Herleitungen aus dem Skriptum Elektrodynamik

23. November 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Poynting-Satz

Ausgehend vom Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ berechnen wir die negative Divergenz von $\vec{S}$ mit Hilfe des Nabla Kalküls und den Rechenregeln für das Spatprodukt:

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} &= -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{\nabla} \cdot (\underset{\blacktriangle}{\vec{E}} \times \vec{H}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \underset{\blacktriangle}{\vec{H}}) \\ &= -H \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \end{aligned}$$

Einsetzen des Induktionsgesetzes $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ und des Ampere-Maxwell Satzes $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D}$ ergibt:

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{E} \cdot (\vec{J} + \partial_t \vec{D})$$

Integrieren beider Seiten über das Volumen $\mathscr{V}$ und einsetzen des Satz von Gauß ergibt den Poynting-Satz:

$$-\int_{\partial \mathscr{V}} \vec{n} \cdot \vec{S} \, \mathrm{d}A = \int_{\mathscr{V}} \left(\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{E} \cdot \vec{J} \right) \mathrm{d}V$$

Interpretation:

- Die linke Seite beschreibt den Energiefluss in die Hülle $\partial \mathscr{V}$.
- Das Produkt $\vec{E} \cdot \vec{J}$ beschreibt die Wechselwirkung mit anderen Energieformen über Ströme, z.B. Joule-Verluste.

- Die 2 restlichen Terme kann man bei näherer Betrachtung als die zeitliche Ableitung des Energieinhaltes identifizieren (für raumfeste Flächen darf die Zeitableitung unter das Integral gezogen werden):

$$\partial_t \int_{\mathscr{V}} w^e \,\mathrm{d}V \quad = \quad \partial_t \int_{\mathscr{V}} (\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 + \frac{\varepsilon}{2}\vec{E}^2)\,\mathrm{d}V = \int_{\mathscr{V}} (\vec{H}\cdot\partial_t\vec{B} + \vec{E}\cdot\partial_t\vec{D})\,\mathrm{d}V$$

Zusammenfassung:
Der gesamte Energiefluss durch die Hülle $\partial\mathscr{V}$ wird im Elektromagnetischen Feld gespeichert oder über Ströme in andere Energieformen umgewandelt. [1]

2 Bilanzgleichungen für Energie und Impuls

Wir gehen von den globalen Bilanzgleichungen für Energie und Impuls[2] aus:

$$\begin{aligned}\dot{W}(\mathscr{V}) + Q(\partial\mathscr{V}) &= R(\mathscr{V})\\ \dot{\vec{G}}(\mathscr{V}) + \vec{P}(\partial\mathscr{V}) &= \vec{F}(\mathscr{V})\end{aligned}$$

Nun werden die Größen als lokale Dichten dargestellt.

$$\begin{aligned}W(\mathscr{V}) = \int_{\mathscr{V}} w\,\mathrm{d}V, \quad Q(\mathscr{A}) = \textstyle\int_{\mathscr{A}} \vec{n}\cdot\vec{q}\,\mathrm{d}A, \quad R(\mathscr{V}) = \displaystyle\int_{\mathscr{V}'} r\,\mathrm{d}V + \int_{\mathscr{S}'} r^s\,\mathrm{d}A\\ \vec{G}(\mathscr{V}) = \int_{\mathscr{V}} \vec{g}\,\mathrm{d}V, \quad \vec{P}(\mathscr{A}) = \textstyle\int_{\mathscr{A}} \vec{n}\cdot\underset{\sim}{p}\,\mathrm{d}A, \quad \vec{F}(\mathscr{V}) = \displaystyle\int_{\mathscr{V}'} \vec{f}\,\mathrm{d}V + \int_{\mathscr{S}'} \vec{f}^s\,\mathrm{d}A\end{aligned}$$

Da wir nun allg. von bewegten Körpern und Flächen ausgehen, kann die Zeitableitung nicht einfach unter das Integral gezogen werden. Für die mitgeschleppte Zeitableitung schreiben wir für Vektorfelder[3] bzw. Skalarfelder[4]

$$\begin{aligned}\partial_t^c\vec{F} &= \partial_t\vec{F} + \vec{v}\vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{v}\right)\\ \partial_t^c f &= \partial_t f + \vec{\nabla}\cdot(f\vec{v})\end{aligned}$$

