Institute for Analysis and Scientific Computing
Lothar Nannen

Mathematatik I für ET - Prüfung

Termin: 18:15-20:15 8.1.2019

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
max. Punktzahl	3	4	2	2	3	4	3	21
erreichte Punktzahl								

Aufgabe 1:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x \sin(2x)$.
a) Berechnen Sie die Stammfunktionen von f.
b) Berechnen Sie für beliebige $n \in \mathbb{N}$ das Integral

$$\int_0^{n\pi} f(x)dx.$$

Aufgabe 2:
Sei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \mapsto f(x) := e^x(x^2 + a).$$

a) Berechnen Sie die lokalen Extrema von f für $a = -3$. Untersuchen Sie, ob es sich um lokale Minima oder Maxima handelt.
b) Für welche a ist das Bild der Funktion enthalten in der Menge $(0, \infty)$?
c) Für welche a hat f genau zwei Extrema?
d) Beweisen Sie folgende Aussage: Es existiert kein $a \in \mathbb{R}$, sodass f genau ein Extremum hat.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie alle reellen Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) := \begin{cases} e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}, & x < 0 \\ \alpha \sin(x) + \beta \cos(x), & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x^2, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. Begründen Sie Ihre Meinung.

Aufgabe 4:
Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Reihe absolut konvergiert

$$\sum_{j=1}^{\infty} (j^2 + 1)2^{-j}(x - 5)^j.$$

Aufgabe 5:
Skizzieren Sie für $a = 1$, $a = 0$ und $a = -1$ die komplexen Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(z-1)^3 = a$$

in der komplexen Ebene.

Aufgabe 6:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |3 - |3 - x||$.
a) Lösen Sie die Beträge auf, d.h. geben Sie f als abschnittsweise definierte Funktion an.
b) Geben Sie die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in (1, 2]\}$$

als Vereinigung von beschränkten Intervallen an.
c) Geben Sie das Infimum der Menge $M \cap (0, \infty)$ an.

Aufgabe 7:
Für $a \in \mathbb{R}$ und beliebige $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := a + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j^2 + 2j + 1} - \frac{1}{j^2} \right).$$

a) Berechnen Sie die ersten 3 Folgeglieder a_1, a_2 und a_3 für $a = 0$.
b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für beliebiges a.
c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$? Begründen Sie ihre Meinung.