Bitte die Lösungen mit Vorsicht genießen. Fehler bitte hier `http://www.et-forum.org/index.php?showtopic=6011` melden!

Und viel Erfolg bei der Prüfung.

1 Klausur vom 7. März 2008

Aufgabe 1 .

a) .

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)\\ y &= g(\mathbf{x}, u)\end{aligned}$$

$$C_2(u_{c2}) = C_{20} + C_{21}\, u_{c2}^2,\ C_{20}, C_{21} > 0$$

$$\mathbf{x} = [u_{c1},\ u_{c2}]^T$$

$$\begin{aligned}y &= R_2 i_2 + u_{c2}\\ -i_2 &= \underbrace{\frac{u}{R_0}}_{i_0} + \underbrace{\frac{u - u_{c1}}{R_1}}_{i_1} = i_0 + i_1\\ y = g(\mathbf{x}, u) &:= u_{c2} - \frac{R_2}{R_0}u + \frac{R_2}{R_1}u_{c1} - \frac{R_2}{R_1}u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_1 \dot{u}_{c1} &= i_1\\ \Rightarrow\ \dot{u}_{c1} &= \frac{u - u_{c1}}{R_1 C_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(C_2(u_{c2})u_{c2}\right) &= \left(2C_{21}u_{c2}^2 + C_2(u_{c2})\right)\dot{u}_{c2} = i_2\\ \Rightarrow\ \dot{u}_{c2} &= -\frac{1}{2C_{21}u_{c2}^2 + C_2(u_{c2})}\left(\frac{u}{R_0} - \frac{u - u_{c1}}{R_1}\right)\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}\dot{u}_{c1}\\ \dot{u}_{c2}\end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) := \begin{bmatrix}\frac{u}{R_1C_1} - \frac{u_{c1}}{R_1C_1}\\ -\frac{1}{2C_{21}u_{c2}^2 + C_2(u_{c2})}\left(\frac{u}{R_0} - \frac{u - u_{c1}}{R_1}\right)\end{bmatrix}$$

b) .

Bestimmen aller Ruhelagen für $u = 0$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

$$0 = \frac{u}{R_1 C_1} - \frac{u_{c1}}{R_1 C_1} \quad \Rightarrow \quad u = u_{c1} = 0$$

$$0 = -\cancel{\frac{1}{2C_{21}u_{c2}^2 + C_2(u_{c2})}} \left(\cancel{\frac{u}{R_0}} + \cancel{\frac{u - u_{c1}}{R_1}} \right) \quad \Rightarrow \quad u_{c2} \text{ beliebig}$$

Linearisieren um die Ruhelage $u = u_{c1} = u_{c2} = 0$

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\, u=u_R} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial u_{c1}} f_{u_c1}(\mathbf{x}, u)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\, u=u_R} & \left.\frac{\partial}{\partial u_{c2}} f_{u_c1}(\mathbf{x}, u)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\, u=u_R} \\ \left.\frac{\partial}{\partial u_{c1}} f_{u_c2}(\mathbf{x}, u)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\, u=u_R} & \left.\frac{\partial}{\partial u_{c2}} f_{u_c2}(\mathbf{x}, u)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\, u=u_R} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ \frac{1}{C_{20} R_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \left.\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\, u=u_R} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial u} f_{u_{c1}}(\mathbf{x}, u)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\, u=u_R} \\ \left.\frac{\partial}{\partial u} f_{u_{c2}}(\mathbf{x}, u)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\, u=u_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ -\frac{1}{C_{20} R_1} - \frac{1}{R_0 C_{20}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}, u)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\, u=u_R} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial u_{c1}} g(\mathbf{x}, u)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\, u=u_R} & \left.\frac{\partial}{\partial u_{c2}} g(\mathbf{x}, u)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\, u=u_R} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = \left.\frac{\partial}{\partial u} g(\mathbf{x}, u)\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\, u=u_R} = -\frac{R_2}{R_0} - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ \frac{1}{C_{20} R_1} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ -\frac{1}{C_{20} R_1} - \frac{1}{R_0 C_{20}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \mathbf{x} - \underbrace{\left(\frac{R_2}{R_0} + \frac{R_2}{R_1} \right)}_{d}$$

c) .

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \mathbf{c}^T \left(s\mathbf{1} - \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{b} + d \\
s\mathbf{1} - \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} s + \frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ -\frac{1}{C_{20} R_1} & s \end{bmatrix} \\
\left(s\mathbf{1} - \mathbf{A}\right)^{-1} &= \frac{1}{s^2 + \frac{s}{C_1 R_1}} \begin{bmatrix} s & 0 \\ \frac{1}{C_{20} R_1} & s + \frac{1}{C_1 R_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s + \frac{1}{C_1 R_1}} & 0 \\ \frac{1}{C_{20} R_1 s^2 + s \frac{C_{20}}{C_1}} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \\
\left(s\mathbf{1} - \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s C_1 R_1 + 1} & 0 \\ \frac{1}{C_{20} C_1 R_1^2 s^2 + s C_{20} R_1} & \frac{1}{s C_1 R_1} \end{bmatrix} \\
\mathbf{c}^T \left(s\mathbf{1} - \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{b} + d &= \frac{R_2}{s C_1 R_1^2 + R_1} + \frac{1}{C_{20} C_1 R_1^2 s^2 + s C_{20} C_1} - \left(\frac{R_2}{R_0} + \frac{R_2}{R_1}\right)
\end{aligned}
$$

Weiter auflösen und dann Koeffizienten vergleich. Ergibt aber riesige unhandliche Terme.

d) .

$$
\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}, & \mathbf{A}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{(C_1 R_1)^2} \\ -\frac{1}{C_{20} R_1} - \frac{1}{R_1 C_{20}} & -\frac{1}{C_1 C_{20} R_1^2} \end{bmatrix}
$$

$$
\mathrm{rang}(\mathcal{R}) = 2 \;\Rightarrow\; \text{vollst. Erreichbar}
$$

Aufgabe 2 .

a) .

Linearitär (S.19, Definition 2.1.):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{h}(a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2, \mathbf{0}, t) &= a\mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{0}, t) + b\mathbf{h}(\mathbf{x}_2, \mathbf{0}, t) \\
\mathbf{h}(\mathbf{0}, a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2, t) &= a\mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_1, t) + b\mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_2, t) \\
\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, t) + \mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{u}, t)
\end{aligned}
$$

Zeitinvarianz (S. 21, Definition 2.2.):
$y(t)$ für Anfangswert $x(t_0)$ und Eingang $u(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$
$\Rightarrow y(t-T)$ für Anfangswert $x(t_0+T)$ und Eingang $u(\tau-T)$, $t_0+T \leq \tau \leq t+T$

b) .

S. 96, Definition 4.1/Satz 4.1:

A) $1 + K(s)G(s) = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}(s) < 0$

B) Im Produkt $K(s)G(s)$ treten keine Pol/Nullstellenkürzungen für Pole oder Nullstellen $s : i$ mit $Re(s_i) \geq 0$ auf.

c) .

$$
\begin{aligned}
A(s) &= \frac{K}{s^2+1} \\
B(s) &= \frac{1}{s}\frac{1}{s^2+2s+2} \\
w &= (y-w)B(s) \;\Rightarrow\; w = y\frac{B(s)}{1+B(s)} \\
y &= (r-w)A(s) = rA(s) - yA(s)\frac{B(s)}{1+B(s)}
\end{aligned}
$$

$$
y\left(1+\frac{A(s)B(s)}{1+B(s)}\right) = rA(s) = \frac{\frac{K}{s^2+1} + \frac{K}{s^2+1}\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+2s+2}}{1+\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+2s+2} + \frac{K}{s^2+1}\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+2s+2}} =
$$

$$
= \frac{Ks(s^2+2s+2)+K}{(s^2+1)s(s^2+2s+2)+(s^2+1)+K} = \frac{Ks(s^2+2s+2)+K}{s^5+2s^4+3s^3+3s^2+2s+(1+K)}
$$

Routh-Hurwitz:

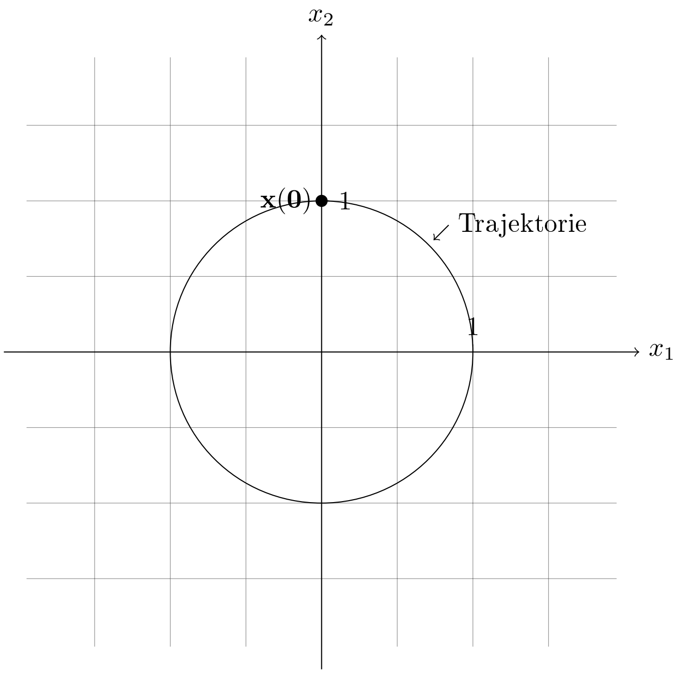
$$
\begin{array}{c|cccc}
s^5 & 1 & 3 & 2 & 0 \\
s^4 & 2 & 3 & 1+K & 0 \\
s^3 & \frac{3}{2} & \frac{3-K}{2} & 0 & \\
s^2 & 1+\frac{2}{3}K & 1+K & 0 & \\
s^1 & -\frac{K(3+K)}{3+2K} & 0 & & \\
s^0 & 1+K & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
1+\frac{2}{3}K > 0 &\;\Rightarrow\; K > -\frac{3}{2} \\
-\frac{K(3+K)}{3+2K} > 0 &\;\Rightarrow\; -\frac{3}{2} < K < 0 \text{ oder } K < -3 \\
1+K > 0 &\;\Rightarrow\; K > -1
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\; -1 < K < 0
$$

d) .

