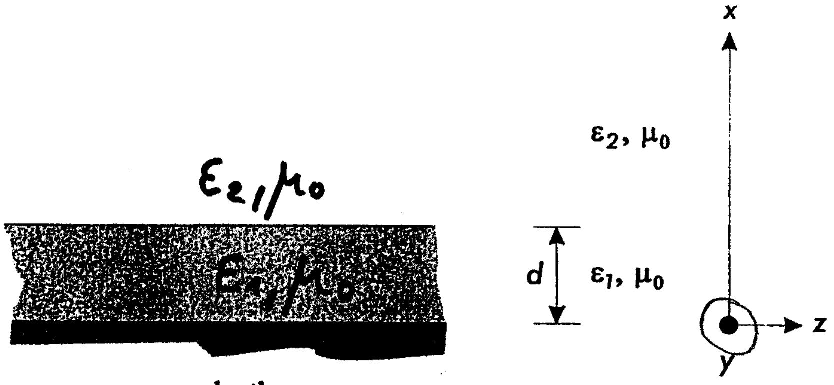
11. TM-Wellen auf dem dielektrischen Wellenleiter

FET



verlustlos

Untersuchen Sie das Ausbreitungsvermögen von **TM-Wellen** auf dem dielektrischen Wellenleiter.

1) Finden Sie einen Ansatz für die z-Komponenten der elektrischen Feldstärke in den beiden Dielektrika.

a) $E_{z_1} = A_1 \cdot \sin(k_{x_1} \cdot x) \cdot \exp(-jk_z \cdot z)$

b) $E_{z_2} = A_2 \cdot \exp(-k_{x_2} \cdot (x-d)) \cdot \exp(-jk_z \cdot z)$

2) Ermitteln Sie die Separationsbedingungen.

$\nabla^2 \psi + \omega^2 \mu \varepsilon \psi = 0$ 1) Einsetzen in die Wellengleichung 2) Kürzen

a) $\cancel{A_1} \cdot k_{x_1}^2 \cdot (-\cancel{\sin(k_{x_1} \cdot x)}) \cdot \cancel{\exp(-jk_z \cdot z)} + \cancel{A_1} \cdot \cancel{\sin(k_{x_1} \cdot x)} \cdot (-jk_z)^2 \cdot \cancel{\exp}$
$+ \cancel{A_1} \cdot \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 \cdot \cancel{\sin(k_{x_1} \cdot x)} \cdot \cancel{\exp(-jk_z \cdot z)} = 0$

$-k_{x_1}^2 - k_z^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_1 = 0$ 3) Umformen

$k_{x_1}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_1$ Vereinfachung: $\underline{k_1^2 = k_{x_1}^2}$

b) $\cancel{A_2} \cdot (-k_{x_2})^2 \cdot \cancel{\exp(-k_{x_2} \cdot (x-d))} \cdot \cancel{\exp(-jk_z \cdot z)} + \cancel{A_2} \cdot (-jk_z)^2 \cancel{\exp(-k_{x_2} (x-d)}$
$\cancel{\exp(-jk_z \cdot z)} + \omega^2 \mu_0 \cdot \varepsilon_2 \cdot \cancel{A_2} \cdot \cancel{\exp(-k_{x_2} (x-d)) \cdot \exp}$
$\cancel{-jk_z z)} = 0$ $k_{x_2}^2 - k_z^2 + \omega^2 \mu_0 \cdot \varepsilon_2 = 0$

$-k_{x_2}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \cdot \varepsilon_2$ $\underline{k_2^2 = -k_{x_2}^2}$

3) Berechnen Sie die fehlenden Komponenten von *E*- und *H*-Feld.

$$\underline{\underline{E_{x_1}}} = \frac{-j}{k_{x_1}^2} \cdot k_z \cdot A_1 \cdot \cancel{k_{x_1}} \cdot \cos(k_{x_1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$= \frac{-j}{k_{x_1}} \cdot A_1 \cdot \cos(k_{x_1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{E_{y_1}}} = 0$$

$$\underline{\underline{E_{z_1}}} = A_1 \cdot \sin(k_{x_1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

