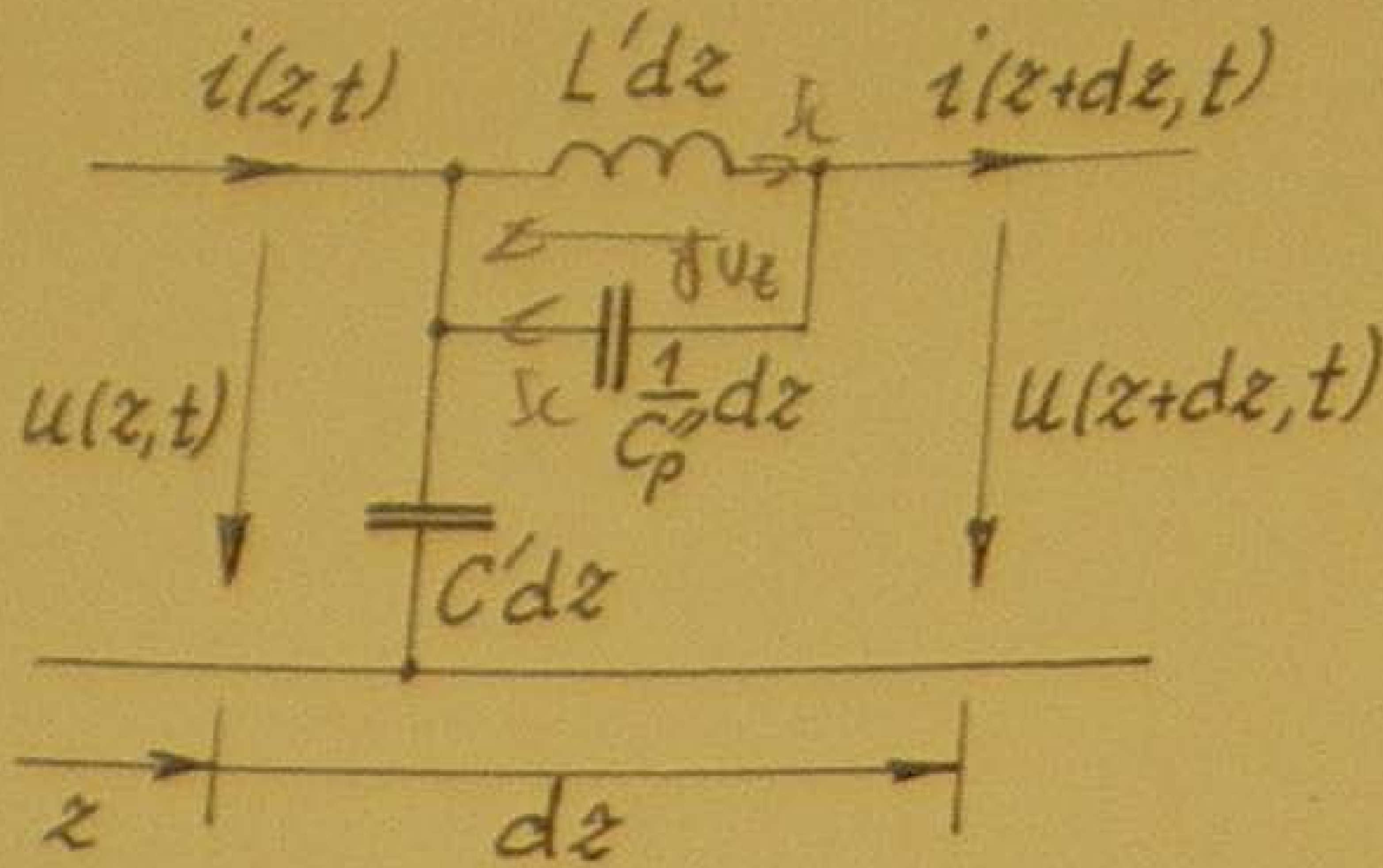
Berechnen Sie die Ableitung des Skalarfeldes

$$G(\vec{r}) = K \cdot \left(x^3 + 4x^2 y + 2z^3 \right)$$

im Punkt $(x, y, z) = (1, -3, 2)$ in Richtung

$$\vec{n} = \left(\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z \right) / \sqrt{6}$$



