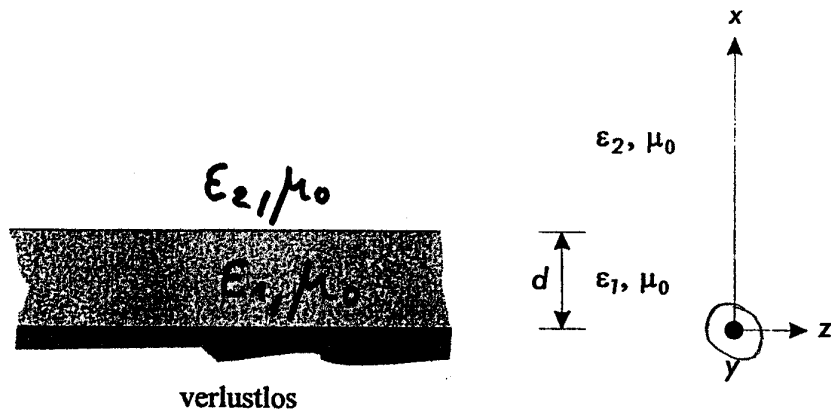
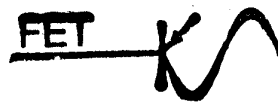


11. TM-Wellen auf dem dielektrischen Wellenleiter



Untersuchen Sie das Ausbreitungsvermögen von TM-Wellen auf dem dielektrischen Wellenleiter.

1) Finden Sie einen Ansatz für die z-Komponenten der elektrischen Feldstärke in den beiden Dielektrika.

a) $E_{z1} = A_1 \cdot \sin(k_{x1} \cdot x) \cdot \exp(-jk_z \cdot z)$

b) $E_{z2} = A_2 \cdot \exp(-k_{x2} \cdot (x-d)) \cdot \exp(-jk_z \cdot z)$

2) Ermitteln Sie die Separationsbedingungen.

$\nabla^2 \psi + \omega^2 \mu \epsilon \psi = 0$ 1) Einsetzen in die Wellengleichung
 2) Kürzen

a) $A_1 \cdot k_{x1}^2 \cdot (-\sin(k_{x1} \cdot x)) \cdot \exp(-jk_z \cdot z) + A_1 \cdot \sin(k_{x1} \cdot x) \cdot (-jk_z)^2 \cdot \exp(-jk_z \cdot z) + A_1 \cdot \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 \cdot \sin(k_{x1} \cdot x) \cdot \exp(-jk_z \cdot z) = 0$

$-k_{x1}^2 - k_z^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 = 0$ 3) Umformen

$k_{x1}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1$ Vereinfachung: $k_1^2 = k_{x1}^2$

b) $A_2 \cdot (-k_{x2})^2 \cdot \exp(-k_{x2} \cdot (x-d)) \cdot \exp(-jk_z \cdot z) + A_2 \cdot (-jk_z)^2 \cdot \exp(-k_{x2} \cdot (x-d)) \cdot \exp(-jk_z \cdot z) + A_2 \cdot \omega^2 \mu_0 \epsilon_2 \cdot \exp(-k_{x2} \cdot (x-d)) \cdot \exp(-jk_z \cdot z) = 0$

$k_{x2}^2 - k_z^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_2 = 0$

$-k_{x2}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_2$ $k_2^2 = -k_{x2}^2$

3) Berechnen Sie die fehlenden Komponenten von E- und H-Feld.

