GET-UE, 11.6.2003

KAP. 27: ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

Ebene (homogene) Wellen

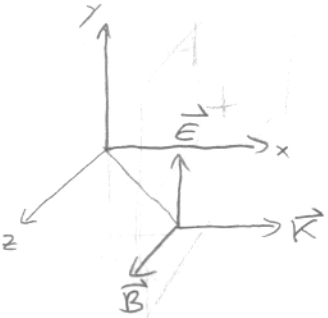
- strom- & ladungsfreier räuml. Bereich
- lineares, homogenes isotropes Medium

Zeitfunktion $g(\tau)$: $\vec{E} = \hat{E} g(\tau) \vec{e}_y$, $\vec{B} = \hat{B} g(\tau) \vec{e}_z$

↳ Wellenprofil, mit $\tau = t - \frac{x}{c}$

Ausbreitungsrichtung: $\vec{E} = \hat{E} \cdot g(t - \frac{x}{c}) \vec{e}_y$

$\vec{B} = \hat{B} \cdot g(t - \frac{x}{c}) \vec{e}_z$



Rechtssystem: $\vec{K}, \vec{E}, \vec{B}$

Ausbreitungsbed. (Materialgleichung):

$\hat{E} = c \cdot \hat{B}$ $\quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}}$ $\quad \mu \varepsilon c^2 = 1$

$\vec{K} \times \vec{E} = c \cdot \vec{B} = Z \cdot \vec{H}$

Z ... Wellenimpedanz

$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

Sinuswellen (zeitliche & räuml. Periodizität)

$\lambda = c \cdot T$

$\tau = t - \frac{x}{c}$

$c = \frac{\omega}{k}$

k ... Kreiswellenzahl

$\sigma = \frac{1}{\lambda}$

$g(\tau) = \cos(\omega \tau + \varphi)$

$\vec{E} = \hat{E} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$

$\vec{B} = \hat{B} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_z$

reelle Standardform: $\vec{E} = \hat{E} \cos(\omega t - k \vec{K} \cdot \vec{r} + \varphi) \vec{e}_p$

$\vec{B} = \hat{B} \cos(\omega t - k \vec{K} \cdot \vec{r} + \varphi) \vec{K} \times \vec{e}_p$

$\hat{E} = c \cdot \hat{B}$ $\quad \omega = c \cdot k$

$\vec{e}_p$ ... Polarisationsrichtung

komplexe Standardform: $\underline{\vec{E}} = \underline{\hat{E}} e^{j(\omega t - k \vec{K} \cdot \vec{r})} \vec{e}_p$

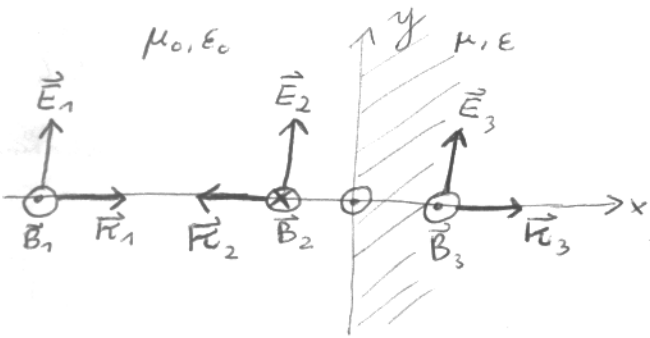
$\underline{\vec{B}} = \underline{\hat{B}} e^{j(\omega t - k \vec{K} \cdot \vec{r})} \vec{K} \times \vec{e}_p$

$\underline{\hat{E}} = c \cdot \underline{\hat{B}}$ $\quad \omega = c \cdot k$

mit: $\vec{E} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}})$, $\underline{\hat{E}} = \hat{E} e^{j\varphi}$

$\vec{B} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{B}})$, $\underline{\hat{B}} = \hat{B} e^{j\varphi}$

27.2. Reflexion und Transmission



- Randbedingungen sind bei Reflexion im allg. gestört.
- vorlaufende Welle hat $(t - \frac{x}{c_0})$, rücklaufende hat $(t + \frac{x}{c_0})$
- jede elektrische Welle ist von einer magnet. Welle begleitet

$$\vec{E}_1 = \hat{E}_1 g_1 (t - \tfrac{x}{c_0}) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_2 = \hat{E}_2 g_2 (t + \tfrac{x}{c_0}) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_3 = \hat{E}_3 g_3 (t - \tfrac{x}{c}) \vec{e}_y$$

c ! da die Welle nicht mehr im leeren Raum ist.

betrachte System f. $\underline{x=0}$: Sprungbed. erfüllt: $[\![\vec{E}_t]\!] = 0$
rechte Terme fallen weg → Wellenprofile sind gleich

