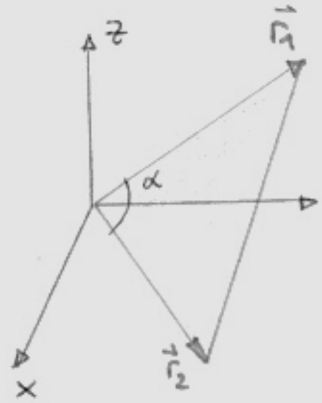
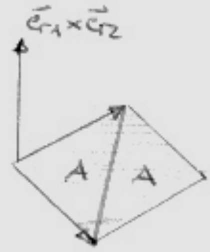
Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den zwei Ortsvektoren $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ mit dem Ursprung aufgespannten Dreiecks.

$$\vec{r}_1 = (a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y + 7\,\vec{e}_z)\ \text{cm}$$
$$\vec{r}_2 = (\quad \dots \quad)\ \text{cm}$$



$$\vec{r}_1 \circ \vec{r}_2 = r_1 \cdot r_2 \cos(\alpha)$$
$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \underbrace{r_1 \cdot r_2 \sin(\alpha)}_{2A}\, \vec{e}_{r_1} \times \vec{e}_{r_2}$$

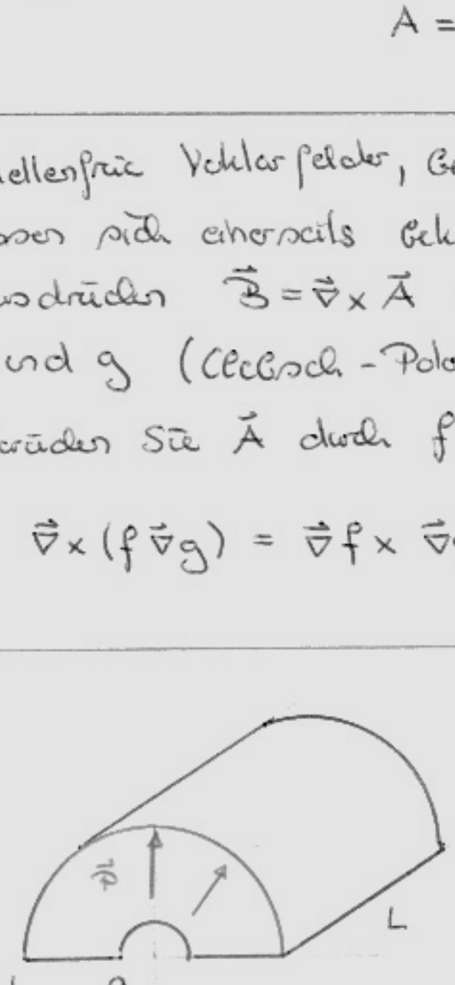


$$A = \frac{r_1 \cdot r_2}{2} \sin\left(\arccos\left(\frac{\vec{r}_1 \circ \vec{r}_2}{r_1\, r_2}\right)\right)$$

Quellenfreie Vektorfelder, beispielsweise die magn. Flussdichte, lassen sich einerseits bekanntlich durch die Rotation eines Vektorfeldes ausdrücken $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ andererseits durch zwei Skalarfelder f und g (Clebsch-Potentiale) in der Form $\vec{B} = \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g$

Drücken Sie $\vec{A}$ durch f und g aus.

$$\vec{\nabla} \times (f\,\vec{\nabla} g) = \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} g}_{=0} \qquad \underline{\underline{\vec{A} = f\,\vec{\nabla} g}}$$



Berechnen Sie das elektrische Moment $\vec{p}$ einer starr homogen elektr. polarisierten Zylinder-Schale (siehe Bild) mit