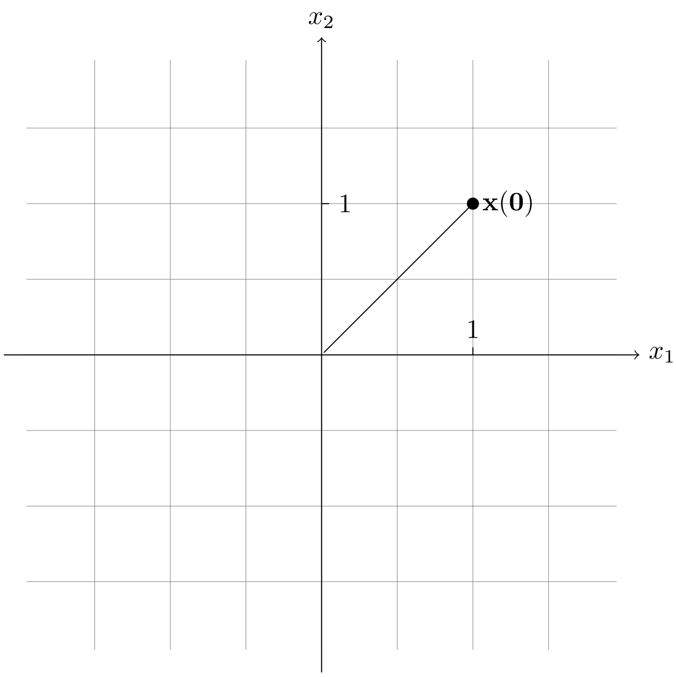
$$
\begin{gathered}
\dot{x}_1 = -x_2, \quad x_1(0) = 0 \\
\dot{x}_2 = x_1, \quad x_2(0) = 1 \\
\text{offensichtliche Lösung:} \\
x_1(t) = \sin(t), \quad x_2(t) = \cos(t)
\end{gathered}
$$



$$\dot{x}_1 = -\pi x_1, \quad x_1(0) = 1$$
$$\dot{x}_2 = -\pi x_2, \quad x_2(0) = 1$$

offensichtliche Lösung:

$$x_1(t) = x_2(t) = \exp(-\pi t)$$



Aufgabe 3 .

a) .

Die Ausgangsfolge (u_k) erhält man durch Faltung der Eingangsfolge (y_k) mit der Impulsantwort (g_k) ($(y_k) = (u_k)*(g_k)$). Nun kann man an der Ausgangsfolge erkennen, dass die Eingangsfolge verzögert und gedämpft wird. Also muss die Impulsantwort bei $k = 0$ $g_0 = 0$ sein und bei $k = 1$ einen Wert $g_1 < 1$ haben. Mittels $3g_1 = 1,5$ lässt sich dieser Wert zu $g_1 = \frac{1}{2}$ ermitteln. Der dritte Wert der Ausgangsfolge $y_3 = -\frac{1}{4}$ is jedoch ungleich $u_2 g_1 = -1$. Daraus ergibt sich, dass es noch einen weiteren Verzögerungsterm bei $k = 2$ geben muss, der sich über $u_2 g_1 + u_1 g_2 = -\frac{1}{4}$ zu $g_2 = \frac{1}{4}$ ermitteln lässt. Weiters sieht man an $u_3 g_1 + u_2 g_2 = 0 = y_3$ und $u_3 g_2 = \frac{1}{4}$ das es keine weiteren Überlagerungen mehr gibt. Die Impulsantwort muss also die Form $(g_k) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \ldots)$ haben, was Abbildung 5. (ii) entspricht.

b) .

$$\delta_k = \begin{cases} 1: & k = 0 \\ 0: & k \neq 0 \end{cases}$$

$$g_k = \frac{1}{2}\delta_{k-1} + \frac{1}{4}\delta_{k-2}$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{z^2} = \frac{2z+1}{4z^2}$$

c) .

BIBO-Stabilität anhand der Impulsantwort (Satz 6.5, S. 146)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < \infty \;\Rightarrow\; \text{BIBO-Stabil}$$

BIBO-Stabilität anhand der Übertragungsfunktion (Satz 6.6, S. 147)

$$4z^2 = 0 \;\Rightarrow\; z_{p1,2} = 0 < 1 \;\Rightarrow\; \text{BIBO-Stabil}$$

d) .

Allgemein: $(y_k) = \left(A_0 \left|G(e^{I\omega_0 T_a})\right| \sin(\omega_0 T_a k + \varphi_0 + \arg(G(e^{I\omega_0 T_a})))\right)$ (6.77), s: 147

$$u_k = 2\sin(k\frac{\pi}{2}) - 1^k \qquad -1^k \text{ als Sinus mit Frequenz } \omega_0 = 0 \text{ behandeln.}$$
$$(y_k) = \left(2\left|G(e^{I\frac{\pi}{2}})\right| \sin(k\frac{\pi}{2} + \arg(G(e^{I\frac{\pi}{2}}))) - \left|G(e^{I0})\right| 1^k\right)$$

$$\text{für } \omega_0 T_a = \frac{\pi}{2}:$$
$$G(e^{I\omega_0 T_a}) = G(I) = -\frac{2I+1}{4} = -\frac{1}{4} - I\frac{1}{2}$$
$$\left|G(e^{I\omega_0 T_a})\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$
$$\arg(G(e^{I\omega_0 T_a})) = \arctan(2) - \pi$$

$$\text{für } \omega_0 T_a = 0:$$
$$G(e^{I0}) = G(1) = \frac{3}{4}$$

$$(y_k) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(k\frac{\pi}{2} + \arctan(2-\pi)) - \frac{3}{4}1^k\right)$$

e) .

Die Abtastung entspricht einer Abbildung $z = \exp(sT_a)$.

Aufgabe 4 .

$$G(s) = \frac{0,5}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

a) .

Was versteht man unter einer phasenminimalen Übertragungsfunktion?
S. 73, **Def. 3.6.**: Pol-, Nullstellen in der linken Halbebene.

Ist $G(s)$ phasenminimal?

$$\text{Pole: } 0 = s\left(\frac{s}{2}+1\right) \Rightarrow s_{p1} = 0$$
$$0 = \frac{s}{2} + 1 \Rightarrow s_{p2} = -2$$

Nullstellen: Keine

$s_{p1} = 0$ liegt nicht in der linken Halbebene $\Rightarrow$ nicht phasenminimal

b) .

$$
\begin{aligned}
G(I\omega) &= \frac{0,5}{I\omega\left(\frac{I\omega}{2}+1\right)} = \frac{1}{2}\left(I\omega - \frac{\omega^2}{2}\right)^{-1} \\
|G(I\omega)|_{\mathrm{dB}} &= \underbrace{-40\mathrm{dB}\log(\sqrt{2})}_{-6{,}0206\mathrm{dB}} - 20\mathrm{dB}\log(\sqrt{\left[\left(-\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^2 + \omega^2}\,) \\
\omega_k &= \sqrt{2},\ \xi_k = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
|G(I\omega)|_{\mathrm{dB}} &= -6,0206\mathrm{dB} - 20\mathrm{dB}\log(\sqrt{\left[\left(-\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^2 + \left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2}\,) = \\
&= -6,0206\mathrm{dB} - \begin{cases} 20\mathrm{dB}\log(\omega): & \frac{\omega}{\omega_k} \ll 1 \\ 20\mathrm{dB}\log(\sqrt{3}): & \frac{\omega}{\omega_k} = 1 \\ 40\mathrm{dB}\log(\frac{\omega}{\sqrt{2}}): & \frac{\omega}{\omega_k} \gg 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\arg(G(I\omega)) &= \underbrace{\arg(\frac{1}{2})}_{0} - \arg(I\omega - \left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2) = \\
&= -\arctan(\frac{\omega}{-\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2}) = -\arctan(-\frac{2}{\omega}) = \begin{cases} -90^\circ: & \frac{\omega}{\omega_k} \ll 1 \\ -\arctan(-\sqrt{2}): & \frac{\omega}{\omega_k} = 1 \\ -180^\circ: & \frac{\omega}{\omega_k} \gg 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

c) .

