EM-Feld im engeren Sinne

Strom-Ladungs-Feld

Theoretische Elektrotechnik 2 Mündlich

$\boxed{\Phi(\partial A) = -\Phi(A),\ \Phi(\partial V) = 0}$ $\boxed{I(\partial V) = -\dot{Q}(V),\ V(\partial A) = I(A) + \dot{\Psi}(A),\ \Psi(\partial V) = Q(V)}$

1. Das elektromagnetische Feld im engeren Sinn
2. Das Strom Ladungs Feld
3. polarisierbare, magnetisierbare Stoffe; wahre, fiktive und effektive Ladungen und Ströme
4. Elektromagnetische Felder in Systemen mit Geschwindigkeit v<<c0
5. Elektrostatik und stationäres el. Strömungsfeld
6. Elektrostatik und Quasi-Elektrostatik
7. Randwertprobleme
8. Stationäre magnetische Felder
9. Spezielle stationäre Magnetfelder

10. Elektrostatische Potentiale (Skalarpotential φ; Vektorpotential V)
11. Elektrodynamische Potentiale (Eichtransformationen)
12. Wellengleichung (Grundlösung des d'Alembert Operators, partikuläre Lösung)
13. Hertz Dipol
14. Typen von Wellen (freie Welle, geführte Welle, TEM) ?

15. Verlustfreie Doppelleitung
16. Verlustbehaftete Doppelleitung
17. Bullard Gleichung
18. Relaxationsgleichung
19. Poynting Satz
20. Orientierungen (innere äußere, konsistente Orient. Von Bereichen und deren Rändern)
21. Koordinaten (allgemein, 3 Koordinatensysteme, Koordinatenlinien und –flächen)
22. Bilanzgleichungen für Energie und Impuls (global, lokal)
23. Diffusion magnetischer Felder (Sprung, Sinusform)
24. Zweidimensionale Lösung der Laplacegleichung in kartesischen Koordinaten

ZUSATZ: Satz von Gauß und Stokes
Tensoren
~~Leitungsgleichungen~~ Zweitorgleichungen

25 Holomorphe Funktionen

BEISPIELE

Ersatzschaltbild; Uq,Z1
$M = |M| * e_\alpha$
Wellengleichung
$F = p * \nabla * E$
$A = \mu 0 * I * \rho / (4 * a)$; $\phi = 2\pi a * A$; $L = \phi / I$
Poynting Satz für dominant mag. Feldsystem

Das elektromagnetische Feld im engeren Sinn: $\vec{B}, \vec{E}$

1.1) formale Eigenschaften (global, lokal)

i) Was versteht man unter einer el. Spannungsverteilung?

- [illegible] mag. Flussdichte.
- lineare Zuordnung
- globale Eigenschaften
- Integraldarstellung
- lokale Eigenschaften

(7)

Unter dem el. mag. Feld im engeren Sinn verstehen wir irgendwelche räumliche Verteilungen el. Spannungen u. mag. Flüsse dh. zu jedem Zeitpunkt wird jeder innen orientierten Kurve $\mathcal{C}$ ein Wert $U(\mathcal{C})$ der elektrischen Spannung und jeder innen orientierten Fläche $\mathcal{A}$ ein Wert $\Phi(\mathcal{A})$ des mag. Flusses zugeordnet.

Die Zuordnung ist linear, $U(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) = U(\mathcal{C}_1) + U(\mathcal{C}_2)$ $\quad U(-\mathcal{C}) = -U(\mathcal{C})$ (innen orientierte Kurve)

Additivität $\quad \Phi(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \Phi(\mathcal{A}_1) + \Phi(\mathcal{A}_2)$ $\quad \Phi(-\mathcal{A}) = -\Phi(\mathcal{A})$ (innen orientierte Fläche)

[[illegible] $\in \mathbb{N}$]

Zwischen den beiden Verteilungen besteht eine dynamische Kopplung ausgedrückt im Induktionsgesetz. $U(\partial\mathcal{A}) = -\dot{\Phi}(\mathcal{A})$ (konsistent orient. Rand; innen orientierte Fläche)

mag. Flußverteilungen sind stets geschlossen. dh. Satz vom mag. Hüllenfluß: $\Phi(\partial\mathcal{V}) = 0$

Integraldarstellungen: $\quad U(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s}\cdot\vec{E}\, ds \qquad \Phi(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{B}\, dA$

$\vec{s}$... Einstangentenvektor an die Kurve $\mathcal{C}$

$\vec{n}$... Einsnormalenvektor der Fläche $\mathcal{A}$ deren Orientierung rechtswendig zugeordnet

lokale Eigenschaften:

- $$U(\partial\mathcal{A}) + \dot{\Phi}(\mathcal{A}) = \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s}\cdot\vec{E}\, ds + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{B}\, dA = \int_{\mathcal{A}'} \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B})\, dA + \int_{\mathcal{C}'} \vec{s}\cdot [\![\vec{E}]\!]\, ds = 0$$

  mit Satz von Stokes

  Gleichung ist nur dann für alle Flächen $\mathcal{A}$ und für alle Schnittkurven $\mathcal{C}'$ von $\mathcal{A}$ erfüllt, wenn Integrand identisch null

  $\vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B}) = 0 \qquad \vec{s}\cdot[\![\vec{E}]\!] = 0 \qquad$ für beliebige $\vec{n}$ und beliebige $\vec{s}$ an $\mathcal{C}$

  $\Rightarrow \underline{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}}$ (Vorraussetzung: lokale Differenzierbarkeit) und $\underline{\vec{n}\times[\![\vec{E}]\!] = \vec{0}}$ (an Sprungflächen)

- $$\Phi(\partial\mathcal{V}) = 0 = \int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{B}\, dA = \int_{\mathcal{V}'} \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV + \int_{\mathcal{C}'} \vec{n}\cdot[\![\vec{B}]\!]\, dA = 0$$

  Gleichung nur dann für alle ~~Flächen $\mathcal{A}$~~ Volumina $\mathcal{V}$ und alle Schnittkurven $\mathcal{C}'$ von $\mathcal{V}$ erfüllt, wenn Integrand identisch null

  $\underline{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}$ (Vorraussetzung: lokale Differenzierbarkeit) und $\underline{\vec{n}\cdot[\![\vec{B}]\!] = \vec{0}}$ (an Sprungflächen)

② Das Strom-Ladungs-Feld: $\vec{H}, \vec{D}$

ii) formale Eigenschaften (global, lokal)

i) Was versteht man unter einer el. Stromverteilung

transversal

---

i) Unter dem Strom-Ladungsfeld verstehen wir irgendwelche räumliche Verteilungen el. Ströme und el. Ladungen.
dh zu jedem Zeitpunkt wird jeder transversal orientierten Fläche $\mathcal{A}$ ein Wert $I(\mathcal{A})$ der elektrischen Stromstärke und jedem transversal orientierten Volumen $\mathcal{V}$ ein Wert $Q(\mathcal{V})$ der elektrischen Ladung zugeteilt.

ii) Die Zuordnung ist linear: $I(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2) = I(\mathcal{A}_1) + I(\mathcal{A}_2)$ $\qquad I(-\mathcal{A}) = -I(\mathcal{A})$

$Q(\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2) = Q(\mathcal{V}_1) + Q(\mathcal{V}_2)$ $\qquad Q(-\mathcal{V}) = -Q(\mathcal{V})$

fundamentale Eigenschaft: Erhaltung der elektrischen Ladung: $\boxed{I(\partial\mathcal{V}) = -\dot{Q}(\mathcal{V})}$ transversal orientiertes Volumen

konsistent orientierter Rand

Integraldarstellung mit Berücksichtigung flächenhafter Verteilungen von Strömen $\vec{K}$ und Ladungen σ

$$I(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}'} \vec{n}\cdot\vec{j}\,dA + \int_{\varphi'} (\vec{s}\times\vec{n})\cdot\vec{K}\,ds \qquad Q(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}'} \rho\,dV + \int_{\varphi'} \sigma\,dA$$

$\mathcal{V}' = \mathcal{V}-\varphi'$ $\qquad \varphi'$: in $\mathcal{V}$ liegender Teil von φ

lokale Eigenschaften (bei Nichtberücksichtigung der Flächenströme)

$$I(\partial\mathcal{V}) + \dot{Q}(\mathcal{V}) = \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n}\cdot\vec{j}\,dA + \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}'}\rho\,dV + \frac{d}{dt}\int_{\varphi'}\sigma\,dA = \int_{\mathcal{V}'}(\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \partial_t\rho)\,dV + \int_{\varphi'}(\vec{n}\cdot[\![\vec{j}]\!] + \partial_t\sigma)\,dA = 0$$

mit Satz von Gauß

Gleichung ist nur dann für alle $\mathcal{V}$ und für alle Schnittkurven φ' von $\mathcal{V}$ erfüllt, wenn Integrand identisch null

$$\underline{\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\partial_t\rho} \qquad \underline{\vec{n}\cdot[\![\vec{j}]\!] = -\partial_t\sigma} \qquad \text{„Kontinuitätsgleichung" der el. Ladung}$$

---

i) Unter dem Strom Ladungsfeld verstehen wir irgendwelche räumliche Verteilungen magnetischer Spannungen V und el. Flüsse Ψ
dh zu jedem Zeitpunkt wird jeder transversal orientierten Kurve $\mathcal{C}$ ein Wert $V(\mathcal{C})$ der magnetischen Spannung und jeder transversal orientierten Fläche $\mathcal{A}$ ein Wert $\Psi(\mathcal{A})$ des elektrischen Flusses zugeordnet.

ii) Die Zuordnung ist linear: $V(\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2) = V(\mathcal{C}_1) + V(\mathcal{C}_2)$ $\qquad V(-\mathcal{C}) = -V(\mathcal{C})$

$\Psi(\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2) = \Psi(\mathcal{A}_1) + \Psi(\mathcal{A}_2)$ $\qquad \Psi(-\mathcal{A}) = -\Psi(\mathcal{A})$