Zur grundsätzlichen Untersuchung rascher Vorgänge an ausgedehnten Spulen erweist sich häufig ein Leitungsmodell mit dem angegebenen Ersatzschaltbild eines Leitungselements als brauchbar. L' und C' sind dabei die üblichen Beläge der Induktivität *). C_p'' ist eine kapazitive Ersatzgröße der Dimension Kapazität x Länge (modelliert z.B. die kapazitive Kopplung benachbarter Windungen).

Stellen Sie für dieses Modell als Erweiterung der üblichen Leitungsgleichungen die beiden gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für $u(z,t)$ und $i(z,t)$ auf.

*) und der Kapazität

2

Angenommen, f und g sind zwei Skalarfelder im dreidimensionalen euklidischen Raum. Daraus lässt sich ein Vektorfeld

$$\vec{v} = (\vec{\nabla} f) \times (\vec{\nabla} g)$$

bestimmen, dessen Vektorlinien durch die Schnittkurven der beiden Flächenscharen $f = \text{const}$ und $g = \text{const}$ gebildet werden. f und g werden dann die CLEBSCH-Potentiale von $\vec{v}$ genannt.
Berechnen Sie die Quellendichte von $\vec{v}$.

3

In einem räumlichen Bereich V, der kein magnetisierbares Material enthält, ist mit Bezug auf Kreiszylinderkoordinaten (ρ, φ, z) das (quasi-) stationäre magnetische Vektorpotential

$$\vec{A} = \underbrace{a\varphi}_{A_\rho}\,\vec{e}_\rho + \underbrace{(b + c\rho^2)}_{A_z}\,\vec{e}_z$$

mit Konstanten a, b und c bekannt. Berechnen Sie die zugehörige Stromverteilung im Inneren von V:

4

Zur Beschreibung linearer "Nachwirkungseffekte" haben Volterra und Boltzmann als Erweiterung der einfachen Materialgleichung $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ Beziehungen der Art

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \int_0^\infty g(t')\vec{E}(\vec{r},t-t')\,dt'\right]$$

Faltung von $g^{(1)} *$

vorgeschlagen, worin $g(t)$ eine geeignet gewählte "Gedächtnisfunktion" mit $g(t) = 0$ für $t < 0$ darstellt. Wie sieht solch eine Beziehung im Frequenzbereich aus?