$$
\begin{aligned}
\omega_c t_r &\approx 1,5 \\
\Rightarrow\ \omega_c &= 1,5\mathrm{s}^{-1} \\
\Phi + &\approx 70^\circ \\
\Rightarrow\ \Phi &= 60^\circ
\end{aligned}
$$

i)

$$d = 0$$

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{V_R}{2}\frac{\cancel{1+\frac{s}{2}}}{s\cancel{(\frac{s}{2}+1)}(1+sT_R)} = \frac{V_R}{2}\frac{1}{s\,(1+sT_R)}$$

$$\Phi - \pi = \arg(L(I\omega_c)) = arg(\frac{V_R}{2}\frac{1}{I\omega_c\,(1+I\omega_c T_R)}) = \underbrace{\arg(\frac{V_R}{2})}_{0} - \underbrace{\arg(I\omega_c)}_{90°} - \arg(1+I\omega_c T_R) =$$

$$= -90° - \arctan(\frac{\omega_c T_R}{1}) = 60° - 180°$$

$$\Rightarrow \; T_R = \frac{\tan(30°)}{\omega_c} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

$$0\text{dB} = |L(I\omega_c)|_{\text{dB}} = \cancel{20\text{dB}}\log(\left|\frac{V_R}{2}\frac{1}{I\omega_c\,(1+I\omega_c T_R)}\right|) =$$

$$= \log(\frac{V_R}{2}) - \log(\left|I\omega_c - \omega_c^2 T_R\right|) = \log(\frac{V_R}{2}) - \log(\sqrt{\omega_c^2 - (\omega_c^2 T_R)^2})$$

$$\Rightarrow \; \frac{V_R}{2} = \sqrt{\omega_c^2 - (\omega_c^2 T_R)^2}$$

$$\Rightarrow \; V_R = 2\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = 2\sqrt{3}$$

ii)
Siehe Seite 109

(A) Verstärkung V und Totzeit T_t positiv.
$V = 2\sqrt{3} \geq 0, \qquad T_t = 0 \geq 0$

(B) $\text{grad}(n_L(s)) + \rho > \text{grad}(z_L(s))$
$1 + 1 = 2 > 0$

(C) $n_L(s)$-Hurwitzpolynom und $\rho \in \{0, 1, 2\}$.
$\text{grad}(n_L(s)) = 1 \leq 2 \;\Rightarrow$ Hinreichende Bedingung: Alle Koeffizienten vorhanden und Vorzeichen gleich.
Koeffizienten: 1, T_R vorhanden und gleiches Vorzeichen
$\rho = 1 \in \{0, 1, 2\}$

(D) Bodediagramm schneidet die 0dB-Linie nur einmal.
Ja, da man $L(I\omega)$ in Punkt i so dimensioniert hat und $\text{grad}(z_L(s)) = 0$ ist

(E) Die Ortskurve von $L(I\omega)$ umkreist den Nullpunkt höchstens einmal vollständig.
siehe Punkt iii

iii)

$$L(I\omega) = \frac{\sqrt{3}}{I\omega\,(1 + I\omega T_R)} = \frac{\sqrt{3}}{I\omega - \omega^2 T_R}\,\underbrace{\frac{-\omega^2 T_R - I\omega}{-\omega^2 T_R - I\omega}}_{\text{c.c.}} = -\frac{\omega^2 \frac{2}{3} + I\omega\sqrt{3}}{\omega^2 + \omega^4 \frac{4}{27}} =$$

$$= -\underbrace{\frac{\cancel{\omega^2}\frac{2}{3}}{\cancel{\omega^2}\left(\omega^2 \frac{4}{27} + 1\right)}}_{\mathrm{Re}(L(I\omega))} + I\,\underbrace{\frac{-\sqrt{3}\cancel{\omega}}{\cancel{\omega}\left(\omega^3 \frac{4}{27} + \omega\right)}}_{\mathrm{Im}(L(I\omega))}$$

$$\mathrm{Re}(L(I\omega)) = -\frac{2}{\omega^2 \frac{4}{9} + 3}$$

$$\mathrm{Im}(L(I\omega)) = -\frac{\sqrt{3}}{\omega\left(\omega^2 \frac{4}{27} + 1\right)}$$

$$\omega = 1$$

$$\mathrm{Re}(L(I)) = -\frac{2}{\frac{4+27}{9}} = -\frac{18}{31}$$

$$\mathrm{Im}(L(I)) = -\frac{\sqrt{3}}{\frac{4+27}{27}} = -\frac{27\sqrt{3}}{31}$$

$$\omega = \sqrt{3}$$

$$\mathrm{Re}(L(I\sqrt{3})) = -\frac{2}{\frac{4}{3} + \frac{9}{3}} = -\frac{6}{13}$$

$$\mathrm{Im}(L(I\sqrt{3})) = -\frac{1}{\frac{4}{9} + \frac{9}{9}} = -\frac{9}{13}$$

$$\omega \to +\infty$$

$$\lim_{\omega\to+\infty} \mathrm{Re}(L(I\omega)) \to -0$$

$$\lim_{\omega\to+\infty} \mathrm{Im}(L(I\omega)) \to -0$$

$$\omega \to -\infty$$

$$\lim_{\omega\to-\infty} \mathrm{Re}(L(I\omega)) \to -0$$

$$\lim_{\omega\to-\infty} \mathrm{Im}(L(I\omega)) \to +0$$

$$\omega \to +0$$

$$\lim_{\omega\to+0} \mathrm{Re}(L(I\omega)) = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{\omega\to+0} \mathrm{Im}(L(I\omega)) \to -\infty$$

$$\omega \to -0$$
$$\lim_{\omega \to -0} \mathrm{Re}(L(I\omega)) = -\frac{2}{3}$$
$$\lim_{\omega \to -0} \mathrm{Im}(L(I\omega)) \to +\infty$$

2 Klausur vom 4. April 2008

Aufgabe 1 .

a) .

i)

$$\begin{aligned}
\dot{w}(t) &= \alpha\,(u(t) + v(t) - w(t) + y(t)) = \alpha\,(u(t) + v(t) - w(t) + \sin(v(t))) \\
\dot{v}(t) &= w(t) - v(t) \\
y(t) &= \sin(v(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) &= \begin{bmatrix} w(t) - v(t) \\ \alpha\,(u(t) + v(t) - w(t) + \sin(v(t))) \end{bmatrix} \\
y = g(\mathbf{x}, u) &= \sin(v(t))
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 0) \\
0 &= w(t) - v(t) \;\Rightarrow\; w(t) = v(t) \\
0 &= \cancel{\alpha} \left(\underbrace{u(t)}_{0} + \underbrace{v(t) - w(t)}_{0} + \sin(v(t)) \right) \;\Rightarrow\; v(t) = \pi n,\; n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow\; w(t) = v(t) = \pi n$$

iii)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{0},\ u = 0 \\
\mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0},\ u=0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \alpha\,(1+\cos(v(t)))|_{\mathbf{x}=\mathbf{0},\ u=0} & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2\alpha & -\alpha \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0},\ u=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \\
\mathbf{c} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}, u)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0},\ u=0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
d &= \frac{\partial}{\partial u} g(\mathbf{x}, u)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0},\ u=0} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2\alpha & -\alpha \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \Delta u \\
\Delta y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

Die Ruhelage ist global asymptotisch stabil, wenn die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ einen negativen Realteil besiten. (Satz 3.4. S.47)

$$
\det|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}| = (-1-\lambda)(-\alpha-\lambda) - 2\alpha = \lambda^2 + (1+\alpha)\lambda - \alpha = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= -\frac{1+\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+\alpha)^2}{4} + \alpha} < 0 \\
\Rightarrow \frac{1+\alpha}{2} &> \pm\sqrt{\frac{(1+\alpha)^2}{4} + \alpha} \\
&\Rightarrow 1 > \pm\sqrt{\left(\frac{(1+\alpha)^2}{4} + \alpha\right)\frac{4}{(1+\alpha)^2}} = \pm\sqrt{\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} + 1} \\
&\Rightarrow 0 > \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} \\
&\Rightarrow \alpha < 0,\ \alpha \neq -1
\end{aligned}
$$

b) .

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u_k
$$

$$
\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

i)

$$\mathbf{x}_{k=1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_0} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u_0 = \begin{bmatrix} 4 + u_0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} u_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{k=2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 + u_0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} u_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k=1}} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} 4 + u_0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} u_0 + u_1 \\ -1 - \frac{1}{4} u_0 - \frac{1}{2} u_1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} u_0 + u_1 \;\Rightarrow\; -4 - \frac{1}{2} u_0 = u_1$$

$$1 = -1 - \frac{1}{4} u_0 - \frac{1}{2} u_1 \;\Rightarrow\; 2 + \frac{1}{2} u_1 = \cancel{2 - 2} - \frac{1}{4} u_0 = -\frac{1}{4} u_0$$

$$\Rightarrow\; u_0 = \alpha,\; u_1 = -4$$

ii)

$$\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} u_0 + u_1 \;\Rightarrow\; -3 - \frac{1}{2} u_0 = u_1$$

$$2 + \frac{1}{2} u_1 = -\frac{1}{4} u_0 \;\Rightarrow\; 2 - \frac{3}{2} \cancel{- \frac{1}{4} u_0} = \cancel{-\frac{1}{4} u_0}$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \text{Widerspruch! Nicht errichbar!}$$

iii) TODO...