Einsetzen in die Bilanzgleichung für die Energie, Einsetzen des Satzes von Gauß und der Beziehung für ∂_t^c:

$$\underbrace{\partial_t \int_{\mathscr{V}} W\,\mathrm{d}V}_{\int_{\mathscr{V}}\partial_t^c W\,\mathrm{d}V} + \underbrace{\int_{\partial\mathscr{V}} \vec{n}\cdot\vec{q}\,\mathrm{d}A}_{\int_{\mathscr{V}'}\vec{\nabla}\cdot\vec{q}\,\mathrm{d}V + \int_{\mathscr{S}'}\vec{n}\cdot[\![\vec{q}]\!]\,\mathrm{d}A} = \int_{\mathscr{V}'} r\,\mathrm{d}V + \int_{\mathscr{S}'} r^s\,\mathrm{d}A$$

$$\int_{\mathscr{V}} \partial_t^c W\,\mathrm{d}V = \int_{\mathscr{V}} \left(\partial_t w + \vec{\nabla}\cdot(w\vec{v})\right)\mathrm{d}V = \int_{\mathscr{V}} \partial_t w\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\mathscr{V}} \underbrace{\vec{n}\cdot(w\vec{v})}_{0}\,\mathrm{d}A - \int_{\mathscr{S}} \underbrace{\vec{n}\cdot[\![w\vec{v}]\!]}_{-v_n[\![w]\!]}\,\mathrm{d}A$$

---

[1] Vgl. ET2 Kapitel 28
[2] Edyn Skript S. 47
[3] Edyn Skript S. 39
[4] A. Prechtl: Ein Beitrag zur Behandlung von Flächengrößen und Sprungbedingungen der nichtrelativistischen Elektrodynamik bewegter Körper (1978)
`http://www.springerlink.com/content/l1rp2u7162t227p1/fulltext.pdf`

Der Term $\int_{\partial\mathscr{V}} \vec{n} \cdot (w\vec{v})\ \mathrm{d}A$ fällt vermutlich weg, da am Rand des Volumens keine Energie gespeichert wird.
Um die Gleichung zu erfüllen, müssen die Integranden jeweils gleich sein:

$$\begin{aligned} \partial_t w + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} &= r \\ -v_n [\![w]\!] + \vec{n} \cdot [\![\vec{q}]\!] &= r^s \end{aligned}$$

Ähnliche Vorgehensweise für die Bilanzgleichung für den Impuls, hier wird u.a. die Greentransformation[5] und die Grassmann-Identität benötigt:

$$\underbrace{\partial_t \int_{\mathscr{V}} \vec{g}\ \mathrm{d}V}_{\int_{\mathscr{V}} \partial_t^c \vec{g}\ \mathrm{d}V} + \underbrace{\int_{\partial\mathscr{V}} \vec{n} \cdot \underset{\sim}{p}\ \mathrm{d}A}_{\int_{\mathscr{V}'} \vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{p}\ \mathrm{d}V + \int_{\mathscr{S}'} \vec{n}\cdot[\![\underset{\sim}{p}]\!]\ \mathrm{d}A} = \int_{\mathscr{V}'} \vec{f}\ \mathrm{d}V + \int_{\mathscr{S}'} \vec{f}^s\ \mathrm{d}A$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{V}} \partial_t^c \vec{g}\ \mathrm{d}V &= \int_{\mathscr{V}} \big(\partial_t \vec{g} + \vec{v}\vec{\nabla} \cdot \vec{g} + \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{g} \times \vec{v})\big)\ \mathrm{d}V}_{\vec{\nabla}\times(\underset{\blacktriangle}{\vec{g}}\times\vec{v})+\vec{\nabla}\times(\vec{g}\times\underset{\blacktriangle}{\vec{v}})=\vec{\nabla}\times(\underset{\blacktriangle}{\vec{g}}\times\vec{v})} \\ &= \int_{\mathscr{V}} \big(\partial_t \vec{g} + \vec{v}\vec{\nabla} \cdot \vec{g} + \underbrace{\underset{\blacktriangle}{\vec{g}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})}_{\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{g}} - \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{g})\big)\ \mathrm{d}V \\ &= \int_{\mathscr{V}} \partial_t \vec{g}\ \mathrm{d}V + \int_{\partial\mathscr{V}} \underbrace{\vec{v} \cdot (\vec{n}\vec{g})}_{0}\ \mathrm{d}A - \int_{\mathscr{S}} \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{n}[\![\vec{g}]\!]}_{-v_n[\![\vec{g}]\!]}\ \mathrm{d}A \end{aligned}$$

Die lokalen Bilanzgleichungen für den Impuls lauten somit:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{p} &= \vec{f} \\ -v_n [\![\vec{g}]\!] + \vec{n} \cdot [\![\underset{\sim}{p}]\!] &= \vec{f}^s \end{aligned}$$

