Diese Zusammenstellung von wichtigen Formeln und Regeln habe ich im Zuge des Lernens für Automatisierungstechnik geschrieben. Zum Lernen kann ich folgende Literatur empfehlen:

- *Signale-&-Systeme*, P . P
- *Regelungstechnik,* O F¨
- *Regelungen - Band 1, Analyse und Entwurf*, P . A W

Großteils stammt nachfolgende Zusammenfassung auch von diesen Quellen! Anregungen, Kritik bzw. Fehlerberichte bitte per Elektro-Post schicken. ;-)

F X , flox@drdos.org, 25. November 2006

1 Allgemein

Laplace-Transformation

Will man von der Differenzialgleichung auf die Übertragungsfunktion kommen, kann man die Laplace-Transformation anwenden.

$$\dot{y}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, sY(s) - y(0-) \tag{1}$$

$$\int_{0^-}^{t} y(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s}Y(s) \tag{2}$$

Folgende Korrespondenzen werden häufig verwendet:

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s} \tag{3}$$

$$f^k/k! \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^{-k-1} \tag{4}$$

$$\sin\omega_0 t \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \tag{5}$$

$$\cos\omega_0 t \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \tag{6}$$

$$e^{-at}\sin\omega_0 t \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2} \tag{7}$$

$$e^{-at}\cos\omega_0 t \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2} \tag{8}$$

$$\text{Rampe der Länge} T_v \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1-e^{-T_v s}}{T_v s^2} \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

Ansatz für Partialbruchzerlegung

$$k_1\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2} + k_2\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2} \tag{11}$$

Residuum-Methode

bei Partialbruchzerlegungen (ohne Doppelpol)

$$r_k = (s-p)F(s)|_{s=p} \tag{12}$$

Übertragungsfunktionen

$$F_o(s) := G(s)K(s) \tag{13}$$

$$T(s) := \frac{Y(s)}{Y_{ref}(s)} = \frac{F_o(s)}{1+F_o(s)} \tag{14}$$

$$F_{st}(s) := \frac{Y(s)}{W_{di}(s)} = \frac{G(s)}{1+F_o(s)} \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

Überschwingweite

$$\Delta h := h_{max} - h_\infty \tag{17}$$

$$\text{bezogen: } \Delta h := \frac{h_{max}-h_\infty}{h_\infty}100\% \tag{18}$$

PT_2-Glied

$$\frac{V\omega^2}{\omega_N^2 + 2D\omega_N s + s^2} = \frac{V}{1 + \frac{2D}{\omega_N}s + \frac{1}{\omega_N^2}s^2} \quad (19)$$

$$\Delta h = e^{\frac{-\pi D}{\sqrt{1-D^2}}} \quad (20)$$

$$\text{Überschwingzeit: } T_{\text{ü}} = \frac{\pi}{\omega_N\sqrt{1-D^2}} \quad (21)$$

$$\text{Ausregelzeit: } t_{2\%} = \frac{4}{\omega_N D} \quad (22)$$

Anfangswerttheorem

$$x_0 = \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to\infty} sX(s) \quad (23)$$

Endwerttheorem

$$x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) \quad (24)$$

Differentialgleichung

Es gibt zwei Arten, wie man auf die Differenzialgleichung eines Systems kommt.

- vorhandene Formeln verwenden
- Identifikation: über Sprungantwort

Phasenrand

$$\alpha_R = \pi + arg\{F_0(s)\} \quad (25)$$

Minimalphasensystem

Alle kritischen Stellen liegen auf der linken s-Halbebenen. Dadurch sind die Winkeländerungen im Bodediagramm auch minimal (kleiner als π).

2 Wurzelortskurve

Die Regeln werden großteils aus dem Buch **Regelungstechnik** *von* O F¨ *zitiert.* Für die Stabilitätsprüfung müssen die Pole von $T(s) = F_0/(1+F_0)$ anhand des Nenners betrachtet werden:

$$T(s) = \frac{F_0}{1+F_0} = \frac{P/Q}{1+P/Q} = \frac{P}{P+Q} \quad (26)$$

Das sogenannte Charakteristische Polynom von F_0 lautet $P + Q$ und somit kann man von F_0 auf die Stabilität des ganzen Systems schließen. Die WOK gibt dabei die Lage der Polstellen von $T(s)$ bei verschiedenen Verstärkungen V an. Der 1. Schritt ist das Aufzeichnen der Polstellen und Nullstellen von F_0 in der s-Ebene. Aus

$$1 + F_0 = 1 + \frac{P}{Q} = 0 \Rightarrow F_0 = -1 \quad (27)$$

die kann man mithilfe des Phasenarguments und des Amplitudenarguments schreiben:

$$|F_0| = 1 = \frac{|V||s - s_{N1}|\cdots}{|s - s_{P1}|\cdots} \quad (28)$$

$$arg\{F_0\} = \pi + 2k\pi = \quad (29)$$

$$= arg\{V\} + arg\{s - s_{N1}\} - arg\{s - s_{P1}\}\cdots \quad (30)$$

Mittels des Amplitudenarguments kann man sich auch die Verstärkung V ausrechnen!