Satz der Erhaltung der el. Ladung

Ampere-Maxwell-Satz: $V(\partial\mathcal{A}) = I(\mathcal{A}) + \dot{\Psi}(\mathcal{A})$ $\quad$ mit $\partial\mathcal{V} = \mathcal{A}$ $\Rightarrow V(\partial\partial\mathcal{V}) = I(\partial\mathcal{V}) + \dot{\Psi}(\partial\mathcal{V}) \Rightarrow \underline{0 = I(\partial\mathcal{V}) + \dot{Q}(\mathcal{V})}$

Satz vom elektrischen Hüllenfluß: $\Psi(\partial\mathcal{V}) = Q(\mathcal{V})$ $\quad$ [mit $\mathcal{A} = \partial\mathcal{V} \Rightarrow \partial\mathcal{A} = \partial\partial\mathcal{V} = 0 \Rightarrow V(\partial\mathcal{A}) = V(0) = 0 \Rightarrow 0 = I(\partial\mathcal{V}) + \dot{Q}(\mathcal{V})$]

Integraldarstellung $\quad V(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s}\cdot\vec{H}\,ds \qquad \Psi(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{D}\,dA$

lokale Eigenschaften

- $$V(\partial\mathcal{A}) - I(\mathcal{A}) - \dot{\Psi}(\mathcal{A}) = \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{s}\cdot\vec{H}\,ds - \int_{\mathcal{A}'}\vec{n}\cdot\vec{j}\,dA - \int_{\varphi'}(\vec{s}\times\vec{n})\cdot\vec{K}\,ds - \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{A}}\vec{n}\cdot\vec{D}\,dA$$
$$= \int_{\mathcal{A}'}\vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H} - \vec{j} - \partial_t\vec{D})\,dA - \int_{\varphi'}\vec{s}\cdot([\![\vec{H}]\!] - \vec{K}\times\vec{n})\,ds = 0$$
- $$\Psi(\partial\mathcal{V}) - Q(\mathcal{V}) = \int_{\partial\mathcal{V}}\vec{n}\cdot\vec{D}\,dA - \int_{\mathcal{V}'}\rho\,dV - \int_{\varphi'}\sigma\,dA = \int_{\mathcal{V}'}(\vec{\nabla}\cdot\vec{D} - \rho)\,dV + \int_{\varphi'}(\vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!] - \sigma)\,dA = 0$$

Gleichungen nur dann für alle $\mathcal{A}$ bzw $\mathcal{V}$ und alle Schnittkurven φ' von $\mathcal{A}$ bzw $\mathcal{V}$ erfüllt, wenn Integrand identisch null;
mit $\vec{n}\cdot\vec{K} = 0$ ($\vec{K}$ liegt tangential zur Trägerfläche) ??!

$$\underline{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \partial_t\vec{D}} \qquad \underline{\vec{n}\times[\![\vec{H}]\!] = \vec{K}}$$

$$\underline{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho} \qquad \underline{\vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!] = \sigma}$$

2) Polarisierbare, magnetisierbare Stoffe; Wahre, fiktive und effektive Ladungen und Ströme

$\vec{P}$, $\vec{M}$, Wie kann man sie mikroskopisch begründen; Modellvorstellung; Zusammenhang mit makroskopischen Feldern.

③

Einsetzen der Verknüpfungsbeziehungen für den leeren Raum $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ $\quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ in die Maxwell Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} &= \vec{j} \\ \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho \end{aligned}\right\}$$

geeigneter Ausgangspunkt für die Beschreibung el. mag. Felder innerhalb von Körpern

Für makroskopische Beobachtungen ist das mikroskopische el. mag. Feld mit seinen starken örtlichen und zeitlichen Fluktuationen ohne Bedeutung.

Man interessiert sich für Mittelwerte aus Bereichen groß gegenüber atomaren Abmessungen

Man wird auf statistische Methoden geführt. Multipolentwicklung von ρ, $\vec{j}$

Für makroskopische Betrachtung: lineare Mittelung unter Verwendung statistischer Verteilungsfunktionen

Das mikroskopische Modell wird damit auf ein Kontinuumsmodell abgebildet; Felder werden im makroskopischen Bereich glatt.

Durch Vertauschung der räumlichen und zeitlichen Ableitungen mit dem Mittelungsprozeß behalten die Maxwellgleichungen grundsätzlich ihre Form, wobei $\vec{E}$ und $\vec{B}$ die makroskopischen Felder („Maxwellfelder") bedeuten, und die Ladungs- und Stromverteilung durch die geglättete Multipolentwicklung zu ersetzen sind.

$$\rho \rightarrow \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \qquad \rho^e = \rho + \rho^f \qquad \rho^f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \qquad \sigma^e = \sigma + \sigma^f \qquad \sigma^f = -\vec{n} \cdot [\![\vec{P}]\!]$$

$$\vec{j} \rightarrow \vec{j} + \partial_t \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \qquad \vec{j}^e = \vec{j} + \vec{j}^f \qquad \vec{j}^f = \partial_t \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \qquad \vec{K}^e = \vec{K} + \vec{K}^f \qquad \vec{K}^f = \vec{n} \times [\![\vec{M}]\!]$$

wobei $\vec{P}$ ... Dichte der statistisch gemittelten el. Dipolmomente

$\vec{M}$ ... Dichte der statistisch gemittelten mag. Dipolmomente

$\Rightarrow$ allgemeine Verknüpfungsbeziehungen: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$

$\Rightarrow$ Verwendung von Maxwell-Gleichungen zur Beschreibung makroskopischer Felder im Inneren von Körpern!

Im Rahmen eines Kontinuumsmodells sind mag. Spannungen und elektrische Flüsse genauso wohldefinierte Größen wie el. Spg und mag Flüsse.

1)

Elektromagnetische Felder in Systemen mit Geschwindigkeit $v \ll c_0$

Umrechnung, Transformationsgleichung; Wozu braucht man das

Formeln
lokale Mat.gl. für gestr. Größen
allgemeine Verknüpfungsbez. nicht beeintr.
globale Eigensch. gestr. Felder

4

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \qquad \vec{B}' = \vec{B}$$
$$\vec{H}' = \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D} \qquad \vec{D}' = \vec{D}$$
$$\vec{M}' = \vec{M} + \vec{v} \times \vec{P} \qquad \vec{P}' = \vec{P}$$
$$\vec{J}' = \vec{J} - \vec{v}\varrho \qquad \varrho' = \varrho$$

Die Gleichungen stellen für kleine Geschwindigkeiten $|\vec{v}| \ll c_0$ eine Version der Lorentz-Transformation dar, die das Transformationsverhalten el. mag. Größen zwischen Inertialsystemen in der relativistischen Physik erfaßt

gestrichene Größen: mit v bewegtes Inertialsystem (mit Körper mitbewegtes System)
ungestrichene Größen: Laborsystem (festes Inertialsystem)

! ⇒ lokale Materialgleichung für bewegte Körper sind mit gestrichenen Größen zu formulieren!

zB: lokales Ohmsches Gesetz $\vec{J}' = \gamma \vec{E}'$ d.h. $\vec{J} - \vec{v}\varrho = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \vec{J}'$

$\vec{J} = \vec{J}' + \vec{v}\varrho$

$\vec{J}'$ ... Konduktionsstromdichte (Leitungsstromdichte)
$\vec{v}\varrho$ ... Konvektionsstromdichte
$\vec{J}$ ... im Laborsystem beobachtete Stromdichte

! Die allgemeinen Verknüpfungsbeziehungen werden nicht beeinträchtigt.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}' + \vec{P}'$$
$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}' + \vec{v} \times \vec{P}'$$

globale Eigenschaften: In Integraldarstellungen sind dann die gestrichenen Felder zu verwenden.

$$U(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{E}' ds \qquad V(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{H}' ds \qquad I(A) = \int_A \vec{n} \cdot \vec{J}' dA$$

- bewegten Kurven $\mathcal{C}$ ist i.a. ein anderer Wert der el. Spannung zugeordnet als der raumfesten Kurve, mit der $\mathcal{C}$ momentan zusammenfällt.
- Zeitliche Änderungsraten von Flüssen an materiellen Flächen.

$$\Gamma(A) = \int_A \vec{n} \cdot \vec{F} dA \qquad \dot{\Gamma}(A) = \int_A \vec{n} \cdot (\partial_t^c \vec{F}) dA$$

mitgeschleppte Zeitableitung für vektorielle Flußdichten.

Zeitableitung kann nicht als partielle Zeitableitung $\partial_t \vec{F}$ unter das Integral gezogen werden, weil sich A mit der Zeit ebenfalls ändert.

$$\partial_t^c \vec{F} = \partial_t \vec{F} + \vec{v}\,\vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{v})$$

lokale Eigenschaften
Änderungen gegenüber der Tab 2.1 erfahren nur die Sprungbedingungen, weil sie für bewegte Sprungflächen gelten.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \qquad \vec{n} \times [\![\vec{E}]\!] = \boxed{v_n [\![\vec{B}]\!]}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{n} \cdot [\![\vec{B}]\!] = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \underbrace{\vec{J}' + \vec{v}\varrho}_{\vec{J}} + \partial_t \vec{D} \qquad \vec{n} \times [\![\vec{H}]\!] = \vec{K}' + \boxed{\vec{v}\sigma - v_n [\![\vec{D}]\!]} \quad \text{wobei } v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho \qquad \vec{n} \cdot [\![\vec{D}]\!] = \sigma$$

Statische elektrische Felder

Stationäre elektromagnetische Felder

(5)

---

statische Elektrische Felder: Elektrostatik

$U(\partial A)=0 \qquad \Psi(\partial V)=Q(V)$

$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{0} \qquad \vec{n}\times[\![\vec{E}]\!]=\vec{0} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho \qquad \vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!]=\sigma$

Verknüpfungsbeziehung: $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$

stationäre elektromagnetische Felder: stationäres elektrisches Strömungsfeld

$V(\partial A)=I(A) \qquad \Phi(\partial V)=0$

$\Rightarrow I(\partial V)-V(\partial\partial V)=0$

$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J} \qquad \vec{n}\times[\![\vec{H}]\!]=\vec{K} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{n}\cdot[\![\vec{B}]\!]=0$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0 \qquad \vec{n}\cdot[\![\vec{J}]\!]=0$