FET

$$\underline{\underline{H_{x_1}}} = 0$$

$$\underline{\underline{H_{y_1}}} = \frac{-j}{k_{x_1}^2} \cdot \omega \cdot \varepsilon_1 \cdot A_1 \cdot \cancel{k_{x_1}} \cdot \cos(k_{x_1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$= \frac{-j}{k_{x_1}} \cdot \omega \cdot \varepsilon_1 \cdot A_1 \cdot \cos(k_{x_1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{H_{z_1}}} = 0$$

$$\underline{\underline{E_{x_2}}} = \frac{-1}{+k_{x_2}^{\cancel{2}}} \cdot k_z \cdot A_2 \cdot (+\cancel{k_{x_2}}) \cdot \exp(-k_2(x-d)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{E_{y_2}}} = 0$$

$$\underline{\underline{E_{z_2}}} = A_2 \cdot \exp(-k_{x_2} \cdot (x-d)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{H_{x_2}}} = 0$$

$$\underline{\underline{H_{y_2}}} = \frac{-1}{+k_{x_2}^{\cancel{2}}} \cdot \omega \cdot \varepsilon_2 \cdot A_2 \cdot (+\cancel{k_{x_2}}) \cdot \exp(-k_{x_2} \cdot (x-d) \cdot \exp(-j k_z$$

$$\underline{\underline{H_{z_2}}} = 0$$

4) Passen Sie diese an die Randbedingungen an.

2 Randbedingungen: E_{tan}, H_{tan}

$$H_{tan_1}\big|_{x=d} = H_{tan,2}\big|_{x=d} \Rightarrow \cancel{\frac{-1}{k_{x_1}}} \cdot \cancel{\omega} \cdot \varepsilon_1 \cdot A_1 \cdot \cos(k_{x_1} \cdot d) = \frac{-1}{k_{x_2}} \cancel{\omega} \cdot \varepsilon$$

$$E_{tan_1}\big|_{x=d} = E_{tan,2}\big|_{x=d} \Rightarrow A_1 \cdot \sin(k_{x_1} \cdot d) = A_2$$

Idee: Division: $\frac{\sin}{\cos} = \tan$

$$\frac{\sin(k_{x_1} \cdot d) \, k_{x_1}}{\varepsilon_1 \, \cos(k_{x_1} \cdot d)} = \frac{k_{x_2}}{\varepsilon_2} \Rightarrow \tan(k_{x_1} \cdot d) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{k_{x_2}}{k}$$

5) **Bestimmen Sie die Dispersionsgleichung.**

$$k_{x_1}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \cdot \varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad k_{x_1} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \cdot \varepsilon_1 - k_z^2}$$

$$-k_{x_2}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \cdot \varepsilon_2 \quad \Rightarrow \quad k_{x_2} = \sqrt{k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \cdot \varepsilon_2}$$

Erinnerung: $\tan(k_{x_1} \cdot d) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{k_{x2}}{k_{x_1}}$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\omega^2 \mu_0 \cdot \varepsilon_1 - k_z^2} \cdot \tan\left(\sqrt{\omega^2 \mu_0 \cdot \varepsilon_1 - k_z^2} \cdot d\right) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \sqrt{k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2}}$$

6) **Bestimmen Sie auf graphische Weise die Grenzzfrequenz des Grundmodus der *E*-Welle auf dem dielektrischen Wellenleiter soferne überhaupt *E*-Wellen ausbreitungsfähig sind.**