$\vec{P} = P\,\vec{e}_\varrho \qquad |\vec{P}| = \text{const}$

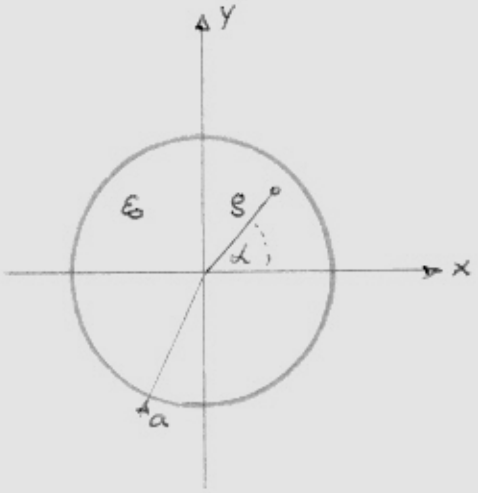
$$\vec{p} = L \int_0^{\pi}\int_a^b P\,\vec{e}_\varrho\, \varrho\, d\varrho\, d\alpha = LP \int_0^{\pi}\int_a^b \vec{e}_\varrho\, \varrho\, d\varrho\, d\alpha = \underline{\underline{\frac{LP\pi}{2}\left[b^2 - a^2\right] \vec{e}_\varrho}}$$

Leiten Sie einen Zusammenhang für den Wellenwid. Z_w einer verlustbehafteten verzerrungsfreien Doppelleitung her.

$$\frac{L'}{R'} = \frac{C'}{G'} \qquad L'G' = R'C' \qquad \underline{Z}_w = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{(R' + j\omega L')(G' - j\omega C')}{G'^2 + \omega^2 C'^2}}$$

$$\underline{Z}_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \cdot \sqrt{\frac{j\omega + R'/L'}{j\omega + G'/C'}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{L'}{C'}}}}$$ reell frequenzunab.

$$\underline{\underline{Z_w = \sqrt{\frac{R'G' + \omega^2 L'C'}{G'^2 + \omega^2 C'^2}}}}$$ reell !



Am Rand $\varrho = a$ eines kreiszylindr. ladungsfreien Bereiches $0 \le \varrho \le a$ ist die Randprojektion der elektr. Feldstärke mit

$$E_\varrho(a,\alpha) = E_0 \cos(n\alpha) \qquad n \in \mathbb{N}$$

vorgeschrieben. Berechnen Sie daraus die elektr. Feldstärke $\vec{E}(\varrho,\alpha)$ im Bereich $0 \le \varrho \le a, \; 0 \le \alpha \le 2\pi$

Im ladungsfreien Innenraum elektrostatischer Fall

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad \vec{n} \times [\![\vec{E}]\!] = 0 \qquad [\![\varphi]\!] = 0$$

$$\vec{n} \circ \vec{D} = \varrho \qquad \vec{n} \circ [\![\vec{D}]\!] = \sigma$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \text{ Laplace-Gleichung} \Rightarrow \varphi(\varrho,\alpha) = \left[A_1 \varrho^k + A_2 \varrho^{-k}\right]\left[B_1 \cos(k\alpha) + B_2 \sin(k\alpha)\right]$$

$$\varphi(\varrho,\alpha) = R(\varrho)\, S(\alpha)$$

$$\vec{e}_\varrho \circ \vec{E}(\varrho,\alpha) = E_0 \cos(n\alpha) \qquad n = 1,2,3,\ldots \qquad \lim_{\varrho \to 0} \varphi(\varrho,\alpha) < \infty$$

$$E_\varrho = -\vec{e}_\varrho \circ \vec{\nabla}\varphi = -\vec{e}_\varrho \circ \vec{e}_\varrho\, \partial_\varrho \varphi = -\left[A_1 k \varrho^{k-1} + (-k) A_2 \varrho^{-k-1}\right]\left[B_1 \cos(n\alpha) + B_2 \sin(n\alpha)\right]$$

Aus den Vorgaben für die Randfeldstärke erkennt man und aus der Beschränktheit von $\varphi(\varrho \to 0)$ folgt