Aufgabe 2 .

a) .

$$t_r = 1, \ = 10\%, \ e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t)|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$$

$$\omega_c t_r \approx 1,5 \ \Rightarrow \ \omega_c = 1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

$$\Phi = 60^\circ$$

Wegen der Regelabweichung e_∞ brauchen wir integrales Verhalten beim Regler, daher wählen wir den PI-Regler.

$$R(s) = \frac{V_I}{s}(1 + sT_I)$$

$$R(I\omega_c) = R(I) = -IV_I(1 + IT_I) = V_I(T_I - I)$$

Um eine Phasenreserve Φ von 60° zu erreichen, müssen wir $G(s)$ um 60° bei $\omega = \omega_c$ absenken

$$\arg(R(I\omega_c)) = \arctan(-\frac{1}{T_I}) = -60^\circ$$

$$\Rightarrow \ \tan(-60^\circ) = -\tan(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3} = -\frac{1}{T_I} \ \Rightarrow \ T_I = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Um einen Nulldurchgang bei ω_c zu haben, müssen wir mit dem Regler die Verstärkung bei $\omega = \omega_c$ um ungefähr 6dB absenken

$$|R(I\omega_c)|_{\mathrm{dB}} = \cancel{20\mathrm{dB}}\cancel{\log}(|V_I(T_I - I)|) = -6\mathrm{dB} \approx \cancel{20\mathrm{dB}}\log(2^{-1})$$

$$V_I\sqrt{T_I^2 + 1} = V_I\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ V_I = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

b) .

$$R(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1}$$

i)

$$e(t) = t\sigma(t) \ \Leftrightarrow \ \hat{e}(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$u_\infty = \lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{s\to 0} s\hat{u}(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{\cancel{1}}{\cancel{s^2}}\frac{\cancel{s}}{s^2 + 2s + 1} = 1$$

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\hat{y}(s) = \lim_{s\to 0} s\hat{u}(s)G(s) = \underbrace{u_\infty}_{1} \lim_{s\to 0} G(s)$$

Aus Abbildung 3 ablesen:

$$\text{Phase: } \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{\omega\to 0} G(I\omega) \to 0$$

$$\text{Verstärkung: } \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{\omega\to 0} G(I\omega) \approx 25\mathrm{dB} = 10^{\frac{25}{20}}$$

$$\Rightarrow \ y_\infty = 10^{\frac{25}{20}} = 25\mathrm{dB}$$

ii)

$$
\begin{aligned}
e(t) &= 5\sin(t),\ \omega_0 = 1,\ A_0 = 5 \\
|R(I\omega_0)| = |R(I)| &= \left|\frac{\cancel{I}}{\cancel{j^2} + 2\cancel{j} + \cancel{1}}\right| = \frac{1}{2} \\
\arg(R(I)) &= 0 \\
u(t) &= A_0\,|R(I)|\sin(\omega_0 t + \arg(R(I))) = \frac{5}{2}\sin(t) \\
y(t) &= |G(I\omega_0)|\,\frac{5}{2}\sin(\omega_0 t + \arg(G(I\omega_0))) = 10^{\frac{6}{20}}\frac{5}{2}\sin(t - 48^\circ)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 .

a) .

$$
\begin{aligned}
\text{s-Bereich: } G(s) &= \frac{a(s)}{b(s)} \\
&\operatorname{grad}(a(s)) \le \operatorname{grad}(b(s)) \\
\text{z-Bereich: } G(z) &= \frac{a(z)}{b(z)} \\
&\operatorname{grad}(a(z)) \le \operatorname{grad}(b(z)) \\
\text{q-Bereich: } &\lim_{q\to\Omega_0}\left|G^{\#}(q)\right| < \infty
\end{aligned}
$$

b) .

$$
\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u
$$

i)

Nicht asymptotisch Stabil, da die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ nicht kleiner als 0 sind.

ii)

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z} \\
&\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}(t) = \lim_{t\to\infty}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 = 0 \\
&\tilde{\mathbf{\Phi}}(t) = \exp(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}t) \\
&\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{V}^{-1} \\
&\lim_{t\to\infty}\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 = \lim_{t\to\infty}\mathbf{V}\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0 = \lim_{t\to\infty}\mathbf{V}\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{z}_0 = 0 \\
&\mathbf{V}^{-1}0 = \lim_{t\to\infty}\cancel{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{z}_0 \ \Rightarrow\ 0 = \lim_{t\to\infty}\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{z}_0
\end{aligned}
$$

q.e.d.

iii) *Ja*

iv)

$$\mathbf{\Phi}(t) = 2\tilde{\mathbf{\Phi}}(t) = 2\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

v)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{\Phi}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}^k k\frac{t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}^k\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \mathbf{A}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{A}^{k-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \mathbf{A}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^k\frac{t^k}{k!} = \mathbf{A}\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t) \qquad \text{q.e.d.}$$

vi)

$$u(t) = \sigma(t-1) - \sigma(t-2), \quad \mathbf{x}(t_1 = 3s) = 0$$

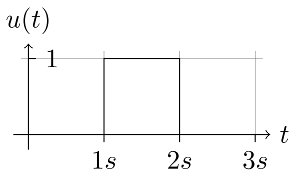
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \begin{bmatrix} u(\tau) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{d}\tau$$

$t = 3s$:

$$\mathbf{x}(t = 3s) = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_0 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 4 .

a) .

$$
\begin{aligned}
y_k &= 3x_k & &\Leftrightarrow\ y_z(z) = 3x_z(z)\\
x_{k+1} &= -\frac{1}{2}x_k + u_k & &\\
x_k &= -\frac{1}{2}x_{k-1} + u_{k-1} & &\Leftrightarrow\ x_z(z) = -\frac{1}{2}z^{-1}x_z(z) + z^{-1}u_z(z)\\
u_k &= k_1x_k + k_2\xi_k & &\Leftrightarrow\ u_z(z) = k_1x_z(z) + k_2\xi_z(z)\\
\xi_{k+1} &= a\xi_k + k_2e_k & &\\
\xi_k &= a\xi_{k-1} + k_2e_{k-1} & &\Leftrightarrow\ \xi_z(z) = az^{-1}\xi_z(z) + 2z^{-1}e_z(z)\\
e_k &= r_k - y_k & &\Leftrightarrow\ e_z(z) = r_z(z) - y_z(z) = r_s\frac{z}{z-1} - y_z(z)\\
r_k &= r_s(1^k) & &\Leftrightarrow\ r_z(z) = r_s\frac{z}{z-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_z(z) &= \frac{2z^{-1}\left(r_s\frac{z}{z-1} - y_z(z)\right)}{1-az^{-1}}\\
u_z(z) &= k_1x_z(z) + \frac{2k_2z^{-1}\left(r_s\frac{z}{z-1} - y_z(z)\right)}{1-az^{-1}}\\
x_z(z) &= \frac{2k_2z^{-2}\left(r_s\frac{z}{z-1} - y_z(z)\right)}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}-z^{-1}k_1\right)}\\
y_z(z) &= \frac{6k_2z^{-2}\left(r_s\frac{z}{z-1} - y_z(z)\right)}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}-z^{-1}k_1\right)} =\\
&= \frac{6k_2z^{-2}r_s\frac{z}{z-1}}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}-z^{-1}k_1\right)} - \frac{6k_2z^{-2}}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}-z^{-1}k_1\right)}y_z(z)\\
y_z(z) &= \frac{6k_2z^{-2}\left(r_s\frac{z}{z-1}\right)}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}-z^{-1}k_1\right)}\frac{1}{1+\frac{6k_2z^{-2}}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}-z^{-1}k_1\right)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} y_k = r_s = \lim_{z\to1}(z-1)y_z(z) =\\
&= \lim_{z\to1}\cancel{(z-1)}\frac{6k_2z^{-2}r_s\cancel{\frac{z}{z-1}}}{\left(1-a\cancel{z^{-1}}\right)\left(1+\frac{1}{2}\cancel{z^{-1}}-\cancel{z^{-1}}k_1\right)}\frac{1}{1+\frac{6k_2\cancel{z^{-2}}}{\left(1-a\cancel{z^{-1}}\right)\left(1+\frac{1}{2}\cancel{z^{-1}}-\cancel{z^{-1}}k_1\right)}} =\\
&= \underbrace{\frac{6k_2z^{-2}}{(1-a)\left(1+\frac{1}{2}-k_1\right)}\frac{1}{1+\frac{6k_2}{(1-a)\left(1+\frac{1}{2}-k_1\right)}}}_{1}r_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{6k_2}{\left(\frac{1}{2}-k_1\right)(1-a)+6k_2} \\
\cancel{6k_2} &= \left(\frac{1}{2}-k_1\right)(1-a)+\cancel{6k_2} \\
0 &= \left(\frac{1}{2}-k_1\right)(1-a)\,a \qquad\qquad = 1
\end{aligned}
$$

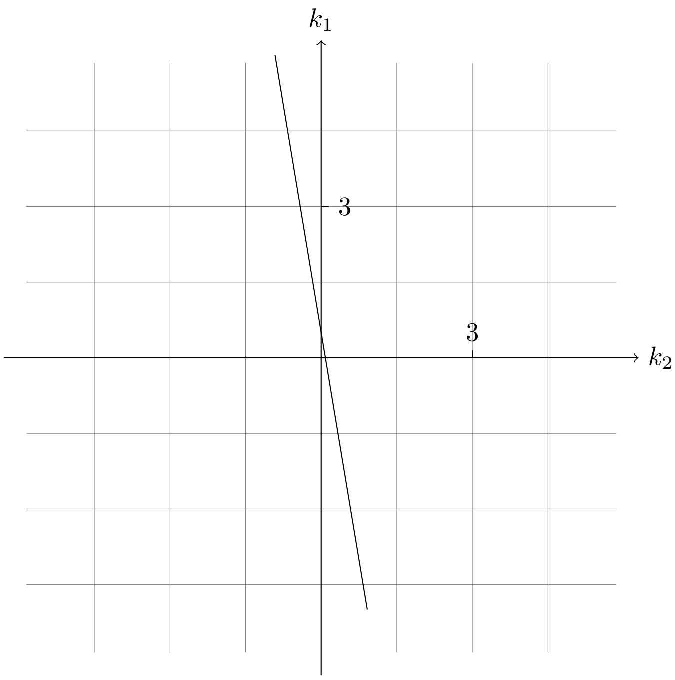
b) .