Verknüpfungsbeziehung: $\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}$

... e Feldgrößen und charakteristische Parameter

Einführung charakteristischer Größen: $L, T, v_0, \rho, \varepsilon, \mu, E_0, B_0$; bezogene Variablen $\tilde{E}, \tilde{B}, \tilde{H}, \tilde{D}, \tilde{J}, \tilde{\rho}, \tilde{K}, \tilde{\sigma}, \tilde{v}$; $\tilde{\nabla}=L\vec{\nabla}$, $\tilde{\partial}_t=T\partial_t$

$\Rightarrow$ Maxwell-Gleichungen in bezogener Form

$$\tilde{\nabla}\times\tilde{E}=-\left[\frac{L B_0}{T E_0}\right]\tilde{\partial}_t\tilde{B} \qquad \tilde{\nabla}\cdot\tilde{B}=0$$

$$\tilde{\nabla}\times\tilde{H}=\left[\frac{L}{cT}\cdot\frac{E_0}{cB_0}\right]\tilde{J}+\left[\frac{L}{cT}\cdot\frac{E_0}{cB_0}\right]\tilde{\partial}_t\tilde{D} \qquad \tilde{\nabla}\cdot\tilde{D}=\tilde{\rho}$$

Angenommen die Bezugswerte lassen sich so wählen, daß die Beträge von $\tilde{\nabla}\times\tilde{E}$; $\tilde{\partial}_t\tilde{B}$; $\tilde{J}$ usw jeweils die Größenordnung 1 besitzen

dominant elektrisches Feldsystem: $\frac{L B_0}{T E_0}\ll 1 \quad \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{0}$

dominant magnetisches Feldsystem: $\frac{L}{cT}\frac{E_0}{cB_0}\ll 1 \quad \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}$

Dominant elektrisches Feldsystem:

$U(\partial A)=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{0} \qquad \vec{n}\times[\![\vec{E}]\!]=\vec{0}$

$\Psi(\partial V)=Q(V) \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho \qquad \vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!]=\sigma$

$I(\partial V)=-\dot{Q}(V) \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{J}=-\partial_t\rho \qquad \vec{n}\cdot[\![\vec{J}]\!]=v_n[\![\rho]\!]-\partial_t\sigma$

$\vec{E}'=\vec{E},\ \vec{D}'=\vec{D},\ \rho'=\rho,\ \sigma'=\sigma,\ \vec{J}'=\vec{J}-\vec{v}\rho$

Dominant magnetisches Feldsystem:

$\Phi(\partial V)=0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{n}\cdot[\![\vec{B}]\!]=0$

$V(\partial A)=I(A) \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J} \qquad \vec{n}\times[\![\vec{H}]\!]=\vec{K}$

$U(\partial A)=-\dot{\Phi}(A) \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B} \qquad \vec{n}\times[\![\vec{E}]\!]=v_n[\![\vec{B}]\!]$

$\vec{B}'=\vec{B},\ \vec{H}'=\vec{H},\ \vec{J}'=\vec{J},\ \vec{K}'=\vec{K},\ \vec{E}'=\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}$

6

el. Feld ~~ist~~ einer Ansammlung ruhender Punktladungen kann mit Coulomb-Gesetz und Überlagerungsprinzip berechnet werden
Voraussetzung: Man muß neben den wahren Ladungen auch die Polarisationsladungen kennen. ; Information liegt selten vor

Allgemeine Eigenschaften des elektrostatischen Feldes und Ladungsverteilung

$U(\partial A) = 0$ $\quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ $\quad \vec{n} \times [\![\vec{E}]\!] = \vec{0}$ $\quad$ Verknüpfungsbeziehung $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$\psi(\partial V) = Q(V)$ $\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ $\quad \vec{n} \cdot [\![\vec{D}]\!] = \sigma$

elektrostatisches Potential: φ $\qquad U(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{E}\, ds = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

Die Lösung vieler elektrostatischer Aufgaben wird durch die Einführung des elektrostatischen Potentials erleichtert, weil Skalarfelder in der Regel einfacher zu behandeln sind als Vektorfelder

Die hier verwendeten Ladungsverteilungen sind als makroskopische Modelle aufzufassen, stellen also math. Idealisierungen dar

Poisson- und Laplace Gleichung

mit ε = konst folgt aus

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = -\varepsilon \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\varphi = -\varepsilon \nabla^2 \varphi = \rho \quad \Rightarrow \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ ... Poisson-Gleichung

$\nabla^2 \varphi = 0$ ... Laplace-Gleichung

lineare, partielle DG. 2 Ordnung von elliptischem Typus.

Grundlösung der Poisson Gleichung:

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \underbrace{\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}_{\text{spezielle Lösung}} + g(\vec{r}, \vec{r}\,')$$

— homogene Lösung (muß der Laplace gl. genügen)

Vorgehensweise zur Lösung der Poisson-Gleichung mit zugehörigen Randbedingungen

- Wir bestimmen eine partikuläre Lösung φ_p zur Funktion $\rho(\vec{r})$ durch $\varphi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV'$

- Überlagerung der homogenen Lösung φ_h um die Randdaten auf die gewünschten Werte zu bringen

7) In Elektrostatik: Welche Randwertprobleme kennen Sie ad. 3 1

Wie geht man bei der Lösung der Randwertprobleme grundsätzlich vor, mit und ohne Raumladungen

Integrabilitätsbedingung

(7)

$\nabla^2\varphi = -\varrho/\varepsilon$ ... Poisson-Gleichung

$\nabla^2\varphi = 0$ ... Laplace-Gleichung

Grundlösung des Laplace-Operators $G(\vec{r},\vec{r}') = \dfrac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$

· ladungsfrei

Dirichlet Problem: Es wird nach harmonischen Skalarfeldern φ mit vorgegebenen Randwerten von φ gesucht:

am Rand: $\varphi = f$

Für analytische (beliebig oft differenzierbare) Randwerte f auf ∂V gibt es genau eine Lösung φ.

Neumann-Problem: Es wird nach harmonischen Skalarfeldern φ mit vorgegebener Normalableitung $\partial_n\varphi$ am Rand gesucht:

am Rand: $\partial_n\varphi = -E_n$

Für analytische Normalableitungen $-E_n$ auf ∂V bis auf eine willkürliche Konstante, eindeutig bestimmte Lösung φ, sofern die notwendige und hinreichende Integrabilitätsbedingung erfüllt ist.

(Satz vom elektrischen Hüllenfluß) $\displaystyle\int_{\partial V} E_n\, dA = 0$

gemischte Randwertprobleme: auf einem Teil des Randes ∂V Dirichlet-Daten

auf restlichen Teil des Randes ∂V Neumann-Daten.

· mit Raumladung

Dirichlet Problem: $\varphi = \varphi_h + \varphi_p$

Man bestimmt eine Partikulärlösung $\varphi_p(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_V \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$, und sucht anschließend ein in V harmonisches Skalarfeld φ_h, das am Rand ∂V die Werte von $f-\varphi_p$ annimmt

Neumann Problem: $\varphi = \varphi_h + \varphi_p$

Man bestimmt eine Partikulärlösung φ_p, und sucht anschließend ein in V harmonisches Skalarfeld φ_h, das am Rand ∂V die Werte $-\partial_n\varphi_p - E_n$ annimmt $-\partial_n\varphi_p - E_n$

Notwendig und hinreichend für die Existenz der Lösung ist folgende Integrabilitätsbedingung

bis auf eine additive Konstante

$$\int_{\partial V} E_n\, dA - \frac{1}{\varepsilon}\int_V \varrho\, dV = 0$$

8) Stationäre magnetische Felder 3.4

allg. Eigenschaften; lokale Grundgleichungen; mag. Vektorpotential $\vec{A}$; mag. Skalarpotential φ_M

8

- <u>Allgemeine Eigenschaften:</u>

<u>globale Beziehungen</u> $\phi(\partial V) = 0$ ... Satz vom mag. Hüllenfluß

$V(\partial A) = I(A)$ ... Durchflutungssatz

<u>lokale Formen</u> $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\quad \vec{n}\cdot[\![\vec{B}]\!] = 0$ $\quad I(\partial V) = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$ $\quad \vec{n}\times[\![\vec{H}]\!] = \vec{K}$ $\quad$ oder $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$ $\quad \vec{n}\cdot[\![\vec{J}]\!] = 0$

<u>allg. Verknüpfungsbeziehung:</u> $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$

- <u>magnetisches Vektorpotential $\vec{A}$</u>

mit Identität $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0 \Rightarrow \underline{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$ $\quad \vec{A}$ ... magnetisches Vektorpotential

$$\phi(A) = \int_A \vec{n}\cdot\vec{B}\, dA = \oint_{\partial A} \vec{s}\cdot\vec{A}\, ds$$

Zwei Felder $\vec{A}$ und $\vec{A}'$ mit gleicher Rotation liefern die gleiche Flußdichte $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

Ihre Differenz ist wirbelfrei $\vec{\nabla}\times(\vec{A}'-\vec{A}) = \vec{0}$ und läßt sich als Gradient eines Skalarfeldes C darstellen

$\vec{A}' - \vec{A} = \vec{\nabla} C \Rightarrow \underline{\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} C}$ ... <u>ist eine Eichtransformation</u>

Da es hier nur auf die Rotation von $\vec{A}$ ankommt, können wir die Divergenz von $\vec{A}$ passend wählen.

zB: <u>Maxwell Eichung:</u> $\underline{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$

<u>Eindeutig ist das Vektorpotential $\vec{A}$ auch durch die Maxwell Eichung nicht, weil immer noch eine Eichtransformation mit harmonischem Skalarfeld C ($\nabla^2 C = 0$) möglich ist.</u>

- <u>mag. Skalarpotential φ_M</u>

falls der <u>ganze Bereich stromfrei</u> ist $\underline{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} = 0}$, können wir analog zur Elektrostatik ein mag. Skalarpot. φ_M benutzen.

