$ ein Wort ist so ist auch XU ein Wort, d.h III am Ende eines Wortes kann durch ein U ersetzt werden.

    5) Falls in einem Wort UU vorkommt können diese beiden Zeichen in dem Wort gestrichen werden.

    Aufgabe: Untersuchen Sie, ob MU ein Wort dieser Sprache ist.