$$
\begin{aligned}
&\text{stationärer Zustand: } (x_s, \xi_s) \\
&(r_k) = (r_s),\ k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_s &= -\frac{1}{2}x_s + u_k \ \Rightarrow\ x_s = \frac{2}{3}u_k \\
\xi_s &= a\xi_s + 2e_k \ \Rightarrow\ 0 = e_k = (r_s - 3x_s) \\
\Rightarrow\ x_s &= \frac{r_s}{3} \\
u_s &= k_1 x_s + k_2 \xi_s \\
x_s &= \frac{2}{3}\left(k_1 x_s + k_2 \xi_s\right) \\
\Rightarrow\ \xi_s &= \frac{x_s(1-\frac{2}{3}k_1)}{k_2} = \frac{r_s(1-\frac{2}{3}k_1)}{3k_2}
\end{aligned}
$$

c) .

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= -\frac{1}{2}x_k + u_k \\
u_k &= k_1 x_k + k_2 \xi_k \\
\Rightarrow \; x_{k+1} &= \left(k_1 - \frac{1}{2}\right) x_k + k_2 \xi_k \\
\xi_{k+1} &= a\xi_k + 2e_k = a\xi_k + 2r_k - 2y_k = \underbrace{a}_{1} \xi_k - 6x_k + 2r_k \\
\mathbf{x}_k &= \begin{bmatrix} x_k, & \xi_k \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{x}_{k+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} (k_1 - \frac{1}{2}) & k_2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}} r_k \\
y_k &= \begin{bmatrix} 3, & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \\
\det(\mathbf{\Phi} - \lambda \mathbf{1}) &= \left(k_1 - \frac{1}{2} - \lambda\right)(1 - \lambda) + 6k_2 = \\
&= \lambda^2 - (\frac{1}{2} + k_1)\lambda + (k_1 - \frac{1}{2} + 6k_2) \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \; \lambda_{1,2} &= \frac{1 + 2k_1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + 2k_1}{4}\right)^2 - k_1 - 6k_2 + \frac{1}{2}} \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \; \cancel{\left(\frac{1 + 2k_1}{4}\right)^2} &= \cancel{\left(\frac{1 + 2k_1}{4}\right)^2} - k_1 - 6k_2 + \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \; k_1 &= -6k_2 + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$



d) .

Da ein Dead-Beat-Regler entworfen wurde (Eigenwerte bei 0), braucht das System n gleich 2 Schritte.

e) .

Separationstheorem:
Das Separationsprinzip beantwortet die Frage, wo die Eigenwerte des geschlossenen Kreises liegen, wenn man Zustandsregler und Beobachter getrennt entwirft. (S. 208 Kapitel 8.4)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{k+1}\\ \mathbf{e}_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{\Phi}+\mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T & \mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T\\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}+\hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_k\\ \mathbf{e}_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma}_g\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} r_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & \mathbf{0}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_k\\ \mathbf{e}_k\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \det(z\mathbf{1}-\mathbf{\Phi}) = \det(z\mathbf{1}-\left(\mathbf{\Phi}+\mathbf{\Gamma}\mathbf{k}^T+\mathbf{\Phi}+\hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T\right))\det(z\mathbf{1}-\left(\mathbf{\Phi}+\hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T\right))$$

q.e.d.

3 Klausur vom 20. Juni 2008

Aufgabe 1 .

ACHTUNG: Fehler in der Ableitung! Wird (hoffentlich) noch korrigiert!

a) .

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L, & u_C\end{bmatrix}^T$$

$$u_L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L(i_L)i_L\right) = L(i_L)\dot{i}_L + i_L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i_L}L(i_L) = L(i_L)\dot{i}_L + 2L_1 i_L^2$$

$$\Rightarrow \ \dot{i}_L = \frac{1}{L(i_L)}\left(u_L - 2L_1 i_L^2\right)$$

$$i_C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Cu_C\right) = C\dot{u}_C$$

$$\Rightarrow \ \dot{u}_C = \frac{i_C}{C}$$

$$u_L = u_s - i_1 R \; i_1 = i_L - i_2 \ \Rightarrow \ u_L = u_s - i_L R + i_2 R$$

$$u_C + i_2 R = i_1 R = i_L R - i_2 R \ \Rightarrow \ i_2 = \frac{i_L R - u_C}{2R}$$

$$\Rightarrow \ u_L = u_s + \frac{1}{2}i_L R - \frac{1}{2}u_C$$

$$\Rightarrow \ \dot{i}_L = \frac{1}{L(i_L)}\left(u_s + \frac{1}{2}i_L R - \frac{1}{2}u_C - 2L_1 i_L^2\right)$$

$$i_C = i_2 + i_3 = \frac{u_s - u_C}{R} + i_2 = \frac{1}{2R}\left(2u_s - 3u_C + i_L R\right)$$
$$\dot{u}_C = \frac{1}{2RC}\left(2u_s - 3u_C + i_L R\right)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{u}_C \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u_s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L(i_L)}\left(u_s + \frac{1}{2}i_L R - \frac{1}{2}u_C - 2L_1 i_L^2\right) \\ \frac{1}{2RC}\left(2u_s - 3u_C + i_L R\right) \end{bmatrix}$$
$$y = g(\mathbf{x}, u) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0, & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}$$

b) .

$$u = u_R = 0$$
$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u_s)$$
$$\Rightarrow \; u_C = \frac{R}{3} i_L$$
$$i_L \left(2L_1 i_L + \frac{2}{3}R\right) = 0$$
$$i_{L,R1} = 0 \quad u_{C,R1} = 0$$
$$i_{L,R2} = -\frac{R}{3L_1} \quad u_{C,R1} = -\frac{R^2}{9L_1}$$

c) .

$$\mathbf{A} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial i_L} f_{i_L} & \frac{\partial}{\partial u_C} f_{i_L} \\ \frac{\partial}{\partial i_L} f_{u_C} & \frac{\partial}{\partial u_C} f_{u_C} \end{bmatrix}\right|_{u=u_R,\, \mathbf{x}=\mathbf{x}_R} =$$
$$= \left.\begin{bmatrix} \frac{2L_1 i_L}{L^2(i_L)}\left(u_s + \frac{1}{2}i_L R - \frac{1}{2}u_C - 2L_1 i_L^2\right) - \frac{1}{L(i_L)}\left(4L_1 i_L + \frac{R}{2}\right) & -\frac{1}{2L(i_L)} \\ \frac{1}{2C} & -\frac{3}{2RC} \end{bmatrix}\right|_{u=u_R,\, \mathbf{x}=\mathbf{x}_R}$$
$$\mathbf{B} = \left.\begin{bmatrix} \frac{1}{L(i_L)} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix}\right|_{u=u_R,\, \mathbf{x}=\mathbf{x}_R}$$

Aufgabe 2 .

$$G(s) = \frac{1}{s\,(0.5s + 1)}$$

a) .

$$|G(I\omega)|_{\mathrm{dB}} = -20\mathrm{dB}\log(|I\omega|) - 20\mathrm{dB}\log(\left|\frac{1}{2}I\omega + 1\right|) =$$
$$= -20dB\log\omega - 20\mathrm{dB}\log(\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1}) =$$
$$= \begin{cases} -20\mathrm{dB}\log(\omega): & \omega \ll 2 \\ -20\mathrm{dB}\log(\omega) - 3.0103\mathrm{dB}: & \omega = 2 \\ -40\mathrm{dB}\log(\omega): & \omega \gg 2 \end{cases}$$

$$\arg(G(I\omega)) = -\arg(I\omega) - \arg(I\frac{1}{2}\omega + 1) =$$
$$= \begin{cases} -90^\circ: & \omega \ll 2 \\ -135^\circ: & \omega = 2 \\ -180^\circ: & \omega \gg 2 \end{cases}$$

b) .

$$t_r = 1.5 \Rightarrow \omega_C = 1\frac{rad}{s}$$
$$= 30\% \Rightarrow \Phi = 40^\circ$$
$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t)|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$$

Da integrierendes Verhalten in der Strecke, $e_\infty = 0$ bereits erfüllt

$L(I\omega)$ ... Offene Regelkreis $R(I\omega)$ ... Geschlossene Regelkreis

$$|L(I\omega_C)|_{\mathrm{dB}} = 0 = -20\mathrm{dB}\log(\frac{\sqrt{5}}{2}) + 20\mathrm{dB}\log(|R(I)|)$$
$$\Rightarrow |R(I\omega_C)| = \frac{\sqrt{5}}{2} = \Delta a$$

$$\arg(L(I\omega_C)) = -140^\circ = -90^\circ - 25^\circ + \arg(R(I)) = -115^\circ + \arg(R(I))$$
$$\Rightarrow \arg(R(I)) = -25^\circ = \Delta\varphi$$