$\underline{\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_M}$ $\quad$ mit Identität $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi_M) = 0$ $\quad V(C) = \int_C \vec{s}\cdot\vec{H}\, ds = \varphi_M(\vec{r}_1) - \varphi_M(\vec{r}_2)$

Da die mag. Spannung in einem ideal magnetisierbaren Körper entlang jeder Kurve verschwindet, stellen solche Körper einen Bereich <u>konst. mag. Skalarpotentials</u> φ_M dar. Sie sind im Inneren <u>stromfrei</u>.

- <u>Laplace- und Poisson Gleichung</u>

$\vec{A}$: $\quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \quad \vec{H} = \vec{B}/\mu \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad \Rightarrow \underline{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{J}}$

mit Maxwell-Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \Rightarrow$ $\underline{\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}}$ ... <u>Poisson Gleichung für das mag. Vektorpotential $\vec{A}$</u>

in stromfreien Bereichen $\vec{J} = 0$: $\quad \underline{\nabla^2\vec{A} = 0}$ .. <u>Laplace Gleichung</u>

$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_h(\vec{r}) + \vec{A}_p(\vec{r})$ $\quad$ mit $\vec{A}_p(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dV'$; noch $\vec{A}_h(\vec{r})$ der Laplace Gleichung überlagern

φ_M: $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \quad \vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_M \quad \Rightarrow \underline{\nabla^2\varphi_M = 0}$ $\quad$ fü. einfach zusammenhängender Medien mit μ = konst.

9)

3.5 Spezielle stationäre Magnetfelder $\vec{A} = A\vec{e}_z$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e}_x \partial_y A - \vec{e}_y \partial_x A = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y$

9

1) Ebene Magnetfelder: translationsinvariant

ist die Flußdichte $\vec{B}$ parallel zu einer festen Ebene (xy-Ebene)

$\Rightarrow$ z gerichtete mag. Vektorpotentiale $\vec{A} = A\vec{e}_z$ und z gerichtete Stromverteilungen unabhängig von z

$\Rightarrow \Phi(A) = \ell [A(\vec{r}_2) - A(\vec{r}_1)]$ $\quad \vec{B} = -\vec{e}_z \times \vec{\nabla} A$

Spezialfall von $\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$

Die Flußlinien von $\vec{B}$ sind die Linien $A = \text{konst}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{ll} \partial_x B_x + \partial_y B_y = 0 & \partial_x H_y - \partial_y H_x = J \\ B_x = \partial_y A & B_y = -\partial_x A \end{array}}$ mit $\vec{B} = \mu \vec{H}$ $\quad \mu = \text{konst}$

$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$

$\boxed{\begin{array}{ll} \Rightarrow \partial_x^2 A + \partial_y^2 A = -\mu J & \text{... zweidim Poisson Gl.} \\ \partial_x^2 A + \partial_y^2 A = 0 & \text{... zweidim. Laplace Gl} \end{array}}$

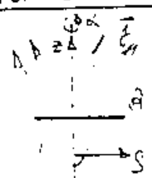
Bsp: Luftspaltfelder

b) Drehsymmetrische Magnetfelder: rotationsinvariant

$\cdot$ $\vec{H} = H_\alpha \vec{e}_\alpha$ mit H_α unabhängig von α; stationäre Stromverteilungen $\vec{J} = J_\rho \vec{e}_\rho + J_z \vec{e}_z$ $\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

$\cdot\cdot$ $\vec{H} = H_\rho \vec{e}_\rho + H_z \vec{e}_z$ mit H_ρ, H_z unab. von α; —— " —— $\vec{J} = J(\rho, z)\vec{e}_\alpha$

*) rein azimutale Felder $\vec{H} = H(\rho, z)\vec{e}_\alpha$



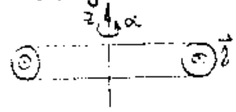
$\vec{J}(\rho)$ nicht beliebig; muß $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ genügen

Lösung mittels Durchflutungssatz

$V(\partial A) = I(A)$

**) kreisförmige Stromverteilungen $\vec{J} = J(\rho, z)\vec{e}_\alpha$

Ringspulen beliebiger Querschnittsform



Lösung:
- Biot-Savart (entlang der Achse)
- mittels Differentialgleichungen

0) Elektrostatische Potentiale: Skalarpotential φ ; Vektorpotential $\vec V$

- Allgemeine Eigenschaften des Elektrostatischen Feldes:

  global: $U(\partial A)=0$ $\qquad \Psi(\partial V)=Q(V)$

  lokal: $\vec\nabla\times\vec E=\vec 0$ $\qquad \vec n\times[\![\vec E]\!]=\vec 0$

  $\vec\nabla\cdot\vec D=\rho$ $\qquad \vec n\cdot[\![\vec D]\!]=\sigma$

  allgemeine Verknüpfungsbeziehung $\quad \vec D=\varepsilon_0\vec E+\vec P$

- elektrostatisches Skalarpotential φ:

  mit Identität: $\vec\nabla\times(\vec\nabla\varphi)=0 \Rightarrow \underline{\vec E=-\vec\nabla\varphi}$ $\qquad \varphi$.. elektrostatisches Skalarpotential

  $U(\mathcal{C})=\int_{\mathcal{C}}\vec s\cdot\vec E\,ds=\varphi(\vec r_1)-\varphi(\vec r_2)$

  Zwei elektrostatische Potentiale, deren Werte sich im ganzen Feldraum um die gleiche, beliebige Konstante unterscheiden, liefern die gleiche Feldstärke.

- elektrostatisches Vektorpotential $\vec V$

  Voraussetzung: Ladungsfreier einfach zusammenhängender Bereich $\vec\nabla\cdot\vec D=0$

  mit Identität $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec V)=0 \Rightarrow \vec D=\vec\nabla\times\vec V$ $\qquad \vec V$.. elektrostatisches Vektorpotential

  $\Psi(A)=\int_{\partial A}\vec s\cdot\vec V\,ds=\int_A\vec n\cdot\vec D\,dA$

- Laplace und Poisson Gleichung

  $\vec V$: $\vec\nabla\times\vec E=\vec 0 \qquad \vec D=\varepsilon\vec E \qquad \vec D=\vec\nabla\times\vec V \Rightarrow \underline{\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec V)=\vec 0}$

  φ: $\vec\nabla\cdot\vec D=\rho \qquad \vec D=\varepsilon\vec E \qquad \vec E=-\vec\nabla\varphi \Rightarrow \underline{\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon}$ ... Poisson Gleichung für das el. Skalarpotential φ

  $\underline{\nabla^2\varphi=0}$ ... Laplace Gleichung

1) Elektrodynamische Potentiale [Elektromagnetisches Feld] • Einführung Elektrodynamischer Potentiale A, φ

Wie und auf welcher Grundlage wurden die Potentiale eingeführt.

Eichtransformationen; Welche Eichungen gibt es und was bewirken sie.

(11)

---

globale Eigenschaften $U(\partial A) + \dot{\Phi}(A) = 0$ Induktionsgesetz

$\Phi(\partial V) = 0$ Satz vom mag. Hüllenfluß

lokale Eigenschaften: $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = \vec{0}$ $\vec{n} \times [\![\vec{E}]\!] = \vec{0}$

$\vec{\nabla} \vec{B} = 0$ $\vec{n} \cdot [\![\vec{B}]\!] = 0$

Elektromagnetisches Feld im engeren Sinn

globale Eigenschaften: $V(\partial A) - \dot{\Psi}(A) = I(A)$ Ampere-Maxwell Satz

$\Psi(\partial V) = Q(V)$ Satz vom el. Hüllenfluß

lokale Eigenschaften $\vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{j}$ $\vec{n} \times [\![\vec{H}]\!] = \vec{K}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ $\vec{n} \cdot [\![\vec{D}]\!] = \sigma$

Strom-Ladungs Feld

Elektrodynamische Potentiale: $\vec{A}, \varphi$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0} = \vec{\nabla} \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} + \partial_t \vec{A}$ ist wirbelfrei $\Rightarrow$

als negativer Gradient eines Skalarpotentials φ darstellbar.

Für jede raumfeste Kurve $\mathcal{C}$ mit dem Anfangspunkt P_1 und dem Endpunkt P_2, und für jede Fläche A mit dem Rand ∂A haben wir

$U(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{s}\, \vec{E}\, ds = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} \vec{s} \cdot \vec{A}\, ds + \varphi(P_1) - \varphi(P_2)$ $\quad \underline{\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \varphi}$

$\Phi(A) = \int_A \vec{n}\, \vec{B}\, dA = \int_{\partial A} \vec{s}\, \vec{A}\, ds$ $\quad \underline{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$

Eichtransformation $\Leftarrow$

Zwei Felder $\vec{A}$ und $\vec{A}'$ mit gleicher Rotation liefern die gleiche Flußdichte $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Ihre Differenz ist wirbelfrei $\vec{\nabla} \times (\vec{A}' - \vec{A}) = \vec{0}$ und läßt sich als Gradient eines Skalarfeldes C darstellen.

