PRÜFUNG ELEKTRODYNAMIK

Mi 09.12.2009

Siehe TET Bsp 3,4

① Berechnen Sie die Ableitung des Skalarfeldes

$$f(\vec{r}) = K\cdot(3xy^3 + y^2z^2 - z^3x) \qquad K = \text{Konstant}$$

im Punkt $\vec{r}_0 = (\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - 2\vec{e}_z)\,\text{cm}$

in Richtung des Vektors

$$\vec{a} = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z$$

Lösung:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = (\partial_x \vec{e}_x + \partial_y \vec{e}_y + \partial_z \vec{e}_z)(K(3xy^3 + y^2z^2 - z^3x))$$

$$= K[(3y^3 - z^3)\vec{e}_x + (9xy^2 + 2yz^2)\vec{e}_y + (2zy^2 - 3z^2x)\vec{e}_z]$$

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}_0) = K[(81+8)\vec{e}_x + (81+24)\vec{e}_y + (-36-12)\vec{e}_z]\,\text{cm}^3$$

$x = 1$
$y = 3$
$z = -2$

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}_0) = K[89\vec{e}_x + 105\vec{e}_y - 48\vec{e}_z]\,\text{cm}^3$$

$$\vec{a} = a\vec{e}_a \Rightarrow \vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z)$$

$$\vec{e}_a \circ \vec{\nabla} f(\vec{r}_0) = \frac{K}{\sqrt{14}}[267 + 210 + 48] = K\frac{525}{\sqrt{14}} = \underline{\underline{140{,}3\, K\, \text{cm}^3}}$$

PRÜFUNG ELEKTRODYNAMIK Siehe TET Bsp 2

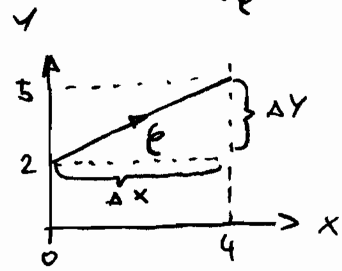
Mi: 09.12.2009

② Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{g}(\vec{r}) = x\vec{e_x} - 2y\vec{e_y}$$

in bezogenen kartesischen Koordinaten den Wert des Kurvenintegrals

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{g}(\vec{r}) \circ d\vec{r}$$ entlang des angegebenen Geradenstückes $\mathcal{C}$



Lösung: Geradengleichung erstellen:

$$y = kx + d \quad \text{mit } k = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{3}{4},\ d = 2$$

$$y = \frac{3}{4}x + 2$$

$$\Rightarrow \vec{g}(\vec{r}) = x\vec{e_x} - \left(\frac{3}{2}x + 4\right)\vec{e_y}$$

Vektor in X-Y-Ebene: $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y}$

Vektor entlang der Kurve: $\vec{r} = x\vec{e_x} + \left(\frac{3}{4}x + 2\right)\vec{e_y}$

Ableitung des Richtungsvektors: $\frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{e_x} + \frac{3}{4}\vec{e_y} \Rightarrow d\vec{r} = \left(\vec{e_x} + \frac{3}{4}\vec{e_y}\right)dx$

$\Rightarrow$ Integral berechnen: $$\int_0^4 \left[x\vec{e_x} - \left(\frac{3}{2}x + 4\right)\vec{e_y}\right] \circ \left[\vec{e_x} + \frac{3}{4}\vec{e_y}\right] dx$$

$$= \int_0^4 \left(x - \frac{9}{8}x - 3\right) dx = \int_0^4 \left(-\frac{1}{8}x - 3\right) dx = \left[-\frac{1}{8}\frac{x^2}{2} - 3x\right]\Bigg|_0^4$$

$$= -1 - 12 = \underline{\underline{-13}}$$

PRÜFUNG ELEKTRODYNAMIK   siehe TET S. 28

Mi 09. 12. 2009

③ Das Vektorpotential eines statischen magnetischen Punktdipols besitzt in Kugelkoordinaten bekanntlich die Form