$\xi = k_{x_1} \cdot d \qquad \eta = k_{x_2} \cdot d$

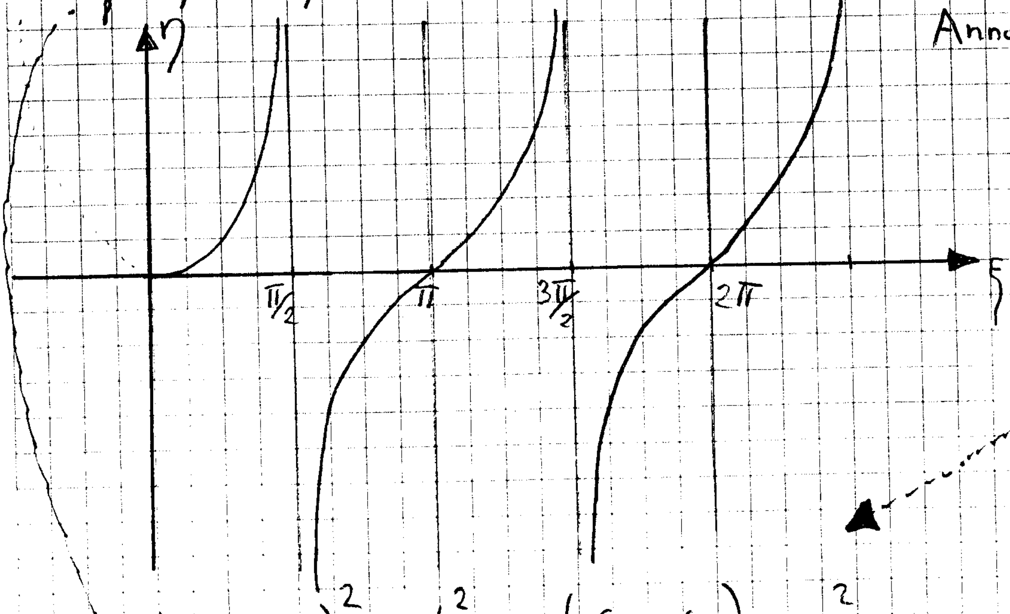
FET

$$\Rightarrow \frac{\xi}{\cancel{d}} \cdot \tan\left(\frac{\xi}{\cancel{d}} \cdot \cancel{d}\right) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\eta}{\cancel{d}}$$

Frage: Linker Ausdruck $= 0$
Rechter Ausdruck $= 0$

$$\boxed{\xi \cdot \tan \xi = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \eta}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = d^2 \cdot \mu_0 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \omega^2 = V^2 \qquad V = \omega \cdot d \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}$$



Annahmen: 1) $\underline{\underline{\eta = 0}}$

$\Rightarrow \xi \cdot \tan \xi = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{\xi = 0}}$

2) $\tan \xi = 0$

$\xi = m \cdot \pi$

$\Rightarrow \underline{\underline{k_{x_1,m} = \frac{m \cdot \pi}{d}}}$

$m \in \mathbb{N}_0^+$

z.B. 0, 1, 2, 3, ..

$$\left(\frac{m \cdot \pi}{\cancel{d}} \cdot \cancel{d}\right)^2 = d^2 \cdot \mu_0 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \omega_{c,m}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{c,m}^2 = \frac{m^2 \cdot \pi}{d \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}}}$$

7) **Wie weit dringt eine vom dielektrischen Plattenleiter geführte Welle** ($f=50Hz$, $d=1cm$, $e_{r1}=2.26$[Polyethylen], $e_{r2}=1$) **in den Außenraum 2 ein. Hinweis: Linearisieren Sie die Dispersionsgleichung.**

Annahme ε_{r1}

Annahme ε_{r2}

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_1}}$$

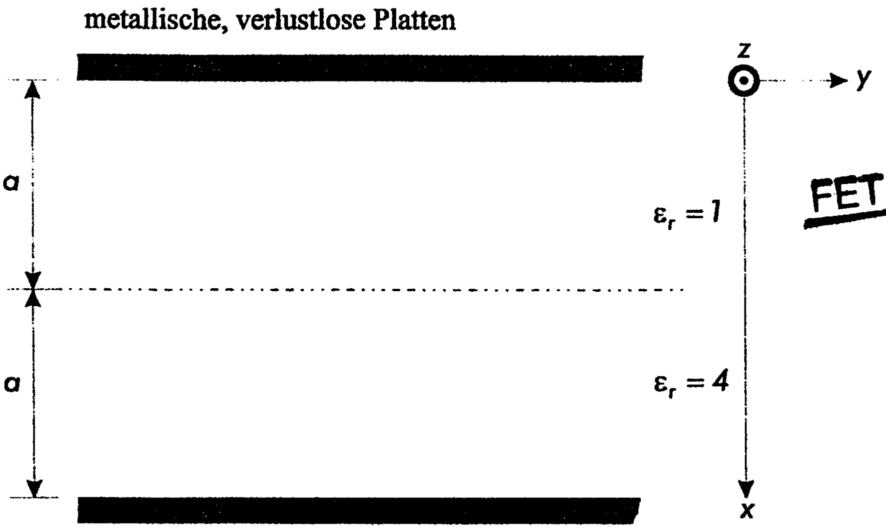
$$\sigma_1 \simeq \omega \cdot \varepsilon_2$$

FET

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega^2 \cdot \mu_0 \cdot \varepsilon_2}}$$

12. Wellenausbreitung in Wellenleiterstrukturen

Untersuchen Sie die Ausbreitung von **TM-Wellen** in der unten skizzierten Wellenleiterstruktur. ($a = 1\,cm$)



FET

1) Berechnen Sie alle Feldkomponenten.