Regel 1 (Nach ∞ strebende Äste):

$$\text{Anzahl} = n - r, \quad (31)$$

wobei n die höchste Potenz vom Nenner und r die höchste vom Zähler ist.

Regel 2: *Die Äste beginnen in den Polstellen des offenen Kreises und enden in den Nullstellen des offenen Kreises.*

Regel 3: *Die WOK ist symmetrisch zur reellen Achse.*

Regel 4: *Ein Punkt der reellen Achse gehört genau dann zur WOK, wenn rechts von ihm auf der reellen Achse eine ungerade Zahl kritischer Stellen des offenen Kreises liegen* (Doppelpol wird zweifach gezählt).

Regel 5: Der Verzweigungspunkt auf der reellen Achse kann mittels

$$\frac{dF_0}{ds} = 0 \tag{32}$$

berechnet werden.

Regel 6: *Die Asymptoten der ins Unendliche strebenden Wurzelortäste schneiden sich sämtliche in einem Punkt der reellen Achse, dem Wurzelschwerpunkt. Seine Abszisse ist*

$$\sigma_{WS} = \frac{-\sum \Re s_N + \sum \Re s_P}{n-r}. \tag{33}$$

Die Anstiegswinkel der Asymptoten der WOK sind

$$\phi_i = (2i+1)\frac{\pi}{n-r}. \tag{34}$$

Regel 7: Schneiden sich im Verzweigungspunkt a Äste, das ist gleichbedeutend mit dem Schnittpunkt von $2a$ Kurven, so ist der Schnittwinkel zwischen den Kurven

$$\Delta\Phi = \frac{\pi}{r} \tag{35}$$

Regel 8 (Stabilität des Regelkreises): Ist ab bzw. bis zu jenem V gegeben, bei dem die kritischen Stellen auf der linken Halbebene liegen.

3 Bodediagramm

Dieser Teil stammt von einer Mitschrift von Prof. Prechtls Vorlesung Signale-und-Systeme und gilt nur für rationale Übertragungsfunktionen.

Schritt 1: Bestimmen der Asymptote $G_0(s \to 0) := Ks^r$ (K ist eine Konstante, r kann auch 0 sein.) Diese wird für den Startwert bei ω_{links} im Diagramm benötigt!

Schritt 2 (Knickfrequenzen): Diese werden von den kritischen Stellen bestimmt:

- $\omega_{kP} = |\Re\{s_P\}|$
- $\omega_{kN} = |\Re\{s_N\}|$.

Die Frequenzskala sollte jeweils eine Dekade kleiner als die kleinste sowie eine Dekade größer als die gröste Knickfrequenz begonnen werden. Die Frequenzachse besteht daher aus einem Intervall $[\omega_{links}, \omega_{rechts}]$.

3.1 Betragsfrequenzgang

Schritt 3 (Linke Rand): Der Wert am linken Rand beträgt

$$20\log|G_0(j\omega_{links})|dB = 20\log|K\omega_{links}^r|dB, \tag{36}$$

die Randsteigung (laut Asymptote:)

$$r \cdot 20dB/Dekade \tag{37}$$

Die Steigung gilt bis zur ersten Knickfrequenz!

Schritt 4 (Geradenzug konstruieren): Der Geradenzug wird von links nach rechts aufgetragen. Bei jeder Knickfrequenz muss die Steigung addiert werden.

- $+20dB/Dekade$ bei ω_N (einfache N)

- $+40dB/Dekade$ bei ω_N (zweifache N)
- $-20dB/Dekade$ bei ω_P (einfache P)
- $-40dB/Dekade$ bei ω_P (zweifache P)

$-40dB/Dekade$ bzw. $+40dB/Dekade$ auch bei quadratischem Term zeichnen!

Schritt 5 (Abweichungen): Abweichungen bei den Knickfrequenzen müssen noch bestimmt werden.

- $+3dB$ (einfache N)
- $+6dB$ (zweifache N)
- $-3dB$ (einfache P)
- $-6dB$ (zweifache P)

$-20\log(2D)dB$ bzw. $+20\log(2D)dB$ für quadratischen Term (Schwingungsterm) zeichnen! Danach den „glatten Verlauf" zeichnen.

3.2 Winkelfrequenzgang

Auch der Winkelfrequenzgang wird von links nach rechts aufgetragen.

Schritt 6 (Linke Rand): Der linke Rand wird wie beim Amplitudengang mittels der asymptotischen Form bestimmt:

$$arg\{G_0(j\omega_{links})\} \tag{38}$$

Schritt 7: Winkeländerungen treten bei dieser Approximation *nur* bei den Knickfrequenzen ein (HE...Halbebene, l und r bezeichnen links und rechts).