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\sin\Theta}{r^2} \vec{e}_\alpha$$

Bestimmen Sie ein zugehöriges magnetisches Skalarpotential

<u>Lösung:</u>

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_m \qquad \vec{A} = A_\alpha(\Theta, r)\vec{e}_\alpha$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{e}_r \frac{\partial_\Theta(\sin(\Theta) A_\alpha)}{r\sin\Theta} - \vec{e}_\Theta \frac{\partial_r(r A_\alpha)}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{2\sin\Theta\cos\Theta}{r^3\sin\Theta}\vec{e}_r + \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{\sin\Theta}{r^3}\vec{e}_\Theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left[2\cos\Theta\,\vec{e}_r + \sin\Theta\,\vec{e}_\Theta\right] \qquad \text{mit } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}$$

$$\vec{H} = \frac{m}{4\pi r^3}\left[2\cos\Theta\,\vec{e}_r + \sin\Theta\,\vec{e}_\Theta\right] \qquad \vec{H} = H_r(r,\Theta)\vec{e}_r + H_\Theta(r,\Theta)\vec{e}_\Theta$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2\pi r^3}\cos\Theta\,\vec{e}_r + \frac{m}{4\pi r^3}\sin\Theta\,\vec{e}_\Theta \overset{!}{=} -\partial_r\varphi_m\vec{e}_r - \frac{1}{r}\partial_\Theta\varphi_m\vec{e}_\Theta$$

① $\frac{m}{2\pi r^3}\cos\Theta \overset{!}{=} -\partial_r\varphi_m$

② $\frac{m}{4\pi r^3}\sin\Theta \overset{!}{=} -\frac{1}{r}\partial_\Theta\varphi_m$

mit ①: $\varphi_m = -\int \frac{m}{2\pi r^3}\cos\Theta\,dr = \underline{\frac{m}{4\pi r^2}\cos\Theta + C(\Theta)}$

φ_m einsetzen in ②: $\partial_\Theta\varphi_m = -\frac{m}{4\pi r^2}\sin\Theta$

$$\partial_\Theta\left(\frac{m}{4\pi r^2}\cos\Theta + C(\Theta)\right) = -\frac{m}{4\pi r^2}\sin\Theta$$

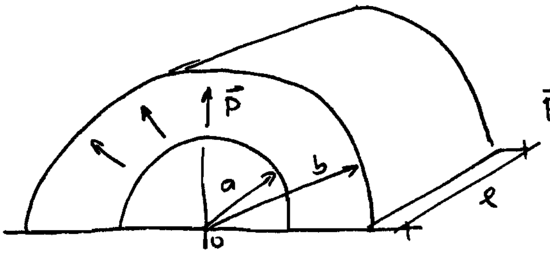
$$= -\frac{m}{4\pi r^2}\sin\Theta + C'(\Theta) = -\frac{m}{4\pi r^2}\sin\Theta \Rightarrow C'(\Theta) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C(\Theta) = 0}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi_m = \frac{m}{4\pi r^2}\cos\Theta}}$$

PRÜFUNG ELEKTRODYNAMIK

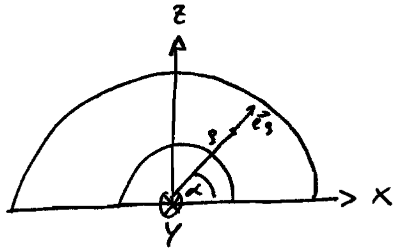
Mi 09.12.2009

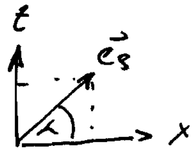
④



$\vec{P} = P_0 \vec{e}_r$

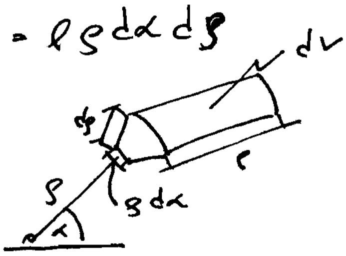
Ein halber dickwandiger Kreiszylinder der Länge ℓ ist radial stark mit $P = |\vec{P}| =$ konst elektrisch Polarisiert, sonst aber elektrisch nicht geladen. Berechnen Sie sein gesamtes el. Moment $\vec{p}$.