I $\Rightarrow \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = \hat{E}_3$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{c}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\hat{E}_1}{c_0} \cdot g (t - \tfrac{x}{c_0}) \overbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}^{\vec{e}_z}$$

Tangentialkomponente d. magnet. Feldstärke darf nicht springen: $[\![\vec{H}_t]\!] = 0$

$$\vec{H}_1 = \frac{\hat{B}_1}{\mu_0} \dots = \frac{\hat{E}_1}{\mu_0 c_0} g (t - \tfrac{x}{c_0}) \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\hat{E}_2}{c_0} \cdot g_2 (t + \tfrac{x}{c_0}) \underbrace{(-\vec{e}_x \times \vec{e}_y)}_{(-\vec{e}_z)}$$

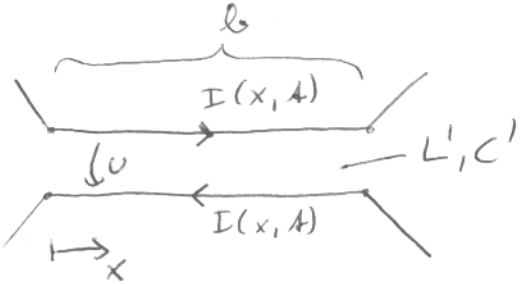
II $\dfrac{\hat{E}_1}{\mu_0 c_0} - \dfrac{\hat{E}_2}{\mu_0 c_0} = \dfrac{\hat{E}_3}{\mu c}$ Gleichungssystem lösen → Ergebnis

Wellenarten

Transversal-elektr. Wellen TE } nur bei hohen Frequenzen möglich
Transversal-magnet. Wellen TM }
Transversal-elekt.-mag. Wellen TEM Koax, parallele Drähte, ... ideale metallische Randbed.
↳ beide Komponenten, transversale Richtung

$[\![\vec{E}_t]\!] = 0$, $[\![\vec{B}_n]\!] = 0$

$\Rightarrow$ kein Feld im Leiter, Zwischenraum perfekt isolierend (Ladgs- & Stromfreiheit)



$$c = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \quad , \quad Z_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Leitungsgleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + L' \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial I}{\partial x} + C' \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

allg. Lösung

$$U(x,t) = \hat{U}_1 g_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + \hat{U}_2 g_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$I(x,t) = \hat{I}_1 g_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + \hat{I}_2 g_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$\hat{U}_1 = Z_w \hat{I}_1 \quad ; \quad \hat{U}_2 = Z_w \hat{I}_2$$

Reflexionsfaktor:

$$r_A = \frac{R_A - Z_w}{R_A + Z_w}$$

$$r_E = \frac{R_E - Z_w}{R_E + Z_w}$$

27.4. Wellenimpedanz

$$c = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \qquad Z_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = c \cdot L' = \frac{1}{C'c}$$

bei diesen Konfigurationen sollte ich C' oder L' wissen (→GET1)

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad \underline{\text{Koax}}$$

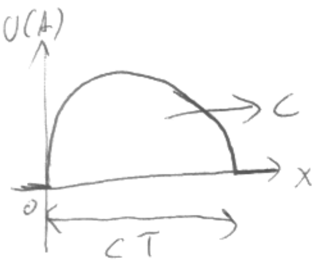
$$Z_w = \frac{1}{cC'} = \frac{\ln\left(\frac{D}{d}\right)\sqrt{\mu\varepsilon}}{2\pi\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{\ln\frac{D}{d}}{2\pi} = 138\,\Omega \qquad [D=10$$

<u>Bandleitung:</u> $C' = \varepsilon \cdot \frac{b}{a} \Rightarrow Z_w = 38\,\Omega$

<u>2-Draht-Leitung:</u> $C' = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{2D}{d}\right)}$

⚠ Umformungen merken, C' oder L' merken

27.5. Stromverlauf in Abschlusswiderstand



$$U_1 = \hat{U}_1\, g\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) & 0 \le t \le T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

$\sin(\omega t)$
$\hookrightarrow 2\pi f t = \frac{2\pi t}{T}$

doppelter Weg da nur Sinuswelle

$$r_A = \frac{R_A - Z_w}{R_A + Z_w} \Rightarrow U_2 = \hat{U}_1\, r_A \cdot g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

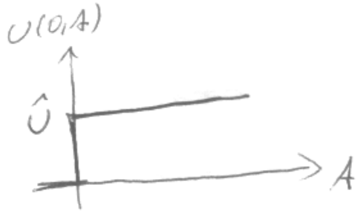
ACHTUNG! muss schauen wo ich die Ortszählung beginne damit die Wellenprofile möglichst einfach werden.