■

3 Zweidimensionale Lösungen der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten

Lösen der Differentialgleichung [6]

$$\varrho^2 R''(\varrho) + \varrho R'(\varrho) - k^2 R(\varrho) = 0$$

erfordert eine Unterscheidung von $k = 0$ und $k \neq 0$.
Für die Lösung der Euler-DG für $k \neq 0$ kann folgender Ansatz gewählt werden:

$$\begin{aligned} R(\varrho) &\sim \varrho^\lambda \\ R'(\varrho) &= \lambda\varrho^{\lambda-1} \\ R''(\varrho) &= \lambda(\lambda-1)\varrho^{\lambda-2} \end{aligned}$$

[5] Edyn Skript S21
[6] Edyn-Skriptum S 73, 3.53

Einsetzen liefert für k und somit für $R(\varrho)$

$$\begin{aligned}\lambda(\lambda-1)\varrho^\lambda+\lambda\varrho^\lambda-k^2\varrho^\lambda=0\\ \lambda^2-\lambda+\lambda=k^2\Rightarrow\lambda=\pm k\\ R(\varrho)=A_1\varrho^k+A_2\varrho^{-k}\end{aligned}$$

Für $k=0$ muss gelten: $\frac{\varrho}{R}\left[\varrho R'\right]'=0$. Zweimalige Integration liefert für $R(\varrho)$

$$\begin{aligned}\varrho R' &= k\Rightarrow R'(\varrho)=\frac{k}{\varrho}\\ R(\varrho) &= \ln(\varrho)k+C\end{aligned}$$

Da das Argument vom ln immer einheitenfrei sein muss, wird die Konstante in das Argument vom ln gezogen und ist frei wählbar.

$$R(\varrho) = \ln\left(\frac{\varrho}{a}\right)+A_1$$

■

4 Leitungsgleichung für die verlustbehaftete Doppelleitung

Als Voraussetzung für die Leitungsgleichungen nehmen wir TEM-Wellen an, dadurch können Strom und Spannung in jedem Punkt auf der Leitung ausgedrückt werde.
Als erste Näherung werden Strom und Spannung nach einem differenziell kleinem Leitungsstück mit der Länge $\mathrm{d}z$ durch eine Taylorreihe approximiert, wobei nach dem linearen Term abgebrochen wird:

$$\begin{aligned}U(z+\mathrm{d}z) &= U(z)+\partial_z U(z)\,\mathrm{d}z+O(\mathrm{d}z^2)\\ I(z+\mathrm{d}z) &= I(z)+\partial_z I(z)\,\mathrm{d}z+O(\mathrm{d}z^2)\end{aligned}$$

Nun stellen wir die Maschengleichung mit Bezeichnung nach Abb. 1 auf:

$$U=R'\,\mathrm{d}z(I+\partial_z I\,\mathrm{d}z)+C'\,\mathrm{d}z\partial_t(I+\partial_z I\,\mathrm{d}z)+U+\partial_z U\,\mathrm{d}z$$

Analog dazu die Knotengleichung:

$$I=G'\,\mathrm{d}zU+C'\,\mathrm{d}z\partial_t U+I+\partial_z I\,\mathrm{d}z$$

Streichen der quadratischen Terme $\mathrm{d}z^2$(lineare Approximation) sowie Kürzen von U, I, und $\mathrm{d}z$ liefert die beiden Leitungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\partial_z U+L'\partial_t I+R'I=0\\ \partial_z I+C'\partial_t U+G'U=0\end{aligned}$$

■

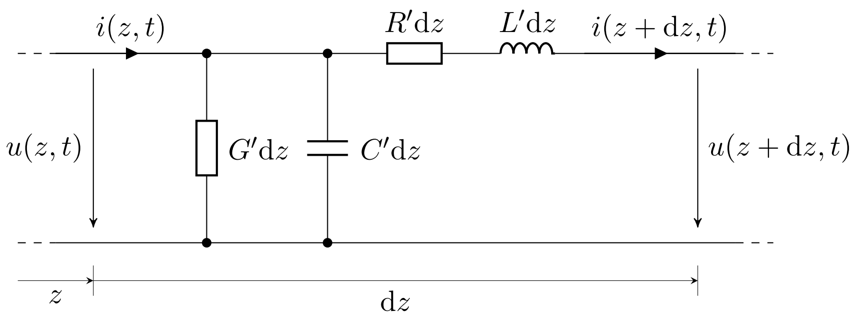

Abbildung 1: Modell für die Leitungsgleichungen