Ansatz: a) $E_{z_1} = A_1 \cdot \sin(k_{x_1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$

b) $E_{z_2} = A_2 \cdot \sin(k_{x_2} \cdot (x - 2a)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$

Separationsbedingung:

$\vec{\nabla} \vec{\Psi} + \omega^2 \varepsilon \mu \Psi = 0$ Einsetzen in die Wellengleichung

a) $\cancel{A_1} \cdot k_{x_1}^2 \cdot (-\cancel{\sin(k_x \cdot x)}) \cdot \cancel{\exp(-jk_z \cdot z)} + \cancel{A_1} \cdot \cancel{\sin(k_{x_1} \cdot x)} \cdot (-jk_z)^2 \cdot \cancel{\exp(-jk_z)} + \omega^2 \varepsilon_1 \mu_0 \cdot \cancel{A_1} \cancel{\sin(k_{x_1})} \cdot \cancel{\exp(-jk_z z)} = 0$

$-k_{x_1}^2 - k_z^2 + \omega^2 \varepsilon_1 \cdot \mu_0 = 0$

$\Rightarrow \underline{k_{x_1}^2 + k_z^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_0}$ $\qquad k_1^2 = k_{x_1}^2$

b) $\cancel{A_2} \cdot k_{x_2}^2 \cdot (-\cancel{\sin(k_{x_2} \cdot (x-2a))}) \cdot \cancel{\exp(-jk_z \cdot z)} + \cancel{A_2} \cdot \cancel{\sin(k_{x_2}(x-2a))} \cdot (-jk_z)^2 \cdot \cancel{\exp(-jk_z \cdot z)} + \omega^2 \varepsilon_2 \mu_0 \cdot \cancel{A_2} \cdot \cancel{\sin(k_{x_2}(x-2a))} \cdot \cancel{\exp(-jk_z \cdot z)}$

$-k_{x_2}^2 - k_z^2 + \omega^2 \varepsilon_2 \mu_0 = 0$

$\Rightarrow \underline{k_{x_2}^2 + k_z^2 = \omega^2 \varepsilon_2 \cdot \mu_0}$ $\qquad k_2^2 = k_{x_2}^2$

Feldbilder:

$$E_{x_1} = \frac{-j}{k_{x_1}^{2}} \cdot k_z \cdot A_1 \cdot \cancel{k_{x_1}} \cdot \cos(k_{x_1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$= \frac{-j}{k_{x_1}} \cdot k_z \cdot A_1 \cdot \cos(k_{x_1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$E_{y_1} = 0$$

$$E_{z_1} = A_1 \cdot \sin(k_{x_1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$H_{x_1} = 0$$

$$H_{y_1} = \frac{-j}{k_{x_1}^{2}} \cdot w \cdot \varepsilon_1 \cdot A_1 \cdot \cancel{k_{x_1}} \cdot \cos(k_{x_1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$= \frac{-j}{k_{x_1}} \cdot w \cdot \varepsilon_1 \cdot A_1 \cdot \cos(k_{x_1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$H_{z_1} = 0$$

$$E_{x_2} = \frac{-j}{k_{x_2}^{2}} \cdot k_z \cdot A_2 \cdot \cancel{k_{x_2}} \cdot \cos(k_{x_2} \cdot (x - 2a)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$E_{x_2} = \frac{-j}{k_{x_2}} \cdot k_z \cdot A_2 \cdot \cos(k_{x_2} \cdot (x - 2a)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$E_{y_2} = 0$$

$$E_{z_2} = A_2 \cdot \sin(k_{x_2} \cdot (x - 2a)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$H_{x_2} = 0$$

$$H_{y_2} = \frac{-j}{k_{x_2}^{2}} \cdot w \cdot \varepsilon_2 \cdot A_2 \cdot \cancel{k_{x_2}} \cdot \cos(k_{x_2} \cdot (x - 2a)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$= \frac{-j}{k_x} \cdot w \cdot \varepsilon_2 \cdot A_2 \cdot \cos(k_{x_2} \cdot (x - 2a)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$H_{z_2} = 0$$

2) **Berechnen Sie jenes a in Vielfachen der freien Wellenlänge, für das mindestens ein TM-Wellenmodus ausbreitungsfähig ist.**

