Rechentricks zur Vektoranalysis

VU Elektrodynamik

7. April 2010

Zusammenfassung

Das vorliegende Dokument stellt eine Zusammenfassung von hilfreichen Rechentricks zur VU Elektrodynamik dar. Es besteht weder Anspruch auf inhaltliche Vollständigkeit, noch auf die exakte, mathematische Korrektheit der Herleitung(en). Mir persönlich fiel der Umstieg von der eindimensionalen Analysis auf die dreidimensionale Vektoranalysis sehr schwer, unter anderem weil ich nur nach dem Skriptum gelernt habe und man sich da schon zeitweise „verloren“ fühlt. Vor allem ist es am Anfang schwierig, die Rechengänge aus der Beispielsammlung nachzuvollziehen, bzw. sind diese möglichst kompakt abgefasst und nicht so, wie sie in einem „natürlichen“ Rechenweg entstehen würden. Nichts desto trotz ist es aber fast immer möglich, die Vektorschreibweise beizubehalten und nur im äußersten Notfall die Koordinatendarstellungen anzuschreiben. Dazu bedarf es allerdings einiger Tricks und Ziel dieses Dokument ist es, eben jene zusammenzufassen.

Hinweise und Korrekturvorschläge nehme ich gerne entgegen, einfach eine Email an `e0728169@student.tuwien.ac.at`. Viel Glück bei euren Prüfungen!

Inhaltsverzeichnis

1 Tensoren

Ein Tensor n-ter Stufe ist eine n-fach indiziertes mathematisches Objekt. Auf einem ebenen Blatt Papier kann man maximal einen Tensor zweiter Stufe anschaulich darstellen und tut das in Form von Matritzen. Der Tensorbegriff stammt eigentlich aus der Physik; der zentrale Gedanke dabei: Physikalische Gesetzte können nicht von der Wahl eines speziellen Koordinatensystems abhängen. Deshalb muss ist der Tensor selbst als phyikalische Größe *Koordinaten-invariant*, selbst wenn er in unterschiedlichen Koordinatensystemen verschiedene Gestalt annimmt. Abbildung 1 veranschaulicht einen Tensor dritter Stufe. So können schritteise Tensoren höherer Stufe konstruiert werden, die Anschaulichkeit geht aber ab $n = 3$ verloren und weicht einem Gewirr aus Indizes.

In den Rechenbeispielen kommen höchstens Tensoren zweiter Stufe vor die aus dem Tensorprodukt zweier Vektoren entstehen

$$\underset{\sim}{T} = \vec{a} \otimes \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i b_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \; . \tag{1}$$

In diesem Zusammenhang kann das Tensorprodukt zweier Vektoren auch als deren Dyadisches Produkt aufgefasst werden

$$\vec{a} \otimes \vec{b} := \vec{a}\,\vec{b}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \cdots & a_m b_n \end{pmatrix} . \tag{2}$$

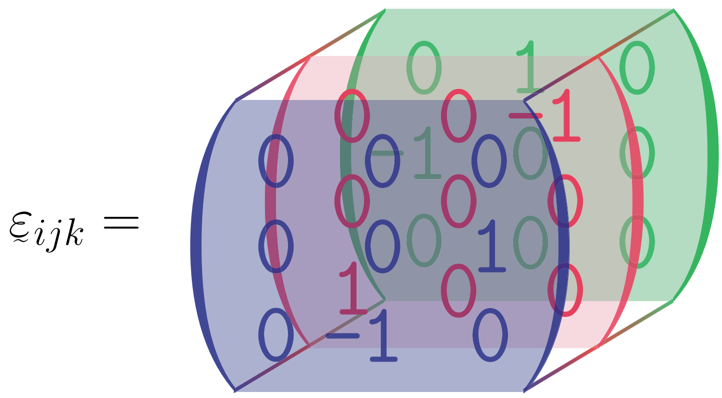

Abbildung 1: Veranschaulichung des ε-Tensors dritter Stufe

2 Die drei goldenen Regeln

2.1 Das Spatprodukt

Das Spatprodukt ist das Skalarprodukt aus dem Exprodukt zweier Vektoren und einem dritten Vektor. Es ergibt das orientierte Volumen des durch die drei Vektoren aufgespannten Spats (Abbildung 2). Es wird auch gemischtes Produkt genannt und ist identisch mit der aus diesen Vektoren gebildeten Determinanten

$$\text{spat}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \ . \tag{3}$$

Wichtig ist folgendes: Es gibt $3! = 6$ Möglichkeiten die Vektoren anzuordnen. Identifiziert man $\vec{a} \mapsto 1, \vec{b} \mapsto 2$ und $\vec{c} \mapsto 3$, so sind die geraden Permutationen[1]

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \tag{4}$$

zueinander äquivalent, wohingegen die ungeraden Permutationen ein negatives Vorzeichen bekommen.