$$\underline{\underline{E_{x1}}} = \frac{-j}{k_{x1}^2} \cdot k_z \cdot A_1 \cdot \cancel{k_{x1}} \cdot \cos(k_{x1} \cdot x) \cdot \exp(-jk_z \cdot z)$$

$$= \frac{-j}{k_{x1}} \cdot A_1 \cdot \cos(k_{x1} \cdot x) \cdot \exp(-jk_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{E_{y1}}} = 0$$

$$\underline{\underline{E_{z1}}} = A_1 \cdot \sin(k_{x1} \cdot x) \cdot \exp(-jk_z \cdot z) \quad \text{FET} \quad \text{K}$$

$$\underline{\underline{H_{x1}}} = 0$$

$$\underline{\underline{H_{y1}}} = \frac{-j}{k_{x1}^2} \cdot \omega \cdot \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \cancel{k_{x1}} \cdot \cos(k_{x1} \cdot x) \cdot \exp(-jk_z \cdot z)$$

$$= \frac{-j}{k_{x1}} \cdot \omega \cdot \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \cos(k_{x1} \cdot x) \cdot \exp(-jk_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{H_{z1}}} = 0$$

$$\underline{\underline{E_{x2}}} = \frac{-j}{+k_{x2}^2} \cdot k_z \cdot A_2 \cdot (+\cancel{k_{x2}}) \cdot \exp(-k_{x2}(x-d)) \cdot \exp(-jk_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{E_{y2}}} = 0$$

$$\underline{\underline{E_{z2}}} = A_2 \cdot \exp(-k_{x2}(x-d)) \cdot \exp(-jk_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{H_{x2}}} = 0$$

$$\underline{\underline{H_{y2}}} = \frac{-j}{+k_{x2}^2} \cdot \omega \cdot \epsilon_2 \cdot A_2 \cdot (+\cancel{k_{x2}}) \cdot \exp(-k_{x2}(x-d)) \cdot \exp(-jk_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{H_{z2}}} = 0$$

4) Passen Sie diese an die Randbedingungen an.

2 Randbedingungen: E_{\tan}, H_{\tan}

$$H_{\tan 1}|_{x=d} = H_{\tan 2}|_{x=d} \Rightarrow \frac{-j}{k_{x1}} \cdot \omega \cdot \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \cos(k_{x1} \cdot d) = \frac{-j}{k_{x2}} \cdot \omega \cdot \epsilon_2 \cdot A_2$$

$$E_{\tan 1}|_{x=d} = E_{\tan 2}|_{x=d} \Rightarrow A_1 \cdot \sin(k_{x1} \cdot d) = A_2$$

Idee: Division: $\frac{\sin}{\cos} = \tan$

$$\frac{\sin(k_{x1} \cdot d) \cdot k_{x1}}{\epsilon_1 \cdot \cos(k_{x1} \cdot d)} = \frac{k_{x2}}{\epsilon_2} \Rightarrow \tan(k_{x1} \cdot d) = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cdot \frac{k_{x2}}{L}$$

5) Bestimmen Sie die Dispersionsgleichung.

$$k_{x1}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \cdot \epsilon_1 \Rightarrow k_{x1} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \cdot \epsilon_1 - k_z^2}$$

$$-k_{x2}^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \cdot \epsilon_2 \Rightarrow k_{x2} = \sqrt{k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \cdot \epsilon_2}$$

Erinnerung: $\tan(k_{x1} \cdot d) = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cdot \frac{k_{x2}}{k_{x1}}$

$$\Rightarrow \sqrt{\omega^2 \mu_0 \cdot \epsilon_1 - k_z^2} \cdot \tan(\sqrt{\omega^2 \mu_0 \cdot \epsilon_1 - k_z^2} \cdot d) = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cdot \sqrt{k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \cdot \epsilon_2}$$

6) Bestimmen Sie auf graphische Weise die Grenzfrequenz des Grundmodus der E-Welle auf dem dielektrischen Wellenleiter sofern überhaupt E-Wellen ausbreitungsfähig sind.