- $+\pi/2$ (einfache N l HE oder P r HE)
- $+\pi$ (zweifache N l HE oder P r HE)
- $-\pi/2$ (einfache P l HE oder N r HE)
- $-\pi$ (zweifache P)

$-\pi$ bzw. $+\pi$ auch bei quadratischem Term zeichnen! Zuletzt sollte der „glatte Verlauf" gezeichnet werden.

4 Stabilität

4.1 Stabilitätskriterium nach R

Das Kriterium ist einfach im Buch *Regelungen - Band 1, Analyse und Entwurf* von P . A W erklärt. Wenn man einmal ein Bsp. gerechnet hat, sollte es kein Problem sein.

4.2 Beiwertbedingung

Wird ebenfalls zur Bestimmung der Stabilitätsgrenze von einem Regelkreis verwendet. Man nimmt wieder das charakteristische Polynom

$$P(j\omega) + Q(j\omega) = 0 \tag{39}$$

zur Hand. Eine Zeitkonstante (T) von einer Polstelle muss dabei variabel sein. Trennt man diese Gleichung in Real- und Imaginär-Teil, kann man beide Teile getrennt gleich Null setzen. Dadurch bekommt man zwei Gleichungen, eine mit V und T, und eine mit ω und T. Dadurch kann man ein V-T-Diagramm zeichnen mit der Stabilitätsgrenze als resultierende Kurve. Weiters kann man einige Werte der Frquenz ω eintragen.

4.3 Stabilitätskriterium nach N

Die Herleitung steht gut erklärt im Online-Regelungstechnik-Kurs des ACIN-Institutes.

Eine wichtige Formel, die man sich merken muss möchte ich hier allerdings angeben:

$$U = -anzPol_{rechteHE} F_0(s) \tag{40}$$

U bezeichnet dabei die Umdrehung im positiven Umdrehungssinn.

5 Zustandsraum f. lineare Syst.

Die Herleitung ist recht einfach und steht im Skriptum von Prof. Prechtl (Signale-und-Systeme).

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{41}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{42}$$

A...Systemmatrix
B...Eingangsmatrix
C...Ausgangsmatrix
D...Durchgriffsmatrix
u...Eingangsvektor
y...Ausgangsvektor
x...Zustandsvektor

Für einfache SISO-Systeme[1] „vereinfacht“ sie sich zu folgenden Zusammenhängen[2]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{43}$$

$$y = \mathbf{C}^T\mathbf{x} + du \tag{44}$$

Im genannten Skriptum steht auch die Herleitung von folgendem Zusammenhang:

$$det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \text{charakt. Gleichung} \tag{45}$$

[1]Single-Input-Single-Output-Systeme

[2]Einfache Variablen sind durch normale Schrift gekennzeichnet, Vektoren durch fett geschriebene Kleinbuchstaben und Matrizen durch fett geschriebene Großbuchstaben.

Diesen kann man zum Ausrechnen der Polstellen verwenden. Interessant ist, dass die Dimension des $\dot{\mathbf{x}}$-Vektors, die Anzahl der „Energiespeicher“ und die Anzahl der verschiedenen Zustandsspeicher gleich ist. Der Zustandsraum bildet einen Normierten Raum, daher ist eine Norm (z.B.: euklidische) und ein Innprodukt definiert.

5.1 Zustandsregler

Ein Regler **K** kann (alle) Zustandsvariablen $\mathbf{x}(t)$ zur Regelung verwenden, dadurch gibt es eine zusätzliche Rückkopplung:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \tag{46}$$

bzw. bei SISO-Systemen

$$u(t) = \mathbf{k}^T\mathbf{x}(t) \tag{47}$$

(Hinweis: Probleme kann es geben, falls es nicht messbare Zustandsgrößen gibt) Aus (46) wird daher

$$det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = \text{charakt. Gleichung} \tag{48}$$

6 Optimieren von Reglern

Betragsoptimum

Bei dem Betragsoptimum nutzt man die Tatsache, dass für möglichst hohe Frequenzen die Führungsübertragungsfunktion $T(s)$ konstant $0dB$ betragen soll. Durch Betragsbildung von $T(s)$ und Umschreiben, sodass im Zähler 1 steht, kann man sich die optimalen Zeitkonstanten ausrechnen.

$$|T(s)| = 1 \tag{49}$$

Symmetrisches Optimum

Dieses Kriterium kann man leicht mithilfe des Bodediagramms erklären. Man möchte wegen besserem Stabilitätsverhalten um die Durchtrittsfrequenz ω_D symmetrisch eine Steigung von $-20dB/Dekade$ haben. Damit muss die Durchtrittsfrquenz der Mittelwert (im logarithmischen Bodediagramm!) zwischen der vorhergehenden und nachfolgenden Knickfrequenz sein:

$$\log(\omega_D) = \frac{1}{2}(\log \omega_{k1} + \log \omega_{k2}) \tag{50}$$