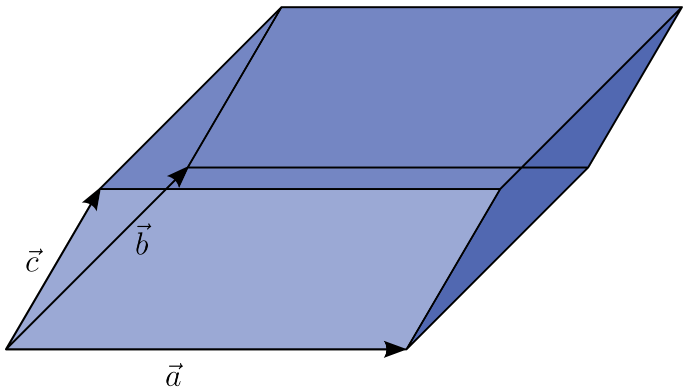

Abbildung 2: Veranschaulichung des Spatprodukts

2.2 Die Graßmann-Identität

Die Gültigkeit diser Identität prüft man durch nachrechnen

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{pmatrix} \\
&= \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \ .
\end{aligned} \tag{5}$$

[1]Diese gehen durch zyklische Vertauschungen aus (1,2,3) hervor. Sprich man nimmt das erste Element und stellt es an die letzte Stelle bzw. stellt das letzte Element an die erste Stelle usw.

2.3 Assoziativität von $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

Zunächst ein wichtiges Ergebnis aus der Vektoralgebra, dass im weiteren oft benutzt werden wird. Das Skalarprodukt zweier Vektoren lässt sich bekanntlich in der Form $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b}$ schreiben. Weiters gilt für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und Skalare s

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{a}^T \vec{b} = \vec{b}^T \vec{a} \;, \\ s\vec{a} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{a}s \;, \end{aligned}$$

wobei s natürlich auch ein Skalarprodukt zweier Vektoren sein kann.
Fassen wir die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nun als $n \times 1$-Matritzen auf, so folgt mit der Assoziativität des Matritzenprodukts

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{a}) = \vec{c}(\vec{b}^T \vec{a}) = (\vec{c}\,\vec{b}^T)\vec{a} = \vec{c} \otimes \vec{b} \cdot \vec{a} \;.$$

Ein Vergleich mit Gl. (1.9) zeigt, dass $\vec{c} \otimes \vec{b} \cdot \vec{a} \;\equiv \vec{a} \cdot \vec{b} \otimes \vec{c}$. Zusammenfassen gilt folgendes wichtiges Ergebnis:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \otimes \vec{c} \tag{6}$$

3 Nabla

Der Nabla-Operator wird verwendet, um räumliche Ableitungen von Vektorfeldern zu bilden. Dabei kann die Änderugsrate einer physikalischen Größe nicht von der Wahl unserer Koordinaten abhängen. Somit ist Nabla ebenso wie die Tensoren aus Abschnitt 1 Koordinaten-invariant, besitzt jedoch je nach Koordinatensystem unterschiedliche Gestalt. Man kann einen Ausdruck $\vec{\nabla} f(x, y, z)$ also sowohl direkt mit dem Nablaoperator in kartesischen Koordinaten berechnen, oder aber z.B. f in Zylinderkoordinaten $f(\varrho, \alpha, z)$ ausdrücken, den Nablaoperator für Zylinderkoordinaten anwenden und schließlich das Ergebnis wieder in kartesische Koordinaten umschreiben. Das Resultat ist das Gleiche. Vor allem bei Beispielen mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ lässt sich oft durch die Verwendung des Nablaoperators in Kugelkoordinaten ein rechnerischer Vorteil herausschlagen.