$\vec{A}' - \vec{A} = \vec{\nabla} C \Rightarrow \underline{\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} C}$ ... Eichtransformation $\quad \underline{\varphi' = \varphi - \partial_t C}$ ... Eichtransformation

Angenommen: $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ mit $\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \varphi$ und $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ in lok. Eigensch. d. Strom. Lad. Feld

$\nabla^2 \vec{A} - \mu\varepsilon \partial_t^2 \vec{A} - \vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\varepsilon \partial_t \varphi] = -\mu \vec{j}$

$\nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \partial_t^2 \varphi + \partial_t [\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\varepsilon \partial_t \varphi] = -\rho/\varepsilon$

Maxwell-Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon$ .. Skalarpotential erfüllt Poissongleichung aus Elektrostatik

nach Eichtransformation $\varphi' = \varphi - \partial_t C$ mit C als Lösung einer inhom. Wellengleichung möglich

Lorentz-Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\varepsilon \partial_t \varphi = 0 \Rightarrow$ Entkopplung in Form zweier inhomogener Wellengleichungen

$\nabla^2 \vec{A} - \mu\varepsilon \partial_t^2 \vec{A} = -\mu \vec{j}$ und $\nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \partial_t^2 \varphi = -\rho/\varepsilon$

nach Eichtransformationen $\varphi' = \varphi - \partial_t C$ mit C als Lösung einer hom. Wellengleichung möglich

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\varphi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{J}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\mu} - \epsilon \partial_t (-\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\varphi) = \vec{J} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} + \mu\epsilon \partial_t^2 \vec{A} + \mu\epsilon \vec{\nabla} \partial_t \varphi = \mu \vec{J} \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \mu\epsilon \partial_t^2 \vec{A} - \mu\epsilon \vec{\nabla} \partial_t \varphi = -\mu \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \epsilon \vec{\nabla} \cdot (-\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\varphi) = \rho \Rightarrow \nabla^2 \varphi + \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \partial_t^2 \vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \partial_t \varphi) = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \partial_t^2 \varphi + \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \partial_t \varphi) = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$

2) Wellengleichung; Beschreibung von Wellen, Grundlösung retardierte Darstellung, Kausalität

Grundform einer Wellengleichung: $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) w = -f$ ... inhomogene Wellengleichung

$w(\vec{r},t)$, $f(\vec{r},t)$ ... reellwertige Funktionen; für $f \equiv 0$ ... homogene Wellengleichung oder kurz Wellengleichung

$c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ ... Ausbreitungsgeschwindigkeit

$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) = \Box$. d'Alembert-Operator oder Wellenoperator

Eine Funktion $G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')$ die für feste $\vec{r}\,',t'$ der Gleichung $\left(\vec{\nabla}'^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t'^2\right) G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')$ genügt nennen wir Grundlösung des d'Alembert-Operators:

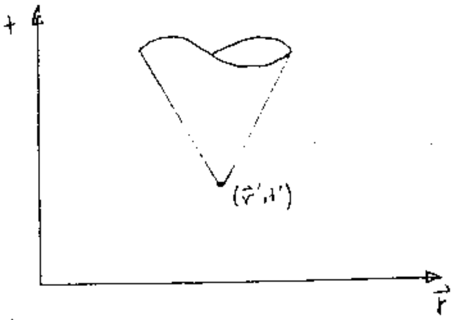
$$G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t') = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\left(t - t' - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c\right)$$ ... Grundlösung des d'Alembert-Operators

t' ... in Zeitpunkt zu dem Lichtblitz erfolgt; t ... Beobachtungszeitpunkt

Im Zusammenhang mit Rand- und Anfangswertproblemen werden Grundlösungen auch Green-Funktionen genannt. Die Green-Funktion der Wellengleichung für den unbegrenzten vollständigen Raum, beschreibt wie sich von einem singulären Ereignis im Raum-Zeit-Punkt $(\vec{r}\,',t')$ ausgehende Welle ausbreitet.

Raum-Zeit-Punkte $(\vec{r},t)$ für die die Grundlösung des d'Alembert-Operators mit festem $(\vec{r}\,',t')$ Werte ungleich Null liefert, liegen auf dem Halbkegel $c^2(t-t')^2 - |\vec{r}-\vec{r}\,'|^2 = 0$ $t > t'$; in der vierdimensionalen Raum-Zeit Lichtkegel genannt. Der Lichtkegel enthält alle Punkte $(\vec{r},t)$, die eine zum Zeitpunkt t' am Ort r' ausgesandte Welle erreichen kann.

Kausalitätsbedingung



partikuläre Lösung für die Wellengleichung

$$w_p(\vec{r},t) = \int_V \frac{f(\vec{r}\,', t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'$$ ... gleichzeitig vollständig formale Lösung für den unbegrenzten Raum

ähnlich der Lösung der Poisson-Gleichung; allerdings Zeitvariable um den Betrag $|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$ rückdatiert, also genau um die Zeitspanne, die das Signal benötigt um vom Ort $\vec{r}\,'$ an den Ort $\vec{r}$ zu gelangen.

$$w_p = \int_V \frac{f'_{ret}}{4\pi R}\,dV' \quad \text{mit } f'_{ret} = f(\vec{r},t - R/c)$$ ... retardierte Darstellung

retardiert bedeutet ersetze t durch $t - \frac{r}{c}$ $\qquad R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$

Hertz - Dipol

(13)

Elektromagnetisches Feld eines schwingenden el. Dipols.
Kontinuierliche Dipolverteilung im leeren Raum charakterisiert durch Polarisationsfeld $\vec{P}(\vec{r},t)$

$\vec{A} = \frac{1}{c_0^2} \partial_t \vec{\Pi}$ $\qquad \varphi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}$ $\qquad \vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V} \frac{\vec{P}_{ret}}{R} \, dV'$ $\qquad t \to t - \frac{r}{c_0}$ dementsprechend

ist ein el. Dipol mit zeitlich veränderlichem el. Moment $\vec{p}(t)$ im Ursprung platziert. $\vec{P}(\vec{r},t) = \vec{p}(t) \cdot \delta(\vec{r})$

$\Rightarrow \vec{\Pi}(\vec{r},t) = \frac{\vec{p}(t - r/c_0)}{4\pi\varepsilon_0 r}$ ... Hertz Vektorfeld

Berechnung des el.mag. Feldes eines el. Dipols für beliebige Zeitabhängigkeit im Prinzip gelöst $(\vec{\Pi} \to \vec{A}, \varphi \to \vec{E}, \vec{B})$

für sinusförmig schwingendes Moment: $\vec{p}(t) = \mathrm{Re}\left[\underline{\vec{p}}\, e^{j\omega t}\right]$

$\Rightarrow \vec{\Pi}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\frac{\underline{\vec{p}}\, e^{j\omega(t - r/c_0)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\right] = \mathrm{Re}\left[\underline{\vec{\Pi}}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\right]$ mit $\underline{\vec{\Pi}}(\vec{r}) = \frac{\underline{\vec{p}}\, e^{-jkr}}{4\pi\varepsilon_0 r}$; $k = \omega / c_0$

$\Rightarrow \underline{\vec{A}} = \frac{1}{c_0^2} \partial_t \underline{\vec{\Pi}}$ $\qquad \underline{\varphi} = -\vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{\Pi}}$ $\qquad \Rightarrow \underline{\vec{B}} = \vec{\nabla} \times \underline{\vec{A}}$; $\underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{A}} - \vec{\nabla} \underline{\varphi}$

$\vec{B}$: koaxiale Kreise mit dem Zentrum auf der Dipolachse.
$\vec{B}$ liegt orthogonal zur radialen Ausbreitungsrichtung $\vec{e}_r$ (TM-Welle)

$\vec{E}$: $\vec{E}$ liegt in der durch $\vec{e}_r$ und $\vec{p}$ aufgespannten Ebene und besitzt i.a. eine Komponente in Ausbreitungsrichtung

Im Grenzfall $k \to 0$ $\Rightarrow \vec{A} = \vec{0}$ $\vec{B} = 0$; $\varphi, \vec{E}$ geben das statische Feld eines el. Dipols an.
In der Nahzone $kr \ll 1$ dominiert der el. statische Feldcharakter $\Rightarrow$ TM-Welle
In der Fernzone $kr \gg 1$ $\Rightarrow$ TEM-Welle: Amplitude klingt mit $1/r$ ab. typisch für punktförmige Strahler

- Antennen: Der Hertz Dipol kann als Modell für offene Antennen dienen deren Abmessungen klein gegenüber der Wellenl. λ sind.

- magnetische Dipole:

Über die Fitzgerald Transformation läßt sich die Lösung des dualen elektromagnetischen Problems gewinnen

$\vec{E} \to \vec{H} \cdot Z_0$ $\qquad \vec{H} \to -\vec{E}/Z_0$

$\vec{B} \to -\vec{D} \cdot Z_0$ $\qquad \vec{D} \to \vec{B}/Z_0$

$\vec{P} \to \vec{M}/c_0$ $\qquad \vec{M} \to -\vec{P} c_0$

(14) Typen von Wellen

(14)

a) Begriffe und Benennungen

Welle = Zustandsänderungen die sich als eindeutige örtliche Verlagerung eines Zustandes mit der Zeit beschreiben lassen

·) freie Welle: Ausbreitung erfolgt auf ein-, zwei- oder dreidimensionalen Trägern

einfache Welle: Zur Beschreibung der Ortsabhängigkeit reicht eine einzige Ortskoordinate aus.

z. B. 2 dim. Träger: [illegible] Wellen, Kreiswelle
3 dim. Träger: ebene Welle, Zylinderwelle, [illegible] welle

Raumwelle: freie Welle auf 3dimensionalen Träger, ausdrückliche Unterscheidung von Oberflächenwellen

Flächenwelle: freie Wellen auf 2dimensionalen Träger, ausdrückliche Unterscheidung von Kantenwellen

·) geführte Wellen: Ausbreitung erfolgt an Grenzflächen oder Grenzlinien auf 2 bzw 3 dimensionalen Trägern

Kanalwelle: Die geführte Welle wird zumindest auf zwei Seiten eingeschlossen

Randwelle: Die führende Grenze ist nur an einer Seite vorhanden

$\vec{F} = \vec{F}' + j\vec{F}''$ → $\vec{F}' \times \vec{F}'' = \vec{0}$

longitudinal $\vec{K} \times \vec{F} = 0$ transversal: $\vec{K} \cdot \vec{F} = 0$ $\vec{F}' \times \vec{F}'' = 0$ ... linear polarisiert $\vec{F} \cdot \vec{F} = 0$ ... zirkular polarisiert ↳ $\left\{ \begin{array}{l} |\vec{F}'| = |\vec{F}''| \\ \vec{F}' \cdot \vec{F}'' = \emptyset \end{array} \right.$

ebene Sinuswelle: $\vec{F}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{F}\, e^{j\omega t - \gamma \vec{K}\cdot\vec{r}}\right]$

γ ... komplexer Ausbreitungskoeffizient $\gamma = \alpha + j\beta$
K ... Einsvektor in Ausbreitungsrichtung
α ... Dämpfungskoeffizient
β ... Phasenkoeffizient ($\hat{=} k$ Kreiswellenzahl wenn $\alpha = 0$)
c ... Ausbreitungsgeschwindigkeit

$c = \omega / \beta$

für dispersive Wellen ([illegible])

$c_{ph} = \omega / \beta$

$c_{gr} = d\omega / d\beta$

b) Freie ebene Raumwelle

Sie sind notwendig transversal. $\vec{K} \cdot \vec{E} = 0$, $\vec{K} \cdot \vec{H} = 0$ ⇒ TEM-Welle; Es gilt $\mu\varepsilon c^2 = 1$ ... Maxwellbeziehung

Jede transversale elektrische Welle ist notwendig von einer magnetischen Welle gleicher Form begleitet und umgekehrt.