Lege fest: <u>x=0</u> ist im Abschlusswiderstand:

$$\begin{aligned} U(x,t) &= U_1(x=0) + U_2(x=0). \\ &= \hat{U} \cdot g(t) + r \cdot \hat{U}\, g(t) \\ &= \left(\frac{R - Z_w}{R + Z_w} + 1\right) \hat{U} g(t) \\ &= \frac{2R}{R + Z_w}\, \hat{U} g(t) = i(t) \cdot R \quad \Rightarrow i(t) = \frac{2\hat{U}}{R + Z_w} \cdot g(t) \end{aligned}$$

Zw auf 1 bringen und kürzen

27.6. Sprungwellen



ges.: Spannungsverteilung entlang Leitungen

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases} \qquad \underline{r_A} = \frac{R - Z_w}{R + Z_w} \approx \underline{+1}$$

Leerlauf $\Rightarrow R_A \to \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} = 1$

$R_E = 0 \Rightarrow \underline{\underline{r_E = -1}}$

lege Spannungssprung an Eingang

$x = l$ ... Ende der Leitung

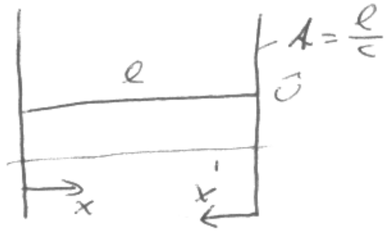
$0 < t < \frac{l}{c}$: nur hinlaufende Welle:

$U(x,t) = \hat{U} \cdot g\left(t - \frac{x}{c}\right)$

$\frac{l}{c} < t < \frac{2l}{c}$: $g\left(t' - \frac{x'}{c}\right) = g\left(t - \frac{l}{c} - \frac{l-x}{c}\right) = g\left(t + \frac{x-2l}{c}\right)$

$t' = t - \frac{l}{c}$

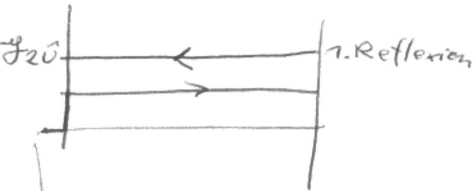
$x' = l - x$



$U(x,t) = \hat{U}\left[g\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c} - \frac{2l}{c}\right)\right]$

$\hat{U}_2 = r_A \hat{U}_1 = \hat{U}_1 \quad$ da $r_A = 1$

$\hat{U} = 2\hat{U}_1$, $\hat{U}_1$ ... am Ausgang anliegende Spannung



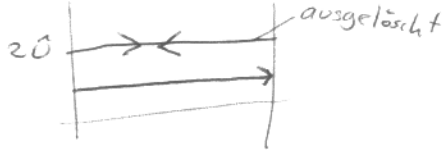
$\frac{2l}{c} < t < \frac{3l}{c}$: $g\left(t'' - \frac{x}{c}\right) = g\left(t - \frac{2l}{c} - \frac{x}{c}\right)$

$t'' = t - \frac{2l}{c}$

$\hat{U}_3 = r_E \hat{U}_2 = -\hat{U}_1$

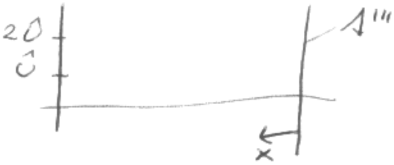
$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \hat{U}_3 = \hat{U}_1 + \cancel{\hat{U}_1} - \cancel{\hat{U}_1}$

negativ laufende Welle mit pos. Amplitude frisst 1 Teilwelle auf.



$\frac{3l}{c} < t < \frac{4l}{c}$: $g\left(t''' - \frac{x}{c}\right) = g\left(t - \frac{3l}{c} - \frac{l-x}{c}\right)$

$t''' = t - \frac{3l}{c}$, $x' = l - x$



$\hat{U}_4 = r_A \hat{U}_3 = -\hat{U}_1$

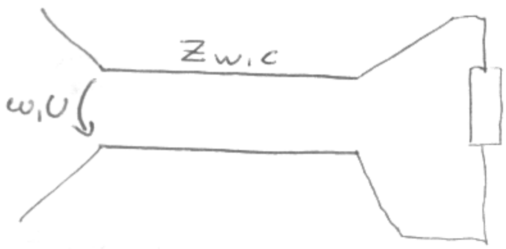
$\hat{U} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \hat{U}_3 + \hat{U}_4 = \hat{U}_1 + \hat{U}_1 - \hat{U}_1 - \hat{U}_1 = 0$

$\hat{U}_4$ frisst 1. Wellenteil auf, $\rightarrow$ alles ausgelöscht.

mit $\hat{U}_5$ beginnt der Spaß wieder von vorne.