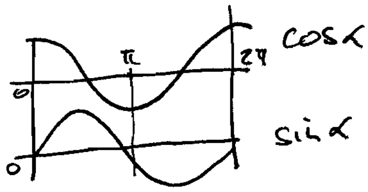




$\vec{e}_\rho = \cos\alpha \, \vec{e}_x + \sin\alpha \, \vec{e}_z$

$dV = \ell \rho \, d\alpha \, d\rho$





Lösung:

$$\vec{p} = \int_{V_\pi} \vec{P} \, dV$$

$$\vec{p} = \int_0^{\pi} \int_0^{b} P_0 (\cos\alpha \, \vec{e}_x + \sin\alpha \, \vec{e}_z) \ell \rho \, d\alpha \, d\rho$$

$$\vec{p} = \ell P_0 \int_0^{\pi} \int_a^{b} \rho \cos\alpha \, \vec{e}_x + \rho \sin\alpha \, \vec{e}_z \, d\rho \, d\alpha$$

$$= \ell P_0 \left[\frac{\rho^2}{2} \right] \Bigg|_a^b \left[\sin\alpha \, \vec{e}_x - \cos\alpha \, \vec{e}_z \right] \Bigg|_0^\pi$$

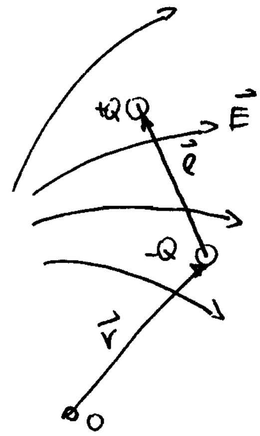
$$= \ell P_0 \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right] \left[0 \vec{e}_x + \vec{e}_z + 0 \vec{e}_x + \vec{e}_z \right]$$

$$\underline{\underline{\vec{p} = \ell P_0 [b^2 - a^2] \vec{e}_z}}$$

PRÜFUNG ELEKTRODYNAMIK
Mi 09.12.2009

siehe Hofmann S115ff.
„das elektromagnetische Feld"
(nur homogenes Feld)

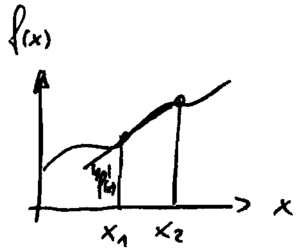
(5)



Finden Sie Ausdrücke für die resultierende Kraft $\vec{F}$ und das Drehmoment $\vec{T}$ die ein Punktdipol mit dem elektrischen Moment $\vec{p}$ in einem inhomogenen el. Feld $\vec{E}(\vec{r})$ erfährt.
Geben Sie dazu vom Modell des ungleichnamigen Ladungspaares und dem Begriff der räumlichen Ableitung (lineare Approximation) aus.