Energiefluß: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{Z} E^2 \vec{K} = Z H^2 \vec{K}$ $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ ... charakteristische Impedanz [illegible] Raums

Spezialfall: ebene Sinuswelle in el. nicht leitfähigem Medium: $\vec{E}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\, e^{jk\theta}\right]$ $\vec{H}(\theta) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{H}}\, e^{jk\theta}\right]$

c) Geführte Wellen in zylindrischen Anordnungen

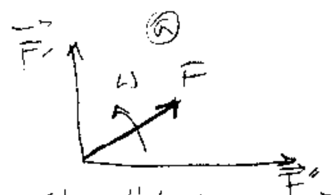
TEM-Wellen können in idealen Hohlleitern mit einfach zusammenhängendem Querschnitt nicht existieren.
Wegen der idealen Leitfähigkeit des begrenzenden Körpers stellt seine Kontur eine Linie konstanten Potentials dar,
womit die el. Feldstärke im ganzen Gebiet verschwindet.
Um TEM-Wellen führen zu können sind zwei oder mehrere Zylinderflächen notwendig (Koaxialkabel oder parallele Drähte)

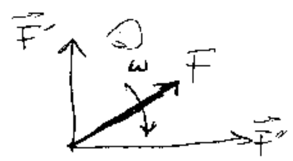
Damit läßt sich in jeder Ebene z = const und jedem Zeitpunkt die el. Spannung zwischen den Leitern definieren und für jeden Leiter läßt sich der Strom erklären, was eine vereinfachte Behandlung im Rahmen der sog. Leitungstheorie ermöglicht.

Die unterschiedlichen TM- und TE-Wellen bilden zusammen mit der TEM-Welle, falls diese existieren kann, ein vollständiges System zur Beschreibung el. mag. Wellen in idealen Wellenleitern

Phasengeschwindigkeit $c_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{kr}}{\omega}\right)^2}}$ Gruppengeschwindigkeit $c_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{kr}}{\omega}\right)^2} < c$

$c_{ph} \cdot c_{gr} = c^2$





(a) positive Helizität $\vec{K} \times \vec{F} = j\vec{F}$ ← linkszirkulare Polarisation
(b) negative " $(\vec{K} \times \vec{F}) = -j\vec{F}$ ← rechts " Polarisation

7) **Verlustfreie Doppelleitung**

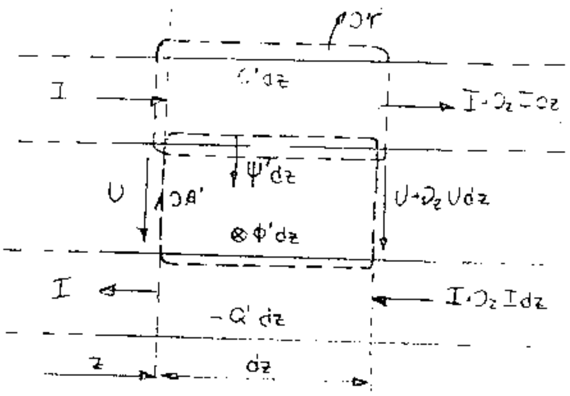
Erläuterung des Modells, Welche Typen von Wellen werden beschrieben;
Ableitung der Leitungsgleichungen; Lösungen

15

Welche Typen von Wellen werden beschrieben.

Entlang zylindrischer Strukturen mit zwei oder mehreren führenden Rändern können sich el.mag Wellen im TEM-Modus ausbreiten. Da magnetische und elektrische Flüsse in Ausbreitungsrichtung nicht auftreten, lassen sich zu jedem Zeitpunkt in jedem Querschnitt Leiterströme und el. Spannungen zwischen den Leitern eindeutig definieren.

Ableiten der Leitungsgleichungen: **Betrachtung einer Scheibe zwischen zwei benachbarten Querschnitten.**



Induktionsgesetz auf $\partial A'$: $\partial_z U + \partial_t \Phi' = 0$

Ladungserhaltung auf ∂V : $\partial_z I + \partial_t Q' = 0$

wegen Linearität (μ und ε sind konstant)

$\Rightarrow$ Proportionalität zwischen Spannungen und Flüssen

$\Psi' = Q' = C'U \qquad \Phi' = L'V = L'I$

Leitungsgleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_z U + L'\partial_t I &= 0 \\ \partial_z I + C'\partial_t U &= 0 \end{aligned}}$$

Lösung: mit $L'C' = \mu \cdot \varepsilon = \frac{1}{c^2}$; $\quad \partial_z \partial_t U + L'\partial_t^2 I = 0$

$$\partial_z \underbrace{C'\partial_t U}_{-\partial_z I} + \underbrace{L'C'}_{1/c^2}\partial_t^2 I = 0 \quad \Rightarrow \left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) I = 0 \quad \text{bzw} \quad \left(\partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) U = 0$$

sind einfache Wellengleichungen mit folgenden Lösungen

$$\left.\begin{aligned} I(z,t) &= I_1(ct-z) + I_2(ct+z) \\ U(z,t) &= U_1(ct-z) + U_2(ct+z) \end{aligned}\right\} \text{allgemeine Lösung} \qquad Z_W = \sqrt{L'/C'}$$

?? warum ist $I(z+dz) = I(z) + \partial_z I(z)\, dz$?

$I(z+dz) = I(z) + \partial_z I(z)$ und $I(z) + \partial_z I(z) dz = I(z) + \frac{d[I(z) \cdot dz]}{dz} = I(z) + \frac{d^2 I(z)}{dz} = I(z) + \frac{d\, I(z)}{dz} = I(z) + \partial_z I(z)$

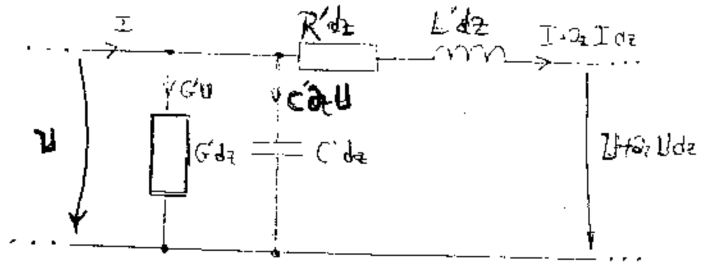
?

Verlustbehaftete Doppelleitung

4 Leitungsparameter; Leitungsgleichungen aus Ersatzschaltbild
Vorraussetzung für die Gültigkeit

76

Ersatzschaltbild:



$$\left.\begin{aligned} \partial_z U + L'\partial_t I + R' I &= 0 \\ \partial_z I + C'\partial_t U + G' U &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ Leitungsgleichungen}$$

Lösung:

$$\partial_z^2 U + L'\partial_t \partial_z I + R'\partial_z I = 0$$

$$\partial_z^2 U - L'\partial_t \left(C'\partial_t U + G'U\right) - R'\left(C'\partial_t U + G'U\right) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \left[\partial_z^2 - L'C'\partial_t^2 - (L'G' + R'C')\partial_t - R'G'\right] U &= 0 \\ \left[\partial_z^2 - L'C'\partial_t^2 - (L'G' + R'C')\partial_t - R'G'\right] I &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ einfache Telegraphenleitungen}$$

Es werden gedämpfte dispergierende Wellen beschrieben. ←

Für die Anwendungen besonders wichtig sind eingeschwungene Zustände. ←

$I(z,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{I}(z) \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}\right] \qquad U(z,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{U}(z) \cdot \sqrt{2}\, e^{j\omega t}\right]$

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_z \underline{U}(z) + \underline{Z}'\, \underline{I}(z) &= 0 \\ \partial_z \underline{I}(z) + \underline{Y}'\, \underline{U}(z) &= 0 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} \underline{Z}' &= R' + j\omega L' \\ \underline{Y}' &= G' + j\omega C' \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{U}(z) &= \underline{U}_1\, e^{-\gamma z} + \underline{U}_2\, e^{\gamma z} \\ \underline{I}(z) &= \underline{I}_1 \cdot e^{-\gamma z} + \underline{I}_2\, e^{\gamma z} \end{aligned}}$$

allgemeine Lösung, beschreibt Überlagerung einer vorlaufenden ($\underline{U}_1, \underline{I}_1$) und einer rücklaufenden ($\underline{U}_2, \underline{I}_2$) gedämpften Sinuswelle

mit $\gamma = \sqrt{\underline{Y}'\underline{Z}'} = \sqrt{(G' + j\omega C') \cdot (R' + j\omega L')}$ .. komplexer Ausbreitungskoeffizient

Der Phasenkoeffizient $\beta = \mathrm{Im}(\gamma)$ ist nicht proportional zur Kreisfrequenz ⇒ Wellen dispergierend, Signalform verzerrt

Für verzerrungsfreie Leitung: $L'/R' = C'/G' \qquad \gamma = \alpha + j\beta \quad \alpha = \sqrt{R'G'} \quad \beta = \omega\sqrt{L'C'}$

Vorraussetzung für übliche Leitungstheorie?

TEM-Wellen sind vorausgesetzt, weil nur dann lassen sich U & I zu jedem Ort z & Zeitpunkt t festlegen. Das aus dem Grund, weil $\vec{E}$ & $\vec{B}$ Komponenten der Welle normal zur Ausbreitungsrichtung liegen.