Lag-Entwurf:

$$R_{Lag}(s) = \frac{1+sT}{1+s\eta T},\ \eta > 1$$
$$T = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{1+\tan^2(-25^\circ)} - 1}{\omega_C\tan(-25^\circ)} = \frac{\sqrt{\frac{25}{16}} - 1}{-0.5} = -\frac{1}{2}$$
$$\eta = \frac{\omega_c T - \tan(-25^\circ)}{\omega_C T\,(1 + \omega_C T\tan(-25^\circ))} = 0$$

$$\Rightarrow \ R(s) = 1 - \frac{1}{2}s$$

Um $R(s)$ zu realisieren muss man noch einen Realisierungsterm $R'(s) = \frac{1}{s+T_R}$ hinzunehmen, der schnell abklingt (und somit den Regler nicht wesentlich beeinflusst).

c) .

$$d(t) = 0.5\sin(4t) + 0.1\sigma(t), \quad r(t) = 0$$

$$T_{d,y} = \frac{G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{1}{\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s + 1}$$

$$|T_{d,y}(I\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4}}}$$

$$\arg(T_{d,y}(I\omega)) = -\arctan\left(-\frac{\frac{\omega}{2}}{1 - \frac{1}{2}\omega^2}\right)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{|T_{d,y}(I4)|}{2} \sin(4t + \arg(T_{d,y}(I4))) + 0.1\sigma(t) \\ absT_{d,y}(I4) &= \frac{1}{\sqrt{53}} \\ arg(T_{d,y}(I4)) &= \pi - \arctan\left(\frac{2}{7}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 3 .

a) .

1. Beobachtbarkeitsmatrix:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c^T \Phi} \\ \vdots \\ \mathbf{c^T \Phi}^{n-1} \end{bmatrix}$$
$$\text{rang}(\mathcal{O}) = n$$

2. PBH-Rang-Test

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ s\mathbf{1} - \mathbf{A} \end{bmatrix} = n$$

3. PBH-Eigenvektortest

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v}_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i \\ \mathbf{c}^T \mathbf{v}_i &\neq 0 \end{aligned}$$

b) .

$$\begin{aligned}
\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x} \Rightarrow\ & \mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} \\
\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad & y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \\
\Rightarrow\ \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad & \hat{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \ \Rightarrow\ \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \ \Rightarrow\ \mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}_i = \lambda_i \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}_i}_{\mathbf{u}_i}$$

$$\mathbf{c}^T\mathbf{v}_i \neq 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{c}^T \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}_i}_{\mathbf{u}_i} \neq 0$$

q.e.d.

c) .

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}) &= (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 \neq 0 \\
\lambda_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2 \\
\lambda_1 &= 1 \ \lambda_2 = 5 \\
\mathbf{w}_1^T\mathbf{A} &= \lambda_1 \mathbf{w}_1^T = \mathbf{w}_1^T \\
\begin{bmatrix} w_1, & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} w_1, & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w_1 + w_2, & 3w_1 + 4w_2 \end{bmatrix} \\
2w_1 + w_2 &= w_1 \ \Rightarrow\ w_2 = -w_1 \\
3w_1 + 4w_2 &= w_2 \ \Rightarrow\ w_2 = -w_1 \\
\mathbf{w}_1 &= \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{w}_1^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha, & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ System ist nicht vollständig erreichbar!

d) .

$$\left(\mathbf{w}_i^T\mathbf{A}\right)^T = \left(\lambda_i \mathbf{w}_i^T\right)^T = \mathbf{A}^T\mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i \qquad \text{q.e.d.}$$

e) .

$$y_{k+3} + 3\sin(y_{k+2}) + 5\sqrt{u_k} = \frac{\pi}{10}\exp y_{k+1}$$

Substituieren:

$$\begin{aligned} y_k &= w_k \\ y_{k+1} &= v_k \\ y_{k+2} &= z_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= y_{k+1} = v_k \\ v_{k+1} &= y_{k+2} = z_k \\ z_{k+1} &= y_{k+3} = \frac{\pi}{10}\exp y_{k+1} - 3\sin(y_{k+2}) - 5\sqrt{u_k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \begin{bmatrix} v_k \\ z_k \\ \frac{\pi}{10}\exp y_{k+1} - 3\sin(y_{k+2}) - 5\sqrt{u_k} \end{bmatrix}$$

f) .

Nyquist-Kriterium:
(A) Erfüllt, da der Punkt für $\omega = 0$ im positiven liegt.
(B) Erfüllen $L_1(I\omega)$, $L_1(I\omega)$, da sie für $\omega \to \infty$ gegen 0 gehen.
(C) Erfüllen ebenfalls beide (siehe Angabe). (D) Erfüllen ebenfalls beide.
(E) Erfüllen ebenfalls beide.
$L_1(I\omega)$ hat beim schneiden der 0-dB-Linie bzw. des Einheitskreises einen Phasenwinkel von ungefähr $\arg(L_1(I\omega_c)) \approx -225°$. Daher ist die Phasenreserve $\Phi = \arg(L_1(I\omega_c)) + \pi \approx -45°$ kleiner als 0 und der geschlossene Regelkreis nicht BIBO-Stabil.
$L_2(I\omega)$ hat beim schneiden der 0-dB-Linie bzw. des Einheitskreises einen Phasenwinkel von ungefähr $\arg(L_1(I\omega_c)) \approx -90°$. Daher ist die Phasenreserve $\Phi = \arg(L_1(I\omega_c)) + \pi \approx 90°$ größer als 0 und der geschlossene Regelkreis BIBO-Stabil.

Aufgabe 4 .

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ -8 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Gamma}} u_k$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3 \;\Rightarrow\; n = 3$$

a) .

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Gamma}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ nicht regulär, da 0-Zeile $\Rightarrow$ nicht vollständig erreichbar

4 Klausur vom 10. Oktober 2008

Aufgabe 1 .

a) .

Eingang: u_L

$$i_L R_L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L(z) i_L\right) = i_L R_L + \dot{i}_L L(z) + i_L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} L(z) = i_L R_L + \dot{i}_L L(z) + i_L N^2 \frac{\mu_0 A}{z^2} = u_L$$

$$\Rightarrow \; \dot{i}_L = \frac{u_L - i_L (R_L + N^2 \frac{\mu_0 A}{z^2})}{L(z)}$$

$$F_G - F_A = m_B \ddot{z} = m_B g - \frac{1}{2} \mu_0 A \frac{N i_L^2}{z}$$

$$\dot{z} = v$$

$$\dot{v} = g - \frac{\mu_0 A N i_L^2}{2 z m_B}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v \\ z \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_L - i_L (R_L + N^2 \frac{\mu_0 A}{z^2})}{L(z)} \\ g - \frac{\mu_0 A N i_L^2}{2 z m_B} \\ v \end{bmatrix}$$

b) .

TODO ...

Aufgabe 2 .

a) .

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ y_k &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}_k\end{aligned}$$

trivial:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}u_k, \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}_k + du_k\end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$$

Wenn das System stabil ist.

vollständig:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{\Gamma}u_k + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y}_k &= \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}}_k + du_k\end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T)\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$$

Wenn das System vollständig beobachtbar ist.

b) .

$$\mathcal{O}(\mathbf{C}, \mathbf{\Phi}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathcal{O}\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 + 2v_2 + 3v_3 \\ 4(v_1 + v_2 + v_3) \end{bmatrix}$$

$$v_1 = -v_2,\ v_1 = 3v_3,\ \frac{1}{4} = \cancel{3v_3 - 3v_3} + v_3$$

$$\Rightarrow \ \hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\hat{p}_{g,soll}(z) = z^3 \quad \text{(Dead-Beat-Regler)}$$

$$\hat{\mathbf{k}} = -\mathbf{\Phi}^3\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{21}{4} \\ \frac{9}{4} \\ -\frac{11}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}_e = \left(\mathbf{\Phi} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{C}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{17}{4} & -\frac{21}{4} & 2 \\ \frac{9}{4} & \frac{17}{4} & 1 \\ -\frac{7}{4} & -\frac{11}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_e\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{0} = e_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$$

c) .

Das Dualitätsprinzip besagt, dass eine skalare Übertragungsfunktion $G(s)$ bzw. $G(z)$ unverändert bleibt, wenn man sie transponiert. Das primale und duale System besitzen also die gleiche Übertragungsfunktion.
Primale System:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{A}\mathbf{x}_p + \mathbf{b}u \\ y_p &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}_p + du\end{aligned}$$

Duale System:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{A}^T\mathbf{x}_d + \mathbf{c}u \\ y_p &= \mathbf{b}^T\mathbf{x}_p + du\end{aligned}$$

d) .

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_k + \mathbf{\Gamma}u_k \\ y_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k\end{aligned}$$

Erweitertes System:

$$\begin{aligned}w_{k+1} &= \alpha w_k \\ \mathbf{z}_k &= \begin{bmatrix}\mathbf{x}_k \\ w_k\end{bmatrix} \\ \mathbf{z}_{k+1} &= \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha\end{bmatrix}\mathbf{z}_k + \begin{bmatrix}\mathbf{\Gamma} \\ 0\end{bmatrix}u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix}\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\mathbf{z}_k\end{aligned}$$

Aufgabe 3 .

a) .

(a)

$$\frac{1}{s}G(s) = \frac{1}{s^2} \;\Leftrightarrow\; t$$

die passende Sprungantwort ist also (2).