Lösung:

Taylorreihe, abgebrochen:



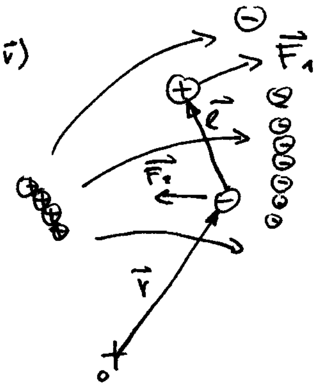
$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + \dots$ => vernachlässigen

=> wird verwendet, um die Kraft an Q+ zu bestimmen.

i) Kraft:

$$\vec{F}_{ges} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = Q\,\vec{E}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\vec{E}\,Q\vec{\ell} - Q\,\vec{E}(\vec{r})$$

$$= \underbrace{Q\vec{\ell}}_{=\vec{p}}\,\vec{\nabla}\vec{E} = \underline{\underline{\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\vec{E}}}$$

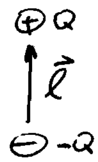


mit $\vec{F} = Q\vec{E}$

$\vec{F}_1 = +Q[\vec{E}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\vec{E}\,\vec{\ell}]$

$\vec{F}_2 = -Q[\vec{E}(\vec{r})]$

Dipol:



$\vec{p} = Q\vec{\ell}$

mit
$$\begin{bmatrix} \vec{p} = p_x\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y + p_z\vec{e}_z \\ \vec{\nabla} = \partial_x\vec{e}_x + \partial_y\vec{e}_y + \partial_z\vec{e}_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}\circ\vec{\nabla} = p_x\partial_x + p_y\partial_y + p_z\partial_z$$

und $\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z$

$$\underline{\underline{\vec{F} = [p_x\partial_x + p_y\partial_y + p_z\partial_z][E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z]}} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$$

$$F_x = p_x\partial_x E_x + p_y\partial_y E_x + p_z\partial_z E_x$$
$$F_y = p_x\partial_x E_y + p_y\partial_y E_y + p_z\partial_z E_y$$
$$F_z = p_x\partial_x E_z + p_y\partial_y E_z + p_z\partial_z E_z$$

ii) Drehmoment:

$$\vec{T} = \vec{p}\times\vec{E}(\vec{r}) + \vec{r}\times\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\vec{E}(\vec{r}) = \underline{\underline{\vec{p}\times\vec{E} + \vec{r}\times\vec{F}}}$$

PRÜFUNG ELEKTRODYNAMIK
Mi 09.12.2009

(6) Wenn eine Funktion $\varphi(x,y,z)$ die Laplacegleichung erfüllt so genügt auch eine Funktion $\overline{\varphi}(x,y,z)$ definiert durch

$$\overline{\varphi}(x,y,z) = \frac{a}{r}\,\varphi\left(\left(\frac{a}{r}\right)^2 x,\ \left(\frac{a}{r}\right)^2 y,\ \left(\frac{a}{r}\right)^2 z\right) \quad \text{mit } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

und einer konstanten Länge a für $r \neq 0$ der Laplacegleichung.
(Inversion an einer Kugel mit dem Radius a)
Erzeugen Sie auf diese Weise aus dem zu einem Homogenfeld gehörenden elektrostatischen Potential $\varphi = -E_0 z$ ein neues Potential $\overline{\varphi}$
Wie läßt sich das zu $\overline{\varphi}$ gehörende elektrische Feld herstellen?
Hinweis: Kugelkoordinaten

PRÜFUNG ELEKTRODYNAMIK

Mi 09. 12. 2009

(7) Auf einem dünnen, beidseitig sehr langen Kunststoffstreifen (ε, γ) der Breite b und der Dicke δ wird zum Zeitpunkt $t=0$ eine elektrische Linienladung mit der Dichte τ_0 aufgebracht.

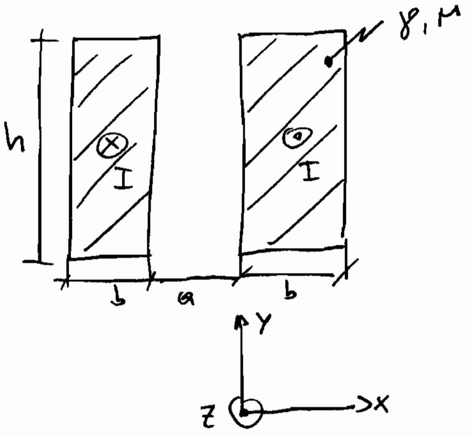
Berechnen Sie für den nachfolgenden Relaxationsprozess die Ladungs und Stromverteilung im Streifen.