Herleitung der Bullard-Gleichung

$\vec{j} = \vec{\nabla}\times\vec{H}$ mit $\vec{B} = \mu\vec{H}$ $\Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{B}$

$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\gamma}\vec{j} - \vec{v}\times\vec{B} = \underline{\frac{1}{\gamma\mu}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \vec{v}\times\vec{B} = \vec{E}}$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \Rightarrow -\frac{1}{\gamma\mu}\,\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B}) = +\partial_t\vec{B}$

$-\frac{1}{\gamma\mu}\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \nabla^2\vec{B}\right] + \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B}) = \partial_t\vec{B}$ mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$\frac{1}{\gamma\mu}\nabla^2\vec{B} = \partial_t\vec{B} - \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})$ ... Bullard Gleichung

beschreibt die Verteilung magnetischer Flüsse in el. leitfähigen, bewegten Medien mit γ, μ = konstant

Spezialfälle: a) $\mu\gamma \to \infty$ dh. Verschwinden der mitgeschleppten Zeitableitung von $\vec{B}$; $\underline{0 = \partial_t\vec{B} + \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})}$

Die Flußverteilung wird dann durch die Bewegung vollständig mitgeschleppt, erscheint also im Körper eingefroren.

! b) $\underline{v = 0}$ dh. keine bewegten, elektrisch leitfähigen Körper $\Rightarrow$ vektorielle Diffusionsgleichung für $\vec{B}$

$\underline{\nabla^2\vec{B} = \mu\gamma\,\partial_t\vec{B}}$ ... Diffusionsgleichung

c) $\partial_t\vec{B} = 0$ dh. zeitlich konstante Flußverteilung; $\underline{\frac{1}{\gamma\mu}\nabla^2\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})}$

Relaxationsgleichung Herleitung, Berücksichtigung von $\vec{v}$, 2 Kenngrößen (Relaxationskonst., Reynoldszahl)

Relaxationsgleichung

15

Kontinuitaetsgleichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\partial_t \varrho \quad \text{mit} \quad \vec{j} = \gamma\vec{E} + \varrho\vec{v} \Rightarrow \gamma\cdot(\vec{\nabla}\vec{E}) + \vec{\nabla}\cdot(\varrho\vec{v}) = -\partial_t\varrho \quad \text{mit } \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\frac{\gamma}{\varepsilon}(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}) + \vec{\nabla}(\varrho\vec{v}) + \partial_t\varrho = 0 \quad \text{mit} \quad \underline{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \varrho}$$

$$\underline{\partial_t\varrho + \vec{\nabla}\cdot(\varrho\cdot\vec{v}) + \frac{\gamma}{\varepsilon}\varrho = 0}$$ ... Relaxationsgleichung für die konst.

$T_R = \frac{\varepsilon}{\gamma}$ ... Relaxationszeitkonstante Zeitmaßstab für die Relaxation

$Re = \frac{\varepsilon v_0}{\gamma L}$ ... elektrische Reynoldszahl Der zweite Term in der Relaxationsgleichung wird wesentlich für $Re \gtrsim 1$ erfolgt der konvektiven Ladungstransport.

Ladungsrelaxation ohne Bewegung: $\vec{v} = 0$

$$T_R\cdot\partial_t\varrho + \varrho = 0 \; : \quad \varrho(\vec{r},t) = \varrho(\vec{r},0)\cdot e^{-t/T_R}$$

⇒ Im Inneren eines linear, homogenen Materials gibt es im stationären Zustand keine Überschußladungen
Ladungsansammlungen können nur an Materialinhomogenitäten auftreten (zB. an Grenzflächen)

Ladungsrelaxation mit Bewegung:

$$T_R\underbrace{\left[\partial_t\varrho + \vec{\nabla}\cdot(\varrho\vec{v})\right]}_{\text{mitgeschleppte Zeitableitung für } \varrho} + \varrho = 0$$: Lösungen liefert wieder einen zeitlich exponentiell abklingenden Verlauf

⇒ In einem homogenen Material strebt die el. Ladung jedes materiellen Volumenelements, das sich auch bewegen und verformen kann gegen Null, sofern keine räumlich verteilte Ladungsinjektion erfolgt.

Erklärung Reynoldszahl:

Soll el. Raumladung in einem Medium mit der Geschwindigkeit v_0 über eine Strecke L transportiert werden, so darf sie im Zeitintervall L/v_0 nicht wesentlich relaxieren dh. $T_R > L/v_0$ oder $\underline{Re = T_R\cdot\frac{v_0}{L} > 1}$ sein.

lineares Material
homogenes "
stationärer Zustand
konvektiver Ladungstransport

Herleitung des Poynting Satzes

$$\vec\nabla\times\vec E = -\partial_t \vec B \qquad | \; \vec H$$
$$\vec\nabla\times\vec H = \vec j + \partial_t \vec D \qquad | \cdot \vec E$$

19

∅

$$\vec H\cdot(\vec\nabla\times\vec E) = -\vec H\cdot\partial_t\vec B$$
$$\vec E\cdot(\vec\nabla\times\vec H) = \vec E\cdot\vec j + \vec E\,\partial_t\vec D$$

warum

$$\vec\nabla\cdot(\vec E\times\vec H) = \vec\nabla\cdot(\vec E\times\vec H_c) + \vec\nabla\cdot(\vec E_c\times\vec H) = \vec H\cdot(\vec\nabla\times\vec E) - \vec E\cdot(\vec\nabla\times\vec H) = -\vec H\,\partial_t\vec B - \vec E\cdot\vec j - \vec E\,\partial_t\vec D$$

$$\vec E\,\partial_t\vec D + \vec H\,\partial_t\vec B + \vec\nabla(\vec E\times\vec H) = -\vec j\cdot\vec E$$

$$\int_V (\vec E\cdot\partial_t\vec D + \vec H\,\partial_t\vec B)\,dV + \int_{\partial V}\vec n\cdot(\vec E\times\vec H)\,dA = -\int_V \vec j\cdot\vec E\,dV$$ … Poynting Satz

Vorstufe zu einem Energiesatz d. Elektrodynamik

Interpretation für linear homogen isotropes Material

1: $\vec E\cdot\partial_t\vec D + \vec H\cdot\partial_t\vec B = \partial_t(\varepsilon E^2/2) + \partial_t(B^2/2\mu) = \partial_t w_e + \partial_t w_m$

2: $\oint_{\partial V}\vec n\cdot(\vec E\times\vec H)\,dA$. gesamter elektromagnetischer Energiefluß von innen nach außen durch ∂V

3: mit $\vec j = \gamma\vec E \Rightarrow -\vec j\,\vec E = -\frac{\vec j^2}{\gamma}$ … Joule Verluste

$P = \int S_n\,dA = UI$

2) Orientierungen (innere und äußere)

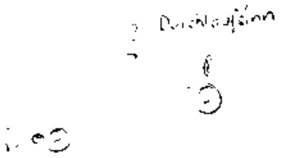
i) Was heißt konsistente Orientierung von Bereichen und deren Rändern?
ii) Warum unterscheidet man die beiden Orientierungssysteme?

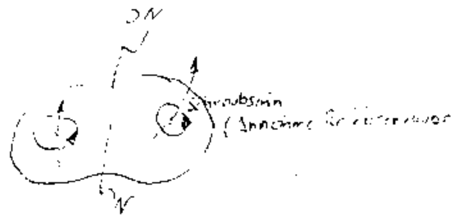
20

---

innere Orientierung: kein Bezug auf den Umgebungsraum

- Punkte werden Pluszeichen oder Minuszeichen zugeordnet
- Kurven wird ein Durchlaufsinn zugeordnet
- Flächen wird ein Drehsinn zugeordnet
- Volumina wird ein Schraubsinn zugeordnet





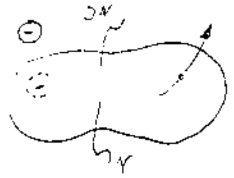
Kurve $\mathcal{C}$: Der Rand $\partial\mathcal{C} = P_1 + P_2$ ist dann konsistent orientiert wenn $P_1 \hat{=} \ominus$ und $P_2 \hat{=} \oplus$ und Durchlaufsinn mit Drehsinn der Fläche zusammenpaßt

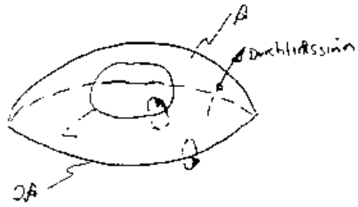
Fläche A: Der Rand ∂A ist mit der Fläche A dann konsistent orientiert wenn der Durchlaufsinn mit Drehsinn der Flächen bei Annäherung

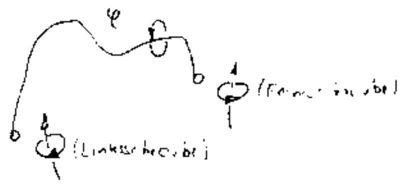
Volumina V: Der Rand ∂V ist mit dem Volumen V dann konsistent orientiert wenn sich der Drehsinn der Flächen bei Annäherung von innen nach außen aus dem Schraubsinn ableitet

äußere Orientierung: (transversale)

- Volumina wird ein Pluszeichen oder Minuszeichen zugeordnet
- Flächen wird ein Durchtrittssinn zugeordnet
- Kurven wird ein Umschlingungssinn zugeordnet
- Punkten wird ein Schraubsinn zugeordnet







Kurve $\mathcal{C}$: Die Randpunkte $\partial\mathcal{C}$ einer Kurve $\mathcal{C}$ sind dann konsistent orientiert, wenn sich der Schraubsinn bei Annäherung an den Randpunkt von innen zusammen mit dem Umschlingungssinn ergibt.