(c)
Schwach-Dämpfung, wie man an der großen Überhöhung beim Knick erkennen kann. Die passene Sprungantwort ist also (1).

(b)
Wegen der Verstärkung $V = 1$ ist die passende Sprungantwort (4).

(d)
Wegen der Verstärkung $V = 10$ ist die passende Sprungantwort (3).

b) .

Man kann zwei Knicke erkennen (bzw. Wendepunkte im Phasendiagramm): bei 10 rad/s, bei 100 rad/s.

-20dB/Dekade bis 10 rad/s
-60dB/Dekade bis 100 rad/s
-40dB/Dekade danach.
Überschwinger bei $\omega = 10$rad/s ist ungefähr 12dB

$$G(s) = VG_1(s)G_2(s)G_3(s)$$

$$G_1(s) = \frac{1}{s}$$
$$\Rightarrow \arg(G_1(I\omega)) = -90°, \quad |G_1(I\omega)|_{\text{dB}} = -20\text{dB}\log(\omega)$$

$$\begin{aligned}
G_2(s) &= \frac{1}{\frac{s^2}{10^2} + 2\xi\frac{s}{10} + 1} \\
|G_2(I\omega)|_{\text{dB}} &= -20\text{dB}\log(\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{10}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{10}\right)^2}) \\
|G_2(I\omega)|_{\text{dB}} &= 0\text{dB}, \quad \text{für: } \omega \ll 10 \\
|G_2(I\omega)|_{\text{dB}} &= 12\text{dB} \approx 4 \cdot 20\text{dB}\log\sqrt{2} = -40\text{dB}\log(\sqrt{2\xi_k})
\end{aligned}$$

$$G_3(s) = \frac{s}{100} + 1$$

$$V = 10 \text{ für die Verschiebung.}$$

c) .

$$\begin{aligned}
&\omega \to 0 \quad |G(I\omega)|_{\text{dB}} \to 0 \\
&\quad \Rightarrow |G(I\omega)| \to 1 \\
&\quad \Rightarrow \text{(c) fällt raus}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\omega \to \infty \quad |G(I\omega)|_{\text{dB}} \to -\infty \\
&\quad \Rightarrow |G(I\omega)| \to 0 \\
&\omega_C = 1 \quad \text{Knick} \\
&\quad \arg(G(I\omega)) = -90° \\
&\quad \Rightarrow \text{arg muss beim Schnitt mit dem Einheitskreis } -90° \text{ betragen} \\
&\quad \Rightarrow \text{(b) fällt raus.}
\end{aligned}$$

Alternativ verläuft nur (a) von 0° nach $-180°$.

Aufgabe 4 .

a) .

$$\text{für zeitkont. (S. 74): } g(t) = \frac{d}{dt}h(t)$$
$$\Rightarrow\ (g_k) = (\Delta h_k)$$

$$(h_k) = (0; 0,3; 0,8; 0,95; 1; 1; \ldots)$$
$$\Rightarrow\ (g_k) = (0; 0,3; 0,5; 0,15; 0,05; 0; 0; \ldots)$$

Polstellen im Einheitskreis $\Rightarrow$ BIBO-Stabil

b) .

$$z_0 = -1$$
$$\Rightarrow\ z_G(z) = z + 1$$

$$z_p = 0,2 \pm I0,2$$
$$\Rightarrow\ z_p = \underbrace{-\frac{p}{2}}_{0,2} \pm \underbrace{\sqrt{0,04 - q}}_{\sqrt{-0,04}}$$
$$\Rightarrow\ n_G(z) = z^2 - 0,4z + 0,08$$

$$G(z) = V \frac{z+1}{z^2 - 0,4z + 0,08}$$

$$\lim_{k\to\infty} (h_k) = 1$$
$$\Rightarrow\ \lim_{z\to 1} \cancel{z-1} \frac{z}{\cancel{z-1}} V \frac{z+1}{z^2 - 0,4z + 0,08} = V \frac{2}{1 - 0,4 + 0,08} = 1$$
$$\Rightarrow\ V = \frac{0,68}{2} = 0,34$$

$$g(z) = 0,34 \frac{z+1}{z^2 - 0,4z + 0,08}$$

c) .

$$
\begin{aligned}
T_a &= 2 \\
(u_k) &= u(k2) = (5\sin(\frac{\pi}{2}k) + \frac{1}{2}\sigma(k2))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_0 T_a &= \frac{\pi}{2} \\
\left|G(e^{I\frac{\pi}{2}})\right| &= \left|0,34\frac{I+1}{-1-I0,4+0,08}\right| = \dots \\
\arg(G(e^{I\frac{\pi}{2}})) &= 135°
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_0 T_a &= 0 \\
|G(1)| &= \frac{0,68}{1,6} \\
\arg G(1) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
(y_k) = \left(5\left|G(e^{I\frac{\pi}{2}})\right|\sin(\frac{\pi}{2}k + 135°) + \frac{0,34}{1,6}\right)
$$

d) .

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{4}{s+1} \\
R(z) &= \frac{z}{z-1+k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z-1}{z}\mathbf{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s(s^2+1)}\right\}\Big|_{t=kT_a}\right\} \\
\frac{4}{s(s^2+1)} &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s} \\
\Rightarrow\ 4 &= s\underbrace{(A+B)}_{0} + \underbrace{B}_{4} \\
\Rightarrow\ A &= -4 \\
\frac{4}{s} - \frac{4}{s+1} &\Leftrightarrow 4\frac{z}{z-1} - 4\frac{z}{z-\exp(-\ln(2))} = 4\frac{z}{z-1} - 4\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \\
G(s) \Leftrightarrow G(z) &= 4 - 4\frac{z-1}{z-\frac{1}{2}} \\
R(z)G(z) &= \frac{4z(z-\frac{1}{2}) - 4z(z-1)}{(z-\frac{1}{2})(z-1+k)} \\
T_{r,y} &= \frac{R(z)G(z)}{1+R(z)G(z)} = \frac{4z(z-\frac{1}{2}) - 4z(z-1)}{z^2 + (k-\frac{11}{2})z + (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k)}
\end{aligned}
$$

Jury-Verfahren

z^2	$a_{2,2} = 1$ $a_{2,0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k$	$a_{2,1} = k - \frac{11}{2}$ $a_{2,1} = k - \frac{11}{2}$	$a_{2,0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k$ $a_{2,2} = 1$ $\lambda_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k$
z^1	$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k\right)^2$ $\left(k - \frac{11}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k\right)$	$\left(k - \frac{11}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k\right)$ $1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k\right)^2$	0 0 $\lambda_n = \frac{\left(k-\frac{11}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k\right)}{1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k\right)^2}$
z^0	$\frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k\right)^2\right)^2-\left(k-\frac{11}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k\right)}{1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k\right)^2}$		

$$a_{1,2} > 0$$

$$\begin{aligned}
&1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k\right)^2 > 0 \\
\Rightarrow\ & -\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k + \frac{3}{4} > 0 \\
\Rightarrow\ & k^2 - 2k - 3 < 0 \\
\Rightarrow\ & k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4} \\
\Rightarrow\ & -1 < k < 1
\end{aligned}$$

$$a_{0,2} > 0$$

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k\right)^2\right)^2 - \left(k - \frac{11}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k\right) > 0 \\
\Rightarrow\ & -\frac{3}{4}k^2 + \frac{9}{4}k + \frac{14}{4} > 0 \\
\Rightarrow\ & k^2 - 3k - \frac{14}{3} < 0 \\
\Rightarrow\ & k_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{41}{3}} \\
&\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{41}{3}} > 1 \\
&\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{41}{3}} < -1 \\
\\
\Rightarrow\ & -1 < k < 1
\end{aligned}$$

e) .

$$\lambda'_j = \exp(\lambda_j T_a)$$

5 Klausur vom 12. Dezember 2008

Aufgabe 1 .

a) .

$$
\begin{aligned}
\dot{s} &= v \\
m\dot{v} &= F - dv - cs \\
A\dot{h} &= q_{in} - q_1 \\
\Rightarrow\ \dot{h} &= \frac{1}{A}\left(q_{in} - bs\sqrt{2gh}\right) \\
\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} s, & v, & h \end{bmatrix}^T \\
y = q_{out}(t) &= q_1(t-T))bs(t-T)\sqrt{2gh(t-T)} \\
\text{Totzeit: } T &= \frac{l}{\frac{d_B}{2}\omega_B}
\end{aligned}
$$

b) .

$$
\begin{aligned}
\text{Ruhelage: } q_{in,R},\ F_R & \\
0 &= v_R \\
0 &= F_R - dv_R - cs_R \\
0 &= q_{in,R} - bs_R\sqrt{2gh_R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_R &= \frac{F_R}{c} \\
h_R &= \frac{1}{2g}\left(\frac{cq_{in,R}}{bF_R}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}}\mathbf{x}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_R} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{d}{m} & 0 \\ -b\frac{\sqrt{2gh_R}}{A} & 0 & -\frac{bs_Rg}{A\sqrt{2gh_R}} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}}\mathbf{u}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_R} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{A} & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{c}^T = \frac{\partial}{\partial g}\mathbf{x}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R,\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_R} &= \begin{bmatrix} b\sqrt{2gh_r}, & 0, & bs_R\frac{g}{2gh_R} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

c) .

$$
G(s) = \exp(-sT)
$$

Aufgabe 2 .