$$\xi = k_{x1} \cdot d \quad \eta = k_{x2} \cdot d$$



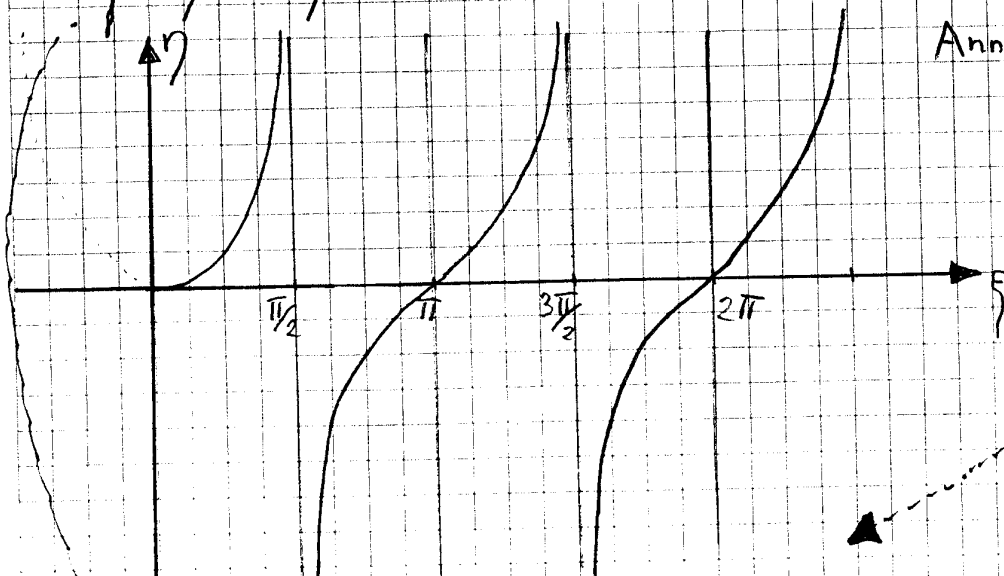
$$\Rightarrow \frac{\xi}{d} \cdot \tan\left(\frac{\xi}{d} \cdot d\right) = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cdot \frac{\eta}{d}$$

Frage: linker Ausdruck = 0
rechter Ausdruck = 0

$$\xi \cdot \tan \xi = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \eta$$

$$\xi^2 + \eta^2 = d^2 \cdot \mu_0 \cdot (\epsilon_1 - \epsilon_2) \cdot \omega^2 = v^2$$

$$v = \omega \cdot d \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot (\epsilon_1 - \epsilon_2)}$$



Annahme: 1) $\eta = 0$

$$\Rightarrow \xi \cdot \tan \xi = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\xi = 0}}$$

2) $\tan \xi = 0$

$$\xi = m \cdot \pi$$

$$\Rightarrow k_{x1, m} = \frac{m \cdot \pi}{d}$$

$m \in \mathbb{N}_0^+$
z.B. 0, 1, 2, 3, ...

$$\left(\frac{m \cdot \pi}{d} \cdot d\right)^2 = d^2 \cdot \mu_0 \cdot (\epsilon_1 - \epsilon_2) \cdot \omega_{c, m}^2$$

$$\Rightarrow \omega_{c, m} = \frac{m \cdot \pi}{d \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot (\epsilon_1 - \epsilon_2)}}$$

7) Wie weit dringt eine vom dielektrischen Plattenleiter geführte Welle ($f=50\text{Hz}$, $d=1\text{cm}$, $\epsilon_{r1}=2.26$ [Polyethylen], $\epsilon_{r2}=1$) in den Außenraum 2 ein. Hinweis: Linearisieren Sie die Dispersionsgleichung.