$t - \frac{l}{c} + t + \frac{l}{c} - \frac{2l}{c} = 2t - \frac{2l}{c} = 2g(t)$ ... doppelte Spannung!

EINGESCHWUNGENE ZUSTÄNDE



Phasenkoeffizient: $\beta = \frac{\omega}{c}$

$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$

$$\underline{U}(x) = \frac{\underline{Z}_A \cos[\beta(l-x)] + j\underline{Z}_w \sin[\beta(l-x)]}{\underline{Z}_A \cos(\beta l) + j Z_w \sin(\beta l)} \underline{U}(0)$$

$$\underline{I}(x) = \frac{Z_w \cos[\beta(l-x)] + j\,\underline{Z}_A \sin[\beta(l-x)]}{\underline{Z}_A \cos(\beta l) + j Z_w \sin(\beta l} \cdot \frac{\underline{U}_0}{Z_w}$$

bei offenem Ausgang: $\underline{Z}_A = \infty$

27.7. Spannung am Leiter~~anfang~~ausgang

kann wegen $\underline{Z}_A = \infty$ Im ~~ka~~ vernachlässigen und $\underline{Z}_A$ kürzen

$x = l: \underline{U}_x = \underline{U}_0$ $\qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}, \ \lambda = \frac{c_0}{f} = 60\,m$

$\underline{U}(l) = \frac{\underline{U}_0}{\cos(\beta l} = \frac{U_0}{|\cos\frac{2\pi l}{\lambda}|} = 4\,V_{eff}$ → doppelte Eingangsspannung

27.8. Eingangsimpedanz $\frac{\lambda}{4}$-Leitung

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}, \ l = \frac{\lambda}{4}, \quad \beta l = \frac{2\pi}{\cancel{\lambda}} \cdot \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{4}} = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{U(x)}{I(x)} = \underline{Z}_{\cancel{in}} = Z_w \cdot \frac{\underline{Z}_A \overbrace{\cos(\beta l)}^{0} + j Z_w \overbrace{\sin(\beta l)}^{1}}{Z_w \cos(\beta l) + j\, Z_A \sin(\beta l)} = Z_w \frac{\cancel{j} Z_w}{\cancel{j} \underline{Z}_A} = \frac{Z_w^2}{\underline{Z}_A} = \underline{Z}_{in}$$

ERGÄNZUNG ZU LEISTUNGSGRÖßEN IN 3-PHASEN SYSTEMEN

$\underline{S} = 3 \cdot \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* = \sqrt{3} \cdot e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot \underline{U}_{12} \cdot \underline{I}_1^*$

$S = 3 U_1 I_1$

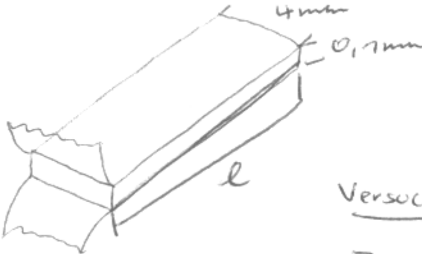
$P = 3 U_1 I_1 \cos\varphi$

$Q = 3 U_1 I_1 \sin\varphi$

!

gesuchte Leistung = 3 x Stromgleichung um $\frac{\pi}{6}$ phasenverschoben

27.9. Leitungsstück als Resonanzelement



$f_0 = 1\,GHz$

ges.: l wenn offen

$\rightarrow \underline{Z}_{in} = 0$ → Imaginärteil soll ~~0 sein~~ Nullstelle haben

→ dann habe ich Reihenresonanz

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

__Versuch 1: $\underline{Z}_A = 0$__

$$\underline{Z}_{in} = \cancel{Z_w} \cdot \frac{j Z_w \sin \beta l}{\cancel{Z_w} \cos \beta l} = j Z_w \tan(\beta l) = j Z_w \underbrace{\tan\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}_{\text{soll 0 sein:}}$$

$\cancel{\tan\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}$ ~~ist~~ $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot l = \pi$

$l = \frac{\lambda}{2}$ ... 1. Nullstelle

__Versuch 2: $\underline{Z}_A = \infty$, Ausgang offen__

$$\underline{Z}_{in} = Z_w \frac{\cos \beta l}{j \sin \beta l} = -j Z_w \operatorname{cotan}(\beta l)$$

$\cot = 0$ bei $\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow l = \frac{\lambda}{4}$ ... 2. Nullstelle

⇒ Element wird kürzer wenn Eingang offen:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c_0}{f \cdot \sqrt{\varepsilon_r}} = 0{,}18\,m \quad \Rightarrow l = \frac{\lambda}{4} = 45\,mm$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$$