<u>Lösung</u>:

PRÜFUNG ELEKTRODYNAMIK
Mi 09.12.2009

siehe TET S.59

(8) Verlustleistung in einer Schienenleitung

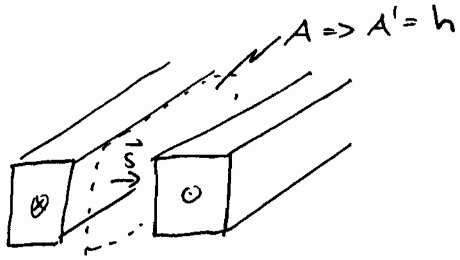


Längenbezogene Verlustleistung $P' = ?$

$$\hat{H}(0,t) = \hat{H}_0 \cos(\omega t)\, \vec{e_y}$$

$$\vec{J}(x,t) = -\hat{H}_0 \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \pi/4)\, \vec{e_z}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \gamma \omega}}$$



$$\vec{e_z} \times \vec{e_y} = -\vec{e_x}$$

Lösung:

Poyntingvektor für den Halbraum zwischen den beiden Leitern

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\gamma} \vec{J} \times \vec{H} = \hat{H}_0^2 \frac{\sqrt{2}}{\delta \gamma} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \pi/4) \cos(\omega t)\, \vec{e_x}$$

mit $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$

$$\vec{S} = \hat{H}_0^2 \frac{\sqrt{2}}{\delta \gamma} e^{-x/\delta} \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{x}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \vec{e_x}$$

$$\vec{S} = \vec{S}(x,t)$$

$$\vec{S}(0,t) = \hat{H}_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}\delta\gamma}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\right] \vec{e_x} \quad \text{... Augenblickswert}$$

der Mittelwert (zeitlich) ergibt sich zu

$$\bar{S}(0) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{H}_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}\delta\gamma}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\right] dt \Rightarrow \int_0^T \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{4}\right) dt = 0$$

$$\int_0^T 1\, dt = T$$

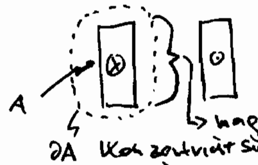
$$\bar{S}(0) = \hat{H}_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}\delta\gamma} \underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \underline{\underline{\hat{H}_0^2 \frac{1}{2\delta\gamma}}}$$

Der längenbezogene zeitliche Mittelwert der Verlustleistung:

$$P' = \int_0^h \bar{S}(0)\, dy = \bar{S}(0)\, h = \hat{H}_0^2 \frac{h}{2\delta\gamma}$$

Durchflutungssatz:

$$V(\partial A) = I(A)$$



Konzentriert sich auf den Innenraum (näherungsweise)

$$\Rightarrow V(h) = \hat{I}$$

$$\hat{H}_0 h = \hat{I} = \sqrt{2} I$$

$$\underline{\underline{\hat{H}_0 = \frac{\sqrt{2} I}{h}}}$$

Gesamte längenbezogene Verlustleistung: (für beide Leiter)

$$P'_{ges} = 2 P' = \underline{\underline{\frac{\hat{H}_0^2 h}{\delta \gamma}}}$$

& mit $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma \omega \mu}}$ $\quad P'_{ges} = \hat{H}_0^2 \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}}\, h$

& mit $\hat{H}_0 = \frac{\sqrt{2} I}{h}$ } Schienenstrom

$$P'_{ges} = \frac{2 I^2}{h^2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}}\, h = \underline{\underline{I^2 \frac{2}{h} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}}}}$$