2 Randbedingungen: $E_{1,tan}\Big|_{x=a} = E_{2,tan}\Big|_{x=a}$ $\quad H_{1,tan}\Big|_{x=a} = H_{2tan}\Big|_{x=a}$

$$\frac{-j}{k_{x1}} \cdot \omega \cdot \varepsilon_1 \cdot A_1 \cdot \cos(k_{x1} \cdot a) = \frac{-j}{k_{x2}} \cdot \omega \cdot \varepsilon_2 \cdot A_2 \cdot \cos(k_{x2} \cdot (-a))$$

$$A_1 \cdot \sin(k_{x1} \cdot a) = A_2 \cdot \sin(k_{x2} \cdot (-a))$$

Trick wie voriges Bsp: Dividieren $\frac{\sin}{\cos} = \tan$

$$\frac{k_{x1}}{\varepsilon_1} \cdot \tan(k_{x1} \cdot a) = \frac{k_{x2}}{\varepsilon_2} \cdot \tan(k_{x2} \cdot (-a))$$

$$k_{x1} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_1 \mu_0 - k_z^2} \qquad k_{x2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_2 \cdot \mu_0 - k_z^2}$$

Erinnerung: $\frac{1}{\varepsilon\mu} = c^2$ und $c = \lambda \cdot f$

$$\Rightarrow k_{x1} = \sqrt{\left(\frac{2\pi f}{c_0}\right)^2 - k_z^2} \qquad k_{x2} = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{2\pi f}{c_0}\right)^2 - k_z^2}$$

Grenzfrequenz: $k_z = 0$

$$k_{x1} = \frac{2\pi \cdot f}{c_0} \quad \text{oder} \quad k_{x1} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$k_{x2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot f}{c_0} \quad \text{oder} \quad k_{x2} = \frac{4\pi}{\lambda_0}$$

$$\frac{2\pi}{\varepsilon_0 \cdot \lambda_0} \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot a\right) = \frac{\pi}{\varepsilon_0 \cdot \lambda_0} \cdot \tan\left(-\frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot a\right)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot a\right) = \tan\left(-\frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot a\right)$$

$$2 \tan\Big(\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot a}_{\alpha}\Big) + \tan\Big(\underbrace{\frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot a}_{2\alpha}\Big) = 0$$

$$2 \cdot \tan\alpha + \tan 2\alpha = 0$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

$$2 \cdot \tan\alpha + \frac{2 \cdot \tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = 0$$

Wann wird $\tan\alpha = 0$? Wenn $\alpha = n \cdot \pi$ ist.

$$1 - \tan^2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow 2 - \tan^2\alpha = 0$$

$$\tan\alpha = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 0{,}9553 \text{ rad}$$

FET

Aus $\alpha = n \cdot \pi$ folgt: $\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot a = n \cdot \pi \Rightarrow \lambda_0 = 2a$

Aus $\alpha = 0{,}9553$ folgt: $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot a = 0{,}9553 \Rightarrow \lambda_0 = 6{,}577\,a$

3) **Ermitteln Sie die Grenzfrequenzen höherer Moden.**

$$\alpha = 0{,}9553 + n \cdot \pi \qquad \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a = 0{,}9553 + n \cdot \pi$$

$$f = \frac{c_0}{\lambda}$$

Tabelle:

$$f_{g1}\big|_{n=0} = 4{,}55 \text{ GHz}$$

$$f_{g2}\big|_{n=1} = 19{,}55 \text{ GHz}$$

$$f_{g3}\big|_{n=2} = 34{,}54 \text{ GHz}$$

4) **Welchen Verlauf hat der Betrag der z-Komponente des elektrischen Feldes des Grundmodus über der Querabmessung (numerische Auswertung)?**

Hinweis: $tan(2j) = \frac{2tan(j)}{1-tan^2(j)}$

Grundmodus: $f_{g1} = 4{,}55$ GHz

$$|E_{z1}| = A_1 \cdot |\sin(k_{x1} \cdot x)| = E_0 \cdot \left|\sin\sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - k_z^2}\right| \qquad k_{x1} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 = k_z^2 \qquad \omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi \cdot c}{\lambda_0}$$

$$\tan(2j) = \frac{2\tan(j)}{1-\tan^2(j)} \qquad k_{x1} = \sqrt{\left(\frac{2\pi f}{c_0}\right)^2 - k_z^2}$$

[illegible]

Allgemein:

$$|E_{z1}| = A_1 \cdot \sin(k_{x1} \cdot x) \qquad k_{x1} = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\pi}{a} \qquad |E_{z1}| = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$|E_{z2}| = A_2 \cdot \sin(k_{x2} \cdot (x-2a)) \qquad k_{x2} = \frac{4\pi}{[illegible]} = \frac{2\pi}{[illegible]} \qquad |E_{z2}| = A_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{[illegible]}x\right)$$