$B_2 = 0 \qquad n = k$

$\varrho \to 0 \Rightarrow A_2 = 0$

$$E_\varrho = -A k \varrho^{k-1} \cos(k\alpha) = E_0 \cos(k\alpha) \qquad -A k \varrho^{k-1} = E_0$$

$$\boxed{A = \frac{-E_0}{k a^{k-1}}}$$

$$\left.\boxed{\begin{aligned} \varphi(\varrho,\alpha) &= -\frac{E_0 a}{n}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^n \cos(n\alpha) \\ \vec{E}(\varrho,\alpha) &= E_0 \left(\frac{\varrho}{a}\right)^{n-1}\left[\cos(n\alpha)\,\vec{e}_\varrho - \sin(n\alpha)\,\vec{e}_\alpha\right] \end{aligned}}\right\} \begin{aligned} &0 \le \varrho \le a \\ &0 \le \alpha \le 2\pi \end{aligned}$$

Für die Ausbreitung ebener homogener elektromagn. Sinuswellen in einem einfachen Material mit konstanten Werten der Permittivität und Permeabilität (ε, μ) und der Konduktivität σ liefern die beiden Maxwell-Rotorgleichungen über Ansätze der Form

$$\vec{F}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{ \underline{\vec{F}}\, e^{j\omega t - \gamma \vec{n}\cdot\vec{r}} \right\}$$ die Zusammenhänge

$$\gamma\, \vec{n} \times \vec{E} = j\omega\mu\, \vec{H} \qquad \gamma\, \vec{n} \times \vec{H} = -(\sigma + j\omega\varepsilon)\, \vec{E}$$

Stellen Sie damit den Dämpfungskoeffizienten $\alpha > 0$ und den Phasenkoeff. $\beta > 0$ als Funktion der Frequenz dar

---

$$\gamma\, \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{E} = j\omega\mu\, \vec{n} \times \vec{H} = -\frac{(\sigma + j\omega\varepsilon)}{\gamma}\vec{E} = \gamma\left[\vec{n}(\underbrace{\vec{n}\cdot\vec{E}}_{0}) - \vec{E}(\underbrace{\vec{n}\cdot\vec{n}}_{1})\right]$$

$$\cdot\,(j\omega\mu)$$

$$\gamma^2 = +j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta = -\omega^2\mu\varepsilon + j\omega\mu\sigma$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu\varepsilon \qquad 2\alpha\beta = \omega\mu\sigma$$ Elimination von β

$$\alpha^4 + \mu\varepsilon\omega^2\alpha^2 - \left(\tfrac{1}{2}\omega\sigma\mu\right)^2 = 0$$

$$\alpha(\omega) = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right]} \qquad \omega = 2\pi f$$

$$\beta(\omega) = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \; \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right)}}$$

Berechnen Sie für das ebene magn. Feld mit der Feldstärke

$$\vec{H} = \frac{H_0}{a}\left[2xy\,\vec{e}_x + (x^2-y^2)\,\vec{e}_y\right]$$

ein magn. Skalarpotential $\varphi(x,y)$, sodaß $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi$ gilt

---

$\cancel{\vec{B} = \mu_0 H}$

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{e}_x\,\partial_x\varphi - \vec{e}_y\,\partial_y\varphi = \frac{H_0}{a}\left[2xy\,\vec{e}_x + (x^2-y^2)\vec{e}_y\right]$$

$$\partial_x\varphi = -\frac{H_0}{a^2}\,2xy \qquad \varphi(x,y) = -\frac{H_0}{a^2}\,2\frac{x^2}{2}y + f(y)$$

$$\partial_y\varphi = -\frac{H_0}{a^2}(x^2-y^2)$$

$$-\frac{H_0}{a^2}\left[x^2 + f'(y)\right] = -\frac{H_0}{a^2}(x^2-y^2) \quad\Rightarrow\quad f'(y) = -y^2$$

$$f(y) = -\frac{y^3}{3}$$

$$\underline{\underline{\varphi(x,y) = \frac{H_0}{a^2}\,y\left[\frac{y^2}{3} - x^2\right]}}$$