Elektrodynamik, 24. 09. 2003

1) Sei V ein räumlicher Bereich mit der Hülle dV, $\vec{F}$ und $\vec{G}$ seien zwei hinreichend glatte Vektorfelder. Formen Sie das Hüllenintegral

$$\int_{\partial V} \vec{n} \cdot [\vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) - \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})] dA$$

In ein Volumenintegral über V um. Die entstehende Gleichung ist eine vektorielle Verallgemeinerung der zweiten Green-Identität.

2) Drücken Sie das in ebenen Polarkoordinaten (ρ,α) gegeben Vektorfeld

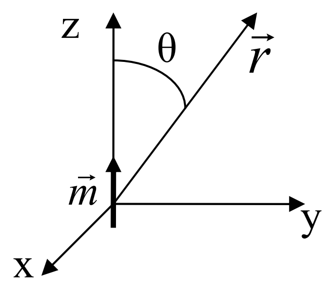
$$\vec{F} = K \cdot [2\rho \cos(\alpha) \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot \vec{e}_\alpha], K = const.$$

in kartesischen Koordinaten (x,y) aus.

3) ein statischer magnetischer Dipol erzeugt im sonst leeren Raum bekanntlich eine magnetische Flussdichte, die sich bei passender Koordinatenwahl durch

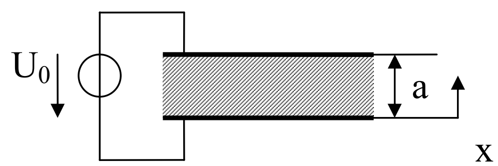
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \cdot \frac{3\cos(\theta) \cdot \vec{e}_r - \vec{e}_z}{r^3}$$

darstellen lässt. Zusätzlich herrsche ein homogenes elektrisches Feld mit der Feldstärke $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_z$.



(i) Geben Sie das Feld des Poynting-Vektors $\vec{S}$ an.
(ii) Wie sehen die zu $\vec{S}$ gehörenden Vektorlinien aus?
(iii) Berechnen Sie die Quellendichte und Wirbeldichte von $\vec{S}$.

4)



Eine beidseitig metallisch beschichtete, isolierende, im inneren ladungsfreie Schicht besitzt die ortsabhängige Permittivität

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 \cdot \frac{2a}{a+x}.$$

Zwischen den Metallschichten liegt die elektrische Spannung U_0.

(i) Bestimmen sie die zum entstehenden Polarisationsfeld gehörende fiktive Ladungsverteilung.
(ii) Berechnen Sie die flächenbezogene Kapazität.

5) Für die Untersuchung des elektrostatischen Feldes in der Umgebung des Randes einer Metallplattenanordnung wird das rechts skizzierte Modell der Doppelschicht verwendet. Setzen Sie Unabhängigkeit von der z-Koordinate voraus und berechnen Sie (am besten in Kreiszylinderkoordinaten) das elektrostatische Skalarpotential und die elektrische Feldstärke.

[Zeichnung fehlt leider!]

6) Berechnen Sie für das eben magnetische Feld mit der Flussdichte

$$\vec{B} = \frac{B_0}{a} \cdot [(2x - y) \cdot \vec{e}_x - (x + 2y) \cdot \vec{e}_y]$$

ein Maxwell-geeichtes Vektorpotential.

7) Eine stromdurchflossene Kreisschleife, angenähert durch einen Linienleiter, erzeugt in ihrer Ebene (z = 0) das magnetische Vektorpotential

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot f(\frac{\rho}{a}) \cdot \vec{e}_\alpha, \quad 0 \le \rho \le a$$

mit einer Funktion f, die durch das Integral

$$f(\zeta) = -\int \frac{\cos(\alpha) d\alpha}{\sqrt{1 + \zeta^2 + 2\zeta\cos(\alpha)}}, \quad 0 \le \zeta < 1$$

definiert ist und die sich an den Intervallrändern durch

$$f(\zeta) \approx \frac{\pi}{2}\zeta, \quad \text{für } 0 \le \zeta << 1$$

$$f(\zeta) \approx \ln(\frac{8}{1-\zeta}) - 2, \quad \text{für } 0 < 1 - \zeta << 1$$

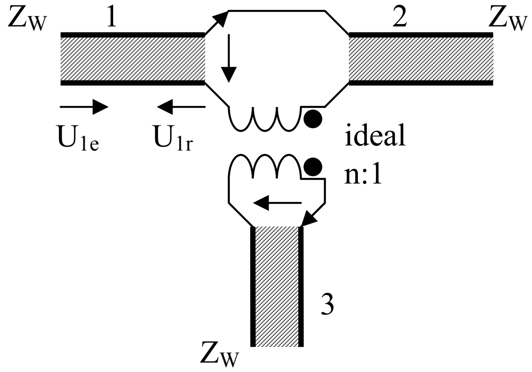
approximieren lässt.
Berechnen Sie damit näherungsweise die (äußere) Induktivität solch einer Kreisschleife, die von einem dünnen Draht mit dem Durchmesser d << 2a gebildet wird.

8) Zeitlich sinusförmig veränderliche elektromagnetische Felderlassen sich bekanntlich in der Form

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t}], \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}[\vec{H}(\vec{r}) e^{j\omega t}]$$

mit komplexen Amplitudenvektoren $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$ darstellen. Zeigen sie, dass dann der zeitliche Mittelwert $<\vec{S}>$ des Poynting-Vektors als Realteil eines komplexen Vektors $\vec{S}(\vec{r})$ angegeben werden kann. Wie definieren Sie diesen komplexen Poynting-Vektor?

9)



Im Zuge einer verlustfreien Leitung mit der Wellenimpedanz Z_W wird über einen idealen Transformator eine weitere Leitung, ebenfalls mit der Wellenimpedanz Z_W, angekoppelt. Auf den Leitungsteil 1 fällt ein bekannter Spannungsimpuls U_1e ein. Bestimmen sie den dann in den Abzweig 3 übertragenen Spannungsimpuls U_3 unter der Voraussetzung, dass dieser Leitungsteil, wie auch der Leitungsteil 2, reflexionsfrei, d.h. mit Z_W abgeschlossen ist.

10) Zur grundsätzlichen Untersuchung rascher Vorgänge an ausgedehnten Spulen erweist sich häufig ein Leitungsmodell mit den angegebenen Ersatzschaltbild eines Leitungselements als brauchbar. L' und C' sind dabei die üblichen Beläge der Induktivität und der Kapazität. Cp'' ist eine kapazitive Ersatzgröße der Dimension Kapazität x Länge (modelliert z.B. die kapazitive Kopplung benachbarter Windungen).
Stellen Sie für dieses Modell als Erweiterung der üblichen Leitungsgleichungen die beiden gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für u(z,t) und i(z,t) auf.