Fläche A: Die Randkurve ∂A einer Fläche A ist dann konsistent orientiert, wenn sich der Umschlingungssinn von ∂A zusammen mit dem Durchtrittssinn ergibt

Volumina V: Die Randfläche ∂V eines Volumens V ist dann konsistent orientiert, wenn sich der Durchtrittssinn bei Annäherung an die Randfläche von innen nach außen, also vom Plusbereich zum Minusbereich ergibt.

ii) Innere und äußere Orientierungen haben unterschiedliches Spiegelungsverhalten.
- innere Orientierungen bleiben im Spiegel gleich (zB $\vec{E}$)
- äußere Orientierungen drehen sich im Spiegel um (zB $\vec{H}$)

Wird jedoch der ganze Raum einheitlich orientiert (Konvention: rechtswendig) so braucht man nicht zwischen innerer und äußerer Orientierung von Bereichen zu unterscheiden, weil sie umkehrbar eindeutig zusammenhängen

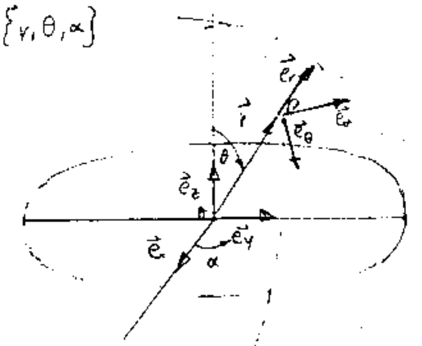
1 # Koordinaten

Koordinatenlinien und Koordinatenflächen anhand von Kugelkoordinaten
Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten einführen

21

Koordinaten dienen zur Angabe von Punkten im Raum
Wir wählen einen festen Punkt O als Ursprung und ordnen jedem Punkt P einen Vektor $\vec{r}$ zu
dessen Betrag $|\vec{r}| = r$ den Abstand der beiden Punkte O und P angibt und dessen Richtung von O nach P weist.

<u>Kugelkoordinaten</u> $\{r, \theta, \alpha\}$



$x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\alpha)$
$y = r \sin(\theta) \cdot \sin(\alpha)$
$z = r \cdot \cos(\theta)$

<u>orthogonale Koordinatensysteme</u>: die Tangentenvektoren der Koordinatenlinien in einem Punkt stehen paarweise aufeinander senkrecht und bilden die lokale Vektorbasis

<u>Koordinatenflächen</u>: entstehen durch Variieren von 2 Koordinaten; oder konstanthalten jeweils einer Koordinate

- r = konst: Schaar d. Koord.fl. bilden <u>konzentrische Kugeloberflächen</u> mit dem Mittelpunkt im Ursprung
- θ = konst: ——— " ——— <u>Mantelflächen von Kreiskegeln</u> mit der Spitze im Ursprung und Kegelachse = z-Achse
- α = konst: ——— " ——— <u>vertikale Kreisflächen</u> mit dem Mittelpunkt im Ursprung

<u>Koordinatenlinien</u>: entstehen dur variieren von 1 Koordinate; oder konstanthalten von jeweils 2 Koordinaten

- r variieren: Schaar der Koordinatenlinien bilden Strahlen mit Anfang im Ursprung
- θ variieren: ——— " ——— vertikale Kreislinien mit Mittelpunkt im Ursprung (<u>Längengrade</u>)
- α variieren: ——— " ——— horizontale Kreislinien mit ——— " ——— (<u>Breitengrade</u>)

<u>Einsvektoren</u>: Die Einsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha$ bilden durch das Tripel $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\alpha\}$ die lokale orthonormierte Basis
Die Richtung der Basisvektoren sind ortsabhängig

<u>Einsvektoren</u> entstehen durch Bildung der <u>Tangentialvektoren</u> an die entsprechenden <u>Koordinatenlinien</u>
bzw als <u>Normalvektoren</u> an die entsprechenden <u>Koordinatenflächen</u>

) Bilanzgleichungen für Energie und Impuls

Bilanzgleichungen: global

$$\left|\begin{array}{l}\dot{W}(\mathcal{V}) + Q(\partial\mathcal{V}) = R(\mathcal{V}) \\ \dot{\vec{G}}(\mathcal{V}) + \vec{P}(\partial\mathcal{V}) = \vec{F}(\mathcal{V})\end{array}\right\}$$

Für abgeschlossene Systeme sind die rechten Seiten Null
Bilanzgleichungen $\Rightarrow$ Erhaltungsgleichungen

$W(\mathcal{V})$ .. Energieinhalt $\quad Q(\partial\mathcal{V})$ .. Energiefluß $\quad R(\mathcal{V})$. Prod. rate d. Energie

$\vec{G}(\mathcal{V})$ ... Impulsinhalt $\quad \vec{P}(\partial\mathcal{V})$ ... Impulsfluß $\quad \vec{F}(\mathcal{V})$ .. Prod. rate d. Impulses

Integraldarstellung:

$$W(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} w \, dV \qquad Q(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot\vec{q}\, dA \qquad R(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} r\, dV + \int_{\varphi} r^s\, dA$$

$$\vec{G}(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \vec{g}\, dV \qquad \vec{P}(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{n}\cdot \underline{p}\, dA \qquad \vec{F}(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \vec{f}\, dV + \int_{\varphi} \vec{f}^s\, dA$$

Bilanzgleichungen: lokal

$$\partial_t w + \vec{\nabla}\cdot\vec{q} = r \qquad -v_n [\![w]\!] + \vec{n}\cdot[\![\vec{q}]\!] = r^s$$

$$\partial_t \vec{q} + \vec{\nabla}\cdot\underline{p} = \vec{f} \qquad -v_n [\![\vec{q}]\!] + \vec{n}\cdot[\![\underline{p}]\!] = \vec{f}^s$$

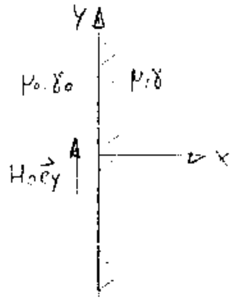
$$w^e = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \qquad \text{... Energiedichte}$$

$$\vec{q}^e = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}\times\vec{B} \qquad \text{... Energieflußdichte}$$

$$\vec{g}^e = \varepsilon_0 \vec{E}\times\vec{B} \qquad \text{... Impulsdichte}$$

$$\underline{p}^e = w^e \underset{\sim}{\delta} - \varepsilon_0 \vec{E}\otimes\vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}\otimes\vec{B} \qquad \text{... Impulsflußdichte}$$

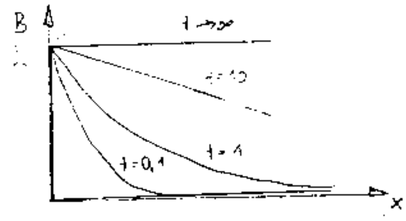
Diffusion magnetischer Felder

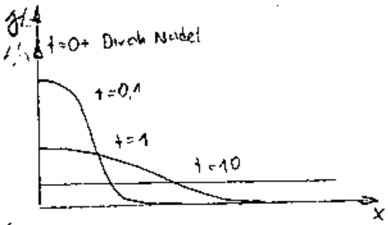


Eindringen des magnetischen Flusses in einen Halbraum
- Sprung
- Sinusform

23

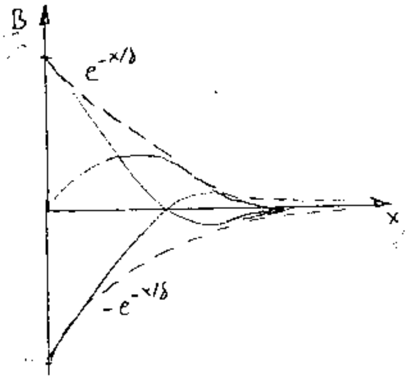
<u>Sprung:</u> zum Zeitpunkt $t=0$ wird sprungartig die konstante Tangentialfeldstärke $\vec{H} = H_0 \vec{e}_y$ angelegt.
Für den anschließenden Ausgleichsvorgang erwarten wir Felder $\underline{\vec{B} = B(x,t)\vec{e}_y}$ und $\underline{\vec{j} = j(x,t)\vec{e}_z}$,
haben also die Diffusionsgleichung $\partial_x^2 B = \mu\gamma \partial_t B$
mit den Rand- und Anfangsbedingungen zu lösen: RB: $x=0 \quad t>0: \quad B = B_0 = \mu H_0; \quad x \to \infty: B=0$
AB: $x>0 \quad t=0+: \quad B=0$





<u>Typisches Verhalten:</u>
- Anfänglich Abschirmung von $\vec{B}$ durch Flächenstrom $\vec{K}$
- Deutliches Eindringen bis Randabstand L erst nach Zeitintervall T_d
- Je größer μ und γ desto langsamer verläuft der Diffusionsprozeß
- formal unendlich große Signalausbreitungsgeschwindigkeit

<u>Sinusform:</u> zeitlich sinusförmig verlaufende mag. Randfeldstärke $\vec{H} = H\vec{e}_y \quad H(0,t) = \hat{H}_0 \cdot \cos(\omega t)$



<u>Typisches Verhalten:</u>
- Räumliches exponentielles Abklingen mit Eindringtiefe δ
- Abschirmen des Körperinneren durch Wirbelströme im Randbereich
- Wechselflüsse können in massiv leitfähigen Körper nicht wesentlich über die Eindringtiefe hinaus eindringen

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}}$$

Zwei dimensionale Lösung der Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten

24

$\varphi = \Delta^2 \varphi = 0$ $\qquad \varphi(x,y) = X_{(x)} \cdot Y_{(y)}$ einsetzen in die Laplace Gleichung

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k^2$$

wobei die linke Seite nicht von y und die rechte Seite nicht von x abhängt. Es kann deshalb keine der beiden Seiten weder von x noch von y abhängen, sie müssen also gleich einer Konstanten sein.

$$X''(x) - k^2 X(x) = 0$$
$$Y''(y) + k^2 Y(y) = 0$$

$$X(x) = A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx} \qquad Y(y) = B_1 \cos(ky) + B_2 \sin(ky)$$

$$\varphi(x,y) = \left(A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx}\right) \cdot \left[B_1 \cos(ky) + B_2 \sin(ky)\right]$$

Grundform: $\varphi(x,y) = C \cdot e^{-kx} \sin(ky)$

Dreidimensionale Loesung der Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \varphi(x,y,z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0$$

3 gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\alpha^2 \\ \frac{Y''(y)}{Y(y)} &= -\beta^2 \\ \frac{Z''(z)}{Z(z)} &= +\gamma^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \gamma^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} X(x) &= e^{\pm j\alpha x} \\ Y(y) &= e^{\pm j\beta y} \\ Z(z) &= e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z} \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(x,y,z) = e^{\pm j\alpha x} \cdot e^{\pm j\beta y} \cdot e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, z}}$$

α^2 & β^2 sind positiv vorausgesetzt !

Vom Buch

John David Jackson
Klassische Elektrodynamik