Annahme ϵ_{r1}

Annahme ϵ_{r2}

~~Handwritten scribbles~~

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_1}}$$

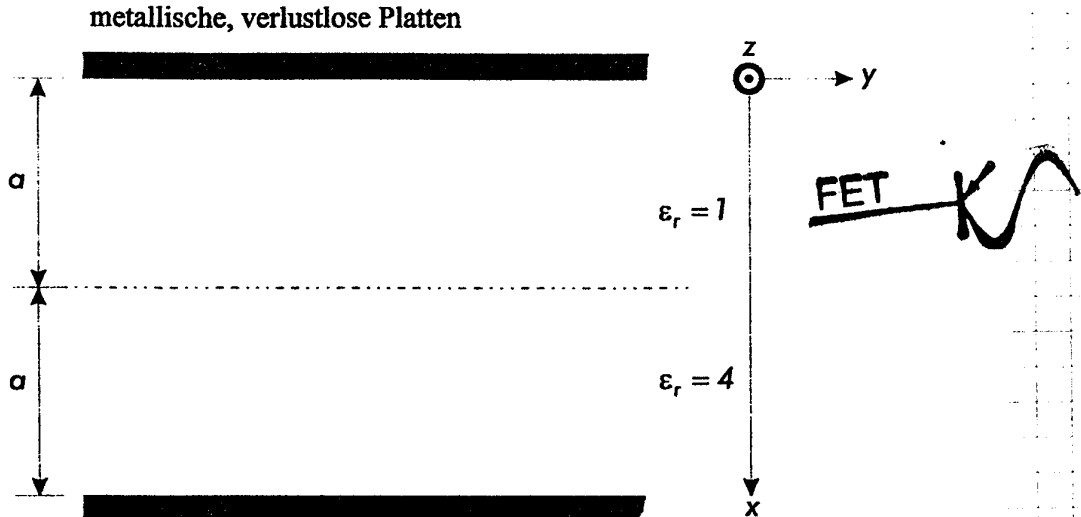
$$\sigma_1 \approx \omega \cdot \epsilon_2$$



$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega^2 \cdot \mu_0 \cdot \epsilon_2}}$$

12. Wellenausbreitung in Wellenleiterstrukturen

Untersuchen Sie die Ausbreitung von TM-Wellen in der unten skizzierten Wellenleiterstruktur. ($a = 1 \text{ cm}$)



1) Berechnen Sie alle Feldkomponenten.

Annahme: a) $E_{z_1} = A_1 \cdot \sin(k_{x_1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$

b) $E_{z_2} = A_2 \cdot \sin(k_{x_2} \cdot (x - 2a)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$

Separationsbedingung:

$\vec{\nabla}^2 \vec{\Psi} + \omega^2 \mu \Psi = 0$ Einsetzen in die Wellengleichung

a) $A_1 \cdot k_{x_1}^2 \cdot (-\sin(k_{x_1} \cdot x)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z) + A_1 \cdot \sin(k_{x_1} \cdot x) \cdot (-j k_z)^2 \cdot \exp(-j k_z \cdot z) + \omega^2 \epsilon_1 \mu_0 \cdot A_1 \sin(k_{x_1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z) = 0$

$$-k_{x_1}^2 - k_z^2 + \omega^2 \epsilon_1 \mu_0 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{k_{x_1}^2 + k_z^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_0} \quad k_1^2 = k_{x_1}^2$$

b) $A_2 \cdot k_{x_2}^2 \cdot (-\sin(k_{x_2} \cdot (x - 2a))) \cdot \exp(-j k_z \cdot z) + A_2 \cdot \sin(k_{x_2} \cdot (x - 2a)) \cdot (-j k_z)^2 \cdot \exp(-j k_z \cdot z) + \omega^2 \epsilon_2 \mu_0 \cdot A_2 \cdot \sin(k_{x_2} \cdot (x - 2a)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z) = 0$

$$-k_{x_2}^2 - k_z^2 + \omega^2 \epsilon_2 \mu_0 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{k_{x_2}^2 + k_z^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_0} \quad k_2^2 = k_{x_2}^2$$

Feldbilder:

$$\underline{\underline{E_{x1}}} = \frac{j}{k_{x1}} \cdot k_z \cdot A_1 \cdot \cancel{k_{x1}} \cdot \cos(k_{x1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$= \frac{j}{k_{x1}} \cdot k_z \cdot A_1 \cdot \cos(k_{x1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{E_{y1}}} = 0$$

$$\underline{\underline{E_{z1}}} = A_1 \cdot \sin(k_{x1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{H_{x1}}} = 0$$

$$\underline{\underline{H_{y1}}} = \frac{j}{k_{x1}} \cdot \omega \cdot \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \cancel{k_{x1}} \cdot \cos(k_{x1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$= \frac{j}{k_{x1}} \cdot \omega \cdot \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \cos(k_{x1} \cdot x) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{H_{z1}}} = 0$$