$$G(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{100} + \frac{s}{10}} = \frac{10}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

a) .

b) .

i)

$$\omega_C = \frac{1.5}{t_r} = 10\frac{rad}{s}$$
$$\Phi = 70 - \;= 45°$$
$$e_\infty = 0 \;\Rightarrow\; \text{Integralanteil}$$

ii)

$$\arg(G(I\omega_c)) = 0 - (\arctan(-1) + \pi) = -135°$$
$$\Rightarrow \text{ Keine Phasenanhebung nötig!}$$
$$|G(I\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\text{Regler: } R(s) = V$$
$$V\,|G(I\omega_c)| \stackrel{!}{=} 1 \;\Rightarrow\; V = \sqrt{2}$$

c) .

$$d(t) = \frac{1}{4}\sigma(t) + \frac{1}{2}\sin(5t)$$
$$T_{d,y} = \frac{G(s)}{1+R(s)G(s)} = \frac{1}{\frac{s^2}{100} + \frac{s}{10} + \sqrt{2}}$$
$$y(t) = \underbrace{\lim_{s\to 0} sT_{d,y}\frac{1}{s}\frac{1}{4}}_{\frac{1}{4\sqrt{2}}} + \frac{1}{2}\,|T_{d,y}(I5)|\sin(5t + \arg(T_{d,y}(I5)))$$

d) .

$$R(s) = \frac{s-1}{s}, \quad G(s) = \frac{s+3}{s^2+s-2} = \frac{s+3}{(s-1)(s+2)}$$

i)

Ist $T_{r,y}$ BIBO-Stabil?

$$T_{r,y} = \frac{R(s)G(s)}{1+R(s)G(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+3}$$

$s^2 + 3s + 3$ ist ein Hurwitzpolynom, da 2. Ordnung und alle Koeffs größer als 0

$\Rightarrow T_{r,y}$ ist BIBO-Stabil!

ii)

geschlossener Regelkreis intern stabil?

$$R(s)G(s) = \frac{\cancel{s-1}}{s}\frac{s+3}{(s+2)\cancel{(s-1)}}$$

$\Rightarrow$ Nicht intern stabil!

Aufgabe 3 .

a) .

Linearitär (S.19, Definition 2.1.):

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2, \mathbf{0}, t) &= a\mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{0}, t) + b\mathbf{h}(\mathbf{x}_2, \mathbf{0}, t) \\ \mathbf{h}(\mathbf{0}, a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2, t) &= a\mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_1, t) + b\mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_2, t) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, t) + \mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{u}, t) \end{aligned}$$

Zeitinvarianz (S. 21, Definition 2.2.):
$y(t)$ für Anfangswert $x(t_0)$ und Eingang $u(\tau)$, $t_0 \le \tau \le t$
$\Rightarrow y(t-T)$ für Anfangswert $x(t_0+T)$ und Eingang $u(\tau-T)$, $t_0+T \le \tau \le t+T$

b) .

Σ_1 nicht linear und zeitvariant.
Σ_2 linear und zeitvariant.

c) .

$$\det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -3 \\ 0 & \lambda - \alpha + 2 & 0 \\ -\alpha & 0 & \lambda + \alpha + 3 \end{vmatrix} = s^3 + 5s^2 + (6 + 2\alpha - \alpha^2)s - 2\alpha(\alpha - 2)$$

Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda^3 & 1 & 6 + 2\alpha - \alpha^2 & 0 \\ \lambda^2 & 5 & 6\alpha - 3\alpha^2 & 0 \\ \lambda^1 & 6 + \frac{4}{5}\alpha - \frac{2}{5}\alpha^2 & 0 & \\ \lambda^0 & 6\alpha - 3\alpha^2 & & \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
a_{31} &> 0: \\
0 < \alpha &< 2 \\
a_{21} &> 0: \\
\alpha^2 - 2\alpha - 15 &< 0 \\
\Rightarrow \; -3 < \alpha &< 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \; &\text{Asymp. Stabil für: } 0 < \alpha < 2 \\
\Rightarrow \; &\text{BIBO-Stabil.}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 .

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}} u_k \\
y_k &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1, & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \mathbf{x}_k
\end{aligned}
$$

a) .

PBH-Eigenvektortest:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 = 1, &\quad \lambda_2 = 2 \\
\text{Eigenvektoren:} & \\
\begin{bmatrix} w_1, & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &\stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0, & 0 \end{bmatrix} \\
w_1 = 0, &\quad w_2 = \alpha \\
\mathbf{w}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \\
\mathbf{w}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{PBH-Test:} \\
&\quad \mathbf{w}_1^T \mathbf{\Gamma} = 2\alpha \neq 0 \\
&\quad \mathbf{w}_2^T \mathbf{\Gamma} = 3 \neq 0 \\
&\quad\quad \Rightarrow \text{vollständig erreichbar!}
\end{aligned}
$$

b) .

$$u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k + l r_k$$
$$\text{Pole: } \lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
$$\text{für } r_k = (1^k)\text{: } \lim_{k\to\infty} y_k = r_k = 1$$

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Gamma}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_{soll}(z) = (z - \frac{1}{2})(z - \frac{2}{3} = z^2 \underbrace{-\frac{7}{6}}_{p_1} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{p_0}$$

$$\mathbf{v}_1^T = \begin{bmatrix} 0, & 1 \end{bmatrix} \mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}, & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{k}^T = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}, & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} + \frac{7}{6} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}, & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3}, & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}^2} =$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}, & -\frac{7}{12} \end{bmatrix}$$
$$l = \frac{1}{\mathbf{c}^T (\mathbf{1} - \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{k}^T)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}} = \frac{1}{12}$$

c) .

$$G(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{1} - \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi} = \frac{z+1}{(z-2)(z-1)}$$

d) .

$$x_{k+2} + 2x_{k+1} + x_k = -u_k$$
$$y_k = x_{k+1} + 3x_k$$
$$\text{Substitution:}$$
$$v_k = x_k$$
$$w_k = x_{k+1}$$
$$v_{k+1} = w_k$$
$$w_{k+1} = -u_k - 2w_k - v_k$$
$$y_k = w_k + 3v_k$$

6 Klausur vom 6. Februar 2009

Aufgabe 1 .

Aufgabe 2 .

a) .

BIBO-Stabilität: Alle Polstellen z_p von $G(z)$ im Einheitskreis liegen ($|z_p| < 1$). Alle Polstellen q_p von $G^{\#}(q)$ in der linken offenen q-Halbebene liegen ($\mathrm{Re}(q_p) < 0$).

Sprungfähigkeit:

$$\lim_{z\to\infty} G(z) \neq 0$$
$$\lim_{q\to\Omega_0} G^{\#}(q) \neq 0 \quad \Omega_0 = \frac{2}{T_a}$$

b) .

$\mathbf{\Phi}$ muss eine nilpotente Matrix sein. Beispiel:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 .

a) .

$$\begin{aligned} y_1 &= (r_1 - y_1)R_1(s)G_1(s) \\ y_1(1 + R_1(s)G_1(s)) &= r_1 R_1(s)G_1(s) \\ T_{r_1,y_1}(s) &= \frac{R_1(s)G_1(s)}{1 + R_1(s)G_1(s)} \\ R_1(s)G_1(s) &= \frac{3}{\sqrt{3}s} = \frac{\sqrt{3}}{s} \\ T_{r_1,y_1}(s) &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{s}}}{\frac{s+\sqrt{3}}{\cancel{s}}} = \frac{\sqrt{3}}{s+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

b) .

$$\begin{aligned} G_3(s) &= T_{r_1,y_1}(s)G_2(s) \\ G_2(s) &= \frac{10}{1+s} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 .

a) .

$$\begin{aligned}(g_k) &= \delta_k + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \sigma[k-2] \\ \Leftrightarrow G(z) &= 1 - \frac{2}{z - 2z^2}\end{aligned}$$

b) .

Ja, da $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < 0$. Die geometrische Reihe $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$ konvergiert. Alternativ: Die Polstellen z_p von $G(z)$ sind $z_{p1} = 0$ und $z_{p2} = \frac{1}{2}$ und liegen im Einheitskreis.

c) .

$$\begin{aligned}(u_k) &= 4\cos(k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) - 1^k \\ e^{I\frac{\pi}{2}} &= I \\ e^{I0} &= 1 \\ (y_k) &= 4\,|G(I)|\cos(k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \arg(G(I))) - |G(1)| \\ |G(I)| &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \arg(G(I)) &= \arctan(2) \\ |G(1)| &= 3\end{aligned}$$

d) .

$$
\begin{aligned}
x_{k+3} - x_{k+2} + 5x_{k+1} - 7x_k &= u_k \\
y_k &= x_{k+2} - 10x_k
\end{aligned}
$$

Substituieren:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &= \begin{bmatrix} a_k, & b_k, & c_k \end{bmatrix} \\
a_k &= x_k \\
b_k &= x_{k+1} \\
c_k &= x_{k+2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= x_{k+1} = b_k \\
b_{k+1} &= x_{k+2} = c_k \\
c_{k+1} &= x_{k+3} = u_k + \underbrace{x_{k+2}}_{c_k} - 5\underbrace{x_{k+1}}_{b_k} - 7\underbrace{x_k}_{a_k} \\
\mathbf{x}_{k+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -5 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u_k \\
y_k &= c_k - 10a_k \\
y_k &= \underbrace{\begin{bmatrix} -10 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \mathbf{x}
\end{aligned}
$$