

Name: _____

Matrikelnummer: _____

MODALITÄTEN: Alle Zettel müssen mit Name und Matrikelnummer beschriftet werden. Es sind nicht programmierbare, nicht grafikfähige Taschenrechner aber keine Unterlagen erlaubt. Schreiben Sie nicht mit Bleistift und dokumentieren Sie die Rechengänge sauber und übersichtlich! Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.

PUNKTEVERTEILUNG:

Beispiel	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte	/2	/4	/6	/5	/7	/8	/4	/7	/5

ERGEBNISSE werden im TUWEL Kurs zur Vorlesung Mathematik 1 für ET verlautbart.

Viel Erfolg!

1. Bestimmen Sie $b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x < b \\ x^2 + 4x - 2, & x \geq b \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

2. Berechnen Sie für $w = -2 - 3i$ und $y = -3 + 3i$ alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^3 = \left(\frac{w}{y}\right)^5.$$

3. (a) Überprüfen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 15k + 56}$$

auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls die Summe.

- (b) Eine Rekursion ist gegeben durch $a_{n+1} = 3a_n + 1$ mit $a_0 = 1$. Geben Sie eine explizite Formel für a_n an.

4. Bestimmen Sie die reelle Lösungsmenge der Gleichung

$$\left|x^2 - \frac{33}{4}\right| = 4x,$$

indem Sie eine sorgfältige Fallunterscheidung durchführen.

5. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3x^2 + 1}.$$

- (a) Entwickeln Sie die Funktion f mit Hilfe der geometrischen Reihe in eine Potenzreihe mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.
- (b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?
- (c) Berechnen Sie die Potenzreihe der erste Ableitung von f .
- (d) Bestimmen die mit Hilfe der Potenzreihe aus (a) die folgenden Ableitungen an der Stelle $x = 0$:

(i) $f^{(10)}(0)$

(ii) $f^{(15)}(0)$

6. (a) Es sei $y = f(x)$ gegeben durch

$$f(x) = (4 + e^{3x}) \cos(2x).$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades an der Stelle $x_0 = 0$.

(b) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\ln(1 - e^x)}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$

7. Gegeben sei die Funktion $f(x) = 4x^2 + 4x - 2$.

- (a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f .
- (b) Bestimmen Sie alle Punkte auf dem Graphen der Funktion f , deren Tangente durch den Punkt $(5, -3)$ verläuft.

8. (a) Berechnen Sie das Integral

$$\int x(x+5)^{\frac{3}{2}} dx$$

mit Hilfe der Substitution $u = \sqrt{x+5}$.

- (i) Drücken Sie x als Funktion von u aus.
 - (ii) Drücken Sie dx mit Hilfe der gegebenen Substitution aus.
 - (iii) Berechnen Sie damit das Integral.
- (b) Berechnen Sie

$$\int x \cos(4x) dx.$$

9. Die Funktion $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - 3$.

- (a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion.
- (b) Werten Sie die Funktion f an der Stelle $x = 1$ aus.
- (c) Vereinfachen Sie die Funktion f unter der Berücksichtigung der oben ermittelten Eigenschaften.