3.1 Das Nabla-Kalkül

Nabla ist sowohl Vektor als auch Differentialoperator und gehorcht somit auch den Gesetzten für diese beiden mathematischen Objekte. Konventionsgemäß wirkt ein Differentialoperator auf alles, was rechts von ihm steht. Das ist aber lediglich eine Konvention. Man kann diese auch fallen lassen und z.B. eine andere vereinbaren, so dass z.B. ein Differenzialoperator nur auf jene Faktoren in einem Term wirkt, welche eine spezielle Kennzeichnung tragen. So kann man die Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)g(x)\right] = g(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + f(x)\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \tag{7}$$

in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)g(x)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(\underset{\blacktriangle}{x})g(x)\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)g(\underset{\blacktriangle}{x})\right] \tag{8}$$

schreiben und vereinbaren, dass der Differentialoperator nur auf die durch ▲ gekennzeichneten Faktoren wirkt. Was hier wie eine unnötige Verkomplizierung wirkt, erweist sich im Umgang mit dem Differentialoperator Nabla, Vektorwertigen Funktionen und dem Tensorprodukt als *die Methode schlechthin* um komplizierte Ausdrücke zu vereinfachen ohne auf die Koordinatendarstellungen zurückzugreifen. Dabei wird die Produktregel zunächst durch

$$\vec{\nabla} \otimes (\underset{\sim}{f} \otimes \underset{\sim}{g}) = \vec{\nabla} \otimes (\underset{\blacktriangle}{\underset{\sim}{f}} \otimes \underset{\sim}{g}) + \vec{\nabla} \otimes (\underset{\sim}{f} \otimes \underset{\blacktriangle}{\underset{\sim}{g}}) \tag{9}$$

berücksichtigt, wobei das Tensorprodukt $\otimes$ bei passender Wahl der Tensoren $\underset{\sim}{f}$ und $\underset{\sim}{g}$ (Reduktion auf Skalare bzw. Vektoren) auch mit dem Vektorprodukt $\times$, dem Skalarprodukt $\cdot$, sowie mit der gewöhnlichen Multiplikation identifiziert werden kann. Danach kann Nabla – seiner Differentialoperator-Eigenschaft entledigt – wie ein gewöhnlicher Vektor behandelt werden. Nun wendet man die Rechenregeln aus Abschnitt 2 solange an, bis man wieder zur „normalen" Konvention zurückkehren kann.

Als Beispiel werden nun die Zeilen 4 bis 9 aus Tab. 1.2. hergeleitet[2].

Zeile 4

$$\vec{\nabla}(fg) = \vec{\nabla}\underset{\blacktriangle}{f}g + \vec{\nabla}f\underset{\blacktriangle}{g} = g\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}g \tag{10}$$

Zeile 5

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{g}) = \vec{\nabla} \cdot \underset{\blacktriangle}{f}\vec{g} + \vec{\nabla} \cdot f\underset{\blacktriangle}{\vec{g}} = \vec{g} \cdot \vec{\nabla}f + f\vec{\nabla} \cdot \vec{g} \tag{11}$$

Zeile 6

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (f\vec{g}) &= \vec{\nabla} \times \underset{\blacktriangle}{f}\vec{g} + \vec{\nabla} \times f\underset{\blacktriangle}{\vec{g}} \\ &= (\vec{\nabla}f) \times \vec{g} + f\vec{\nabla} \times \vec{g} = f\vec{\nabla} \times \vec{g} - \vec{g} \times \vec{\nabla}f \end{aligned} \tag{12}$$

Zeile 7

Hier benötigt man zunächst die mittels Graßmann-Identität herleitbaren Ergebnisse

$$\begin{aligned} \vec{f} \times (\vec{\nabla} \times \vec{g}\,) &= \vec{\nabla}(\vec{f} \cdot \underset{\blacktriangle}{\vec{g}}\,) - \underset{\blacktriangle}{\vec{g}}(\vec{f} \cdot \vec{\nabla}\,) = \vec{\nabla}(\vec{f} \cdot \underset{\blacktriangle}{\vec{g}}\,) - \vec{f} \cdot \vec{\nabla}\vec{g}\,, \\ \vec{g} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}\,) &= \vec{\nabla}(\vec{g} \cdot \underset{\blacktriangle}{\vec{f}}\,) - \underset{\blacktriangle}{\vec{f}}(\vec{g} \cdot \vec{\nabla}\,) = \vec{\nabla}(\vec{g} \cdot \underset{\blacktriangle}{\vec{f}}\,) - \vec{g} \cdot \vec{\nabla}\vec{f}\,, \end{aligned} \tag{13}$$