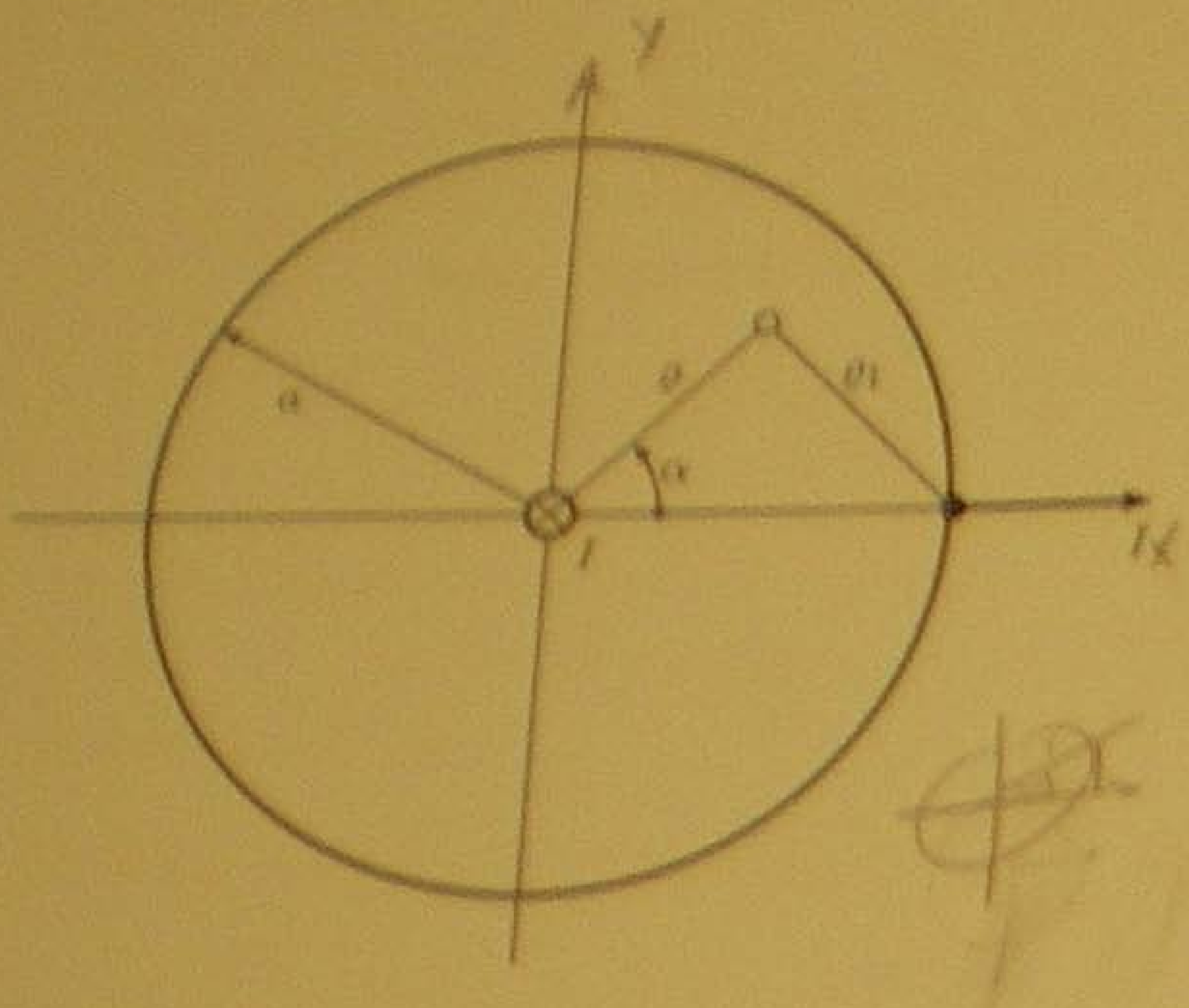
Hinweis: Fourier-Transformation $\underline{\vec{D}}(\vec{r}; j\omega) = \mathcal{F}\left[\vec{D}(\vec{r},t)\right]$, etc.

Welche Beziehung besteht zwischen dem Poynting-Vektor $\vec{S}$ bezüglich des Laborsystems und dem Poynting-Vektor $\vec{S}'$ bezüglich eines anderen Inertialsystems, das sich gegenüber dem Laborsystem mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, wenn Sie für die Transformation die Gleichungen

(i) des dominant elektrischen Feldsystems,

(ii) des dominant magnetischen Feldsystems

verwenden?