PRÜFUNG ELEKTRODYNAMIK
Mi 09.12.2009

9) Bahnkurve eines Punktes

$$\vec{r}(t) = \mathrm{Re}\left[\vec{r}_0\, e^{j\omega t}\right] \qquad \vec{r}_0 = a_1 \vec{e_x} + j a_2 \vec{e_y}$$

i) Bahnkurve bestimmen $\quad x(t), y(t) = ?$ $\qquad$ ii) Zeichnen & Durchlaufsinn

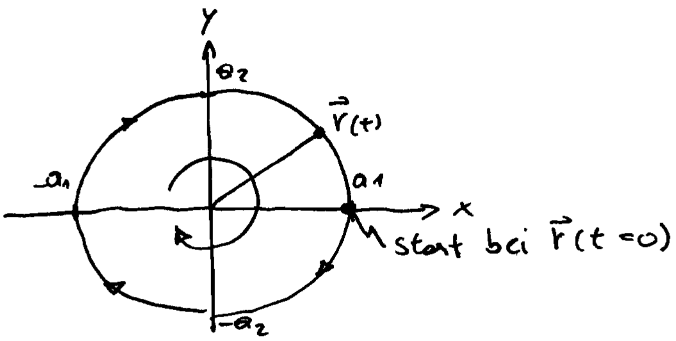
Lösung

i) $\vec{r}(t) = \mathrm{Re}\left[a_1 e^{j\omega t} \vec{e_x} + j a_2 e^{j\omega t} \vec{e_y}\right]$

$= \mathrm{Re}\left[a_1 (\cos\omega t + j\sin\omega t)\vec{e_x} + j a_2 (\cos\omega t + j\sin\omega t)\vec{e_y}\right]$

$\Rightarrow \vec{r}(t) = \underbrace{a_1 \cos\omega t}_{x(t)}\, \vec{e_x} - \underbrace{a_2 \sin\omega t}_{y(t)}\, \vec{e_y}$

ii) gewählt: $a_1 = a_2$ $\quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t)$ beschreibt eine Kreisbahn im Uhrzeigersinn.



PRÜFUNG ELEKTRODYNAMIK
Mi 09.12.2009

(10) Energiebilanz mit Leitungsgleichungen

① $\partial_z U + L' \partial_t I + R' I = 0$
② $\partial_z I + C' \partial_t U + G' U = 0$

C', L' .. konstant

Ermitteln Sie W', Q und P_v' für die Form

③ $\partial_t W' + \partial_z Q + P_v' = 0$

Lösung:

① mit I multiplizieren: $I \partial_z U + L' I \partial_t I + R' I^2 = 0$
② mit U multiplizieren: $U \partial_z I + C' U \partial_t U + G' U^2 = 0$
} Addieren

$$\underbrace{I \partial_z U + U \partial_z I}_{\text{mit Produktregel}} + L' \underbrace{I \partial_t I}_{= \partial_t\left(\frac{I^2}{2}\right)^*} + C' \underbrace{U \partial_t U}_{= \partial_t\left(\frac{U^2}{2}\right)} + R' I^2 + G' U^2 = 0$$

$\partial_z(UI) = U \partial_z I + I \partial_z U$

* Proof:
$\partial_t\left(\frac{I^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \partial_t I^2 =$
$= \frac{1}{2} 2 I \underbrace{\partial_t I}_{\text{innere Ableitung}}$ ✓

$$= \partial_z(UI) + \partial_t\left[\frac{L' I^2}{2} + \frac{C' U^2}{2}\right] + R' I^2 + G' U^2 = 0$$

vergleich mit ③

$$W' = \frac{1}{2}\left[L' I^2 + C' U^2\right]$$

Energiebelag (Summe der el. & mag. gespeicherten Energie)

$\hookrightarrow W_m = \frac{L I^2}{2}$ $\quad W_e = \frac{C U^2}{2}$
(im Feld)

$$Q = U I$$

Energiefluss

$$P_v' = R' I^2 + G' U^2$$

■ Verlustleistungsbelag