um schließlich

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{f} \cdot \vec{g}\,) &= \vec{\nabla}(\underset{\blacktriangle}{\vec{f}} \cdot \vec{g}\,) + \vec{\nabla}(\vec{f} \cdot \underset{\blacktriangle}{\vec{g}}\,) \\ &= \vec{f} \cdot \vec{\nabla}\vec{g} + \vec{g} \cdot \vec{\nabla}\vec{f} + \vec{f} \times (\vec{\nabla} \times \vec{g}\,) + \vec{g} \times (\vec{\nabla} \times \vec{f}\,) \end{aligned} \tag{14}$$

zu erhalten.

[2]Die Zeilen 1 bis 3 folgen unmittelbar aus der Linearität von Nabla sowie aus dem Distributivgesetz. Zeile 10 stellt eine Definition dar; 11 und 12 kann man durch nachrechnen zeigen, 13 mit der Graßmann-Identität.

Zeile 8

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) &= \vec{\nabla} \cdot (\underset{\blacktriangle}{\vec{f}} \times \vec{g}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{f} \times \underset{\blacktriangle}{\vec{g}}) = \vec{\nabla} \cdot (\underset{\blacktriangle}{\vec{f}} \times \vec{g}) - \vec{\nabla} \cdot (\underset{\blacktriangle}{\vec{g}} \times \vec{f}) \\
&= \vec{g} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) - \vec{f} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{g})
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Zeile 9

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\vec{f} \times \vec{g}) &= \vec{\nabla} \times (\underset{\blacktriangle}{\vec{f}} \times \vec{g}) + \vec{\nabla} \times (\vec{f} \times \underset{\blacktriangle}{\vec{g}}) \\
&= \underset{\blacktriangle}{\vec{f}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) - \vec{g}\,(\vec{\nabla} \cdot \underset{\blacktriangle}{\vec{f}}) + \vec{f}(\vec{\nabla} \cdot \underset{\blacktriangle}{\vec{g}}) - \underset{\blacktriangle}{\vec{g}}\,(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) \\
&= \vec{g} \cdot \vec{\nabla} \vec{f} - \vec{g} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} + \vec{f} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} - \vec{f} \cdot \vec{\nabla} \vec{g}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Hier wurden immer wieder die Beziehungen aus Abschnitt 2 benutzt. So ist z.B.

$$
\underset{\blacktriangle}{\vec{f}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) = (\vec{g} \cdot \vec{\nabla})\underset{\blacktriangle}{\vec{f}} = \vec{g} \cdot \vec{\nabla} \otimes \vec{f}\,,
$$

wobei der Term nach dem letzten Gleichheitszeichen nur eine andere Schreibweise für $\vec{g} \cdot \vec{\nabla} \vec{f}$ ist.

3.2 Die Produktregel „rückwärts“

In vielen Beispielen kann es vorkommen, dass man die Produktregel „rückwärts“ anwenden muss. Will man z.B. den Poynting-Satz herleiten so multipliziert man die Maxwell Rotorgleichung für $\vec{H}$ skalar mit $\vec{E}$,

$$
(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}\,. \tag{17}
$$

Jetzt muss man aus dem Term $(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E}$ irgendwie einen Term $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$ machen, um die Divergenz des Poyntingvektors in Gleichung (17) einzuführen. Man berechnet daher

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) &= \vec{\nabla} \cdot (\underset{\blacktriangle}{\vec{E}} \times \vec{H}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \underset{\blacktriangle}{\vec{H}}) \\
&= \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})\,,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

setzt (18) in (17) ein und erhält

$$
\vec{H} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{-\partial_t \vec{B}}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}\,. \tag{19}
$$

Umgestellt und über ein Volumen $\mathscr{V}$ integriert folgt mit dem Satz von Gauß schließlich

$$
-\int_{\partial \mathscr{V}} \vec{n} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \int_{\mathscr{V}} \left(\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{J} \cdot \vec{E}\right)\,. \tag{20}
$$

Bei vielen Prüfungsbeispielen soll ein Volumsintegral in ein Flächenintegral bzw. ein Flächen- in ein Kurvenintegral (und umgekehrt) umgewandelt werden. Auch hier ist diese Methode nützlich.