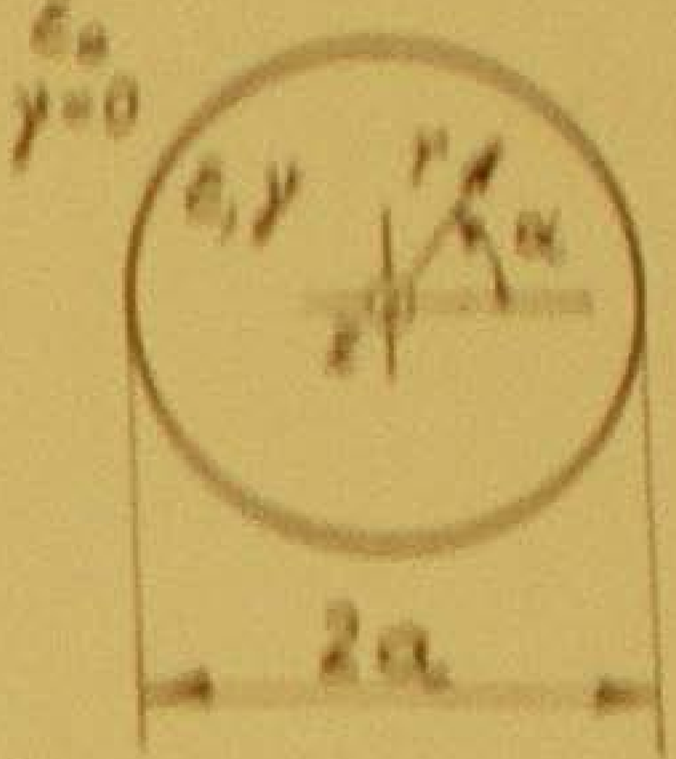


Einer dünnen, elektrisch leitfähigen Scheibe mit dem Radius a, der Dicke d und der Leitfähigkeit γ wird im Mittelpunkt ein elektrischen Strom der Stärke I zugeführt und in einem Randpunkt wieder abgezogen. Die Analyse liefert für das Skalarpotential den Ausdruck

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\gamma d} \ln\left(\frac{\varrho_1^2}{4a\varrho}\right).$$

(i) Stellen Sie das Skalarpotential am Rand ($\varrho = a$) als Funktion des Winkels α dar.

(ii) Berechnen Sie die zur elektrischen Feldstärke proportionale Stromdichte am Rand (Vektor!) und skizzieren Sie deren Verlauf als Funktion von α.



Ein langer, kreiszylindrischer Körper mit der Permittivität ε und der (kleinen) Konduktivität γ befindet sich im sonst leeren Raum und ist zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Raumladungsdichte ϱ_0 gleichförmig geladen. Berechnen Sie für den nachfolgenden Relaxationsvorgang

(i) die Stromdichte $\vec{J}(r,t)$ für $r < a$,

(ii) die sich für $t \to \infty$ einstellende Ladungsverteilung.

Verwenden Sie für die Radialkoordinate (Abstand von der Zylinderachse) das Formelzeichen r anstelle des üblichen ϱ , um Verwechslungen mit der Ladungsdichte zu vermeiden.

Das ebene, quasistationäre Magnetfeld in einem linear homogen isotropen Körper (Permeabilität μ, Konduktivität γ)werde durch das Vektorpotential

$$\vec{A} = A(x, y, t)\vec{e}_z$$

beschrieben. Das Skalarpotential des elektrischen Feldes kann unterdrückt werden.

Drücken Sie den Poynting-Vektor durch die räumlichen und zeitlichen Ableitungen von A aus. Tab 1.3 Zl 3:

9

Die elektrische Komponente einer ebenen elektromagnetischen Sinuswelle, die sich in einem (schwach) elektrisch leitenden Medium mit konstanten Werten der Permeabilität μ, der Permittivität ε und der Konduktivität σ ausbreitet, lässt sich in der Form

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\underline{\vec{\mathcal{E}}}e^{\mathrm{j}\omega t - \gamma\vec{k}\cdot\vec{r}}\right]$$

mit

$$\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta,\ \alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+(\omega T_R)^{-2}}-1\right]},\ \beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+(\omega T_R)^{-2}}+1\right]},$$

$$c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon},\ T_R = \varepsilon/\sigma$$

darstellen.

(i) Geben Sie Näherungsausdrücke für den Dämpfungskoeffizienten α und den Phasenkoeffizienten β für relativ große Frequenzen, d.h. große aber endliche Werte von ωT_R an.

$\omega T_R \gg$ $\quad \frac{1}{\omega T_R} \rightarrow \ll 1$

(ii) Bestimmen Sie in der gleichen Näherung die Phasengeschwindigkeit und die Gruppengeschwindigkeit.

$\rightarrow c_{ph} = \frac{\omega}{\beta} \qquad c_{gr} = \frac{\delta\omega}{\delta\beta}$

Hinweis: $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \quad$ für $\quad |x| \ll 1$.