$$\underline{\underline{E_{x2}}} = \frac{-j}{k_{x2}} \cdot k_z \cdot A_2 \cdot \cancel{k_{x2}} \cdot \cos(k_{x2} \cdot (x - 2a)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{E_{x2}}} = \frac{-j}{k_{x2}} \cdot k_z \cdot A_2 \cdot \cos(k_{x2} \cdot (x - 2a)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{E_{y2}}} = 0$$

$$\underline{\underline{E_{z2}}} = A_2 \cdot \sin(k_{x2} \cdot (x - 2a)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{H_{x2}}} = 0$$

$$\underline{\underline{H_{y2}}} = \frac{-j}{k_{x2}} \cdot \omega \cdot \epsilon_2 \cdot A_2 \cdot \cancel{k_{x2}} \cdot \cos(k_{x2} \cdot (x - 2a)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$= \frac{-j}{k_x} \cdot \omega \cdot \epsilon_2 \cdot A_2 \cdot \cos(k_{x2} \cdot (x - 2a)) \cdot \exp(-j k_z \cdot z)$$

$$\underline{\underline{H_{z2}}} = 0$$



2) Berechnen Sie jenes α in Vielfachen der freien Wellenlänge, für das mindestens ein TM-Wellenmodus ausbreitungsfähig ist.

2 Randbedingungen: $E_{1,tan}|_{x=a} = E_{2,tan}|_{x=a}$ $H_{1,tan}|_{x=a} = H_{2,tan}|_{x=a}$

$$-\frac{j}{k_{x1}} \cdot \omega \cdot \epsilon_1 \cdot A_1 \cdot \cos(k_{x1} \cdot a) = -\frac{j}{k_{x2}} \cdot \omega \cdot \epsilon_2 \cdot A_2 \cdot \cos(k_{x2} \cdot (-a))$$

$$A_1 \cdot \sin(k_{x1} \cdot a) = A_2 \cdot \sin(k_{x2} \cdot (-a))$$

Trick wie voriges Bsp: Dividieren $\frac{\sin}{\cos} = \tan$

$$\frac{k_{x1}}{\epsilon_1} \cdot \tan(k_{x1} \cdot a) = \frac{k_{x2}}{\epsilon_2} \cdot \tan(k_{x2} \cdot (-a))$$

$$k_{x1} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_1 \mu_0 - k_z^2}$$

$$k_{x2} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_2 \mu_0 - k_z^2}$$

Erinnerung: $\frac{1}{\epsilon \mu} = c^2$ und $c = \lambda \cdot f$

$$\Rightarrow k_{x1} = \sqrt{\left(\frac{2\pi f}{c_0}\right)^2 - k_z^2}$$

$$k_{x2} = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{2\pi f}{c_0}\right)^2 - k_z^2}$$

Grenzfrequenz: $k_z = 0$

$$k_{x1} = \frac{2\pi \cdot f}{c_0} \quad \text{oder} \quad k_{x1} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$k_{x2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot f}{c_0} \quad \text{oder} \quad k_{x2} = \frac{4\pi}{\lambda_0}$$

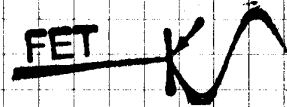
$$\frac{2\pi}{\epsilon_0 \cdot \lambda_0} \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot a\right) = \frac{\pi}{\epsilon_0 \cdot \lambda_0} \cdot \tan\left(-\frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot a\right)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot a\right) = \tan\left(-\frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot a\right)$$

$$2 \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot a\right) + \tan\left(\frac{4\pi}{\lambda_0} \cdot a\right) = 0$$

$$2 \cdot \tan \alpha + \tan 2\alpha = 0$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

FET 

$$2 \cdot \tan \alpha + \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = 0$$

Wann wird $\tan \alpha = 0$? Wenn $\alpha = n \cdot \pi$ ist.

$$1 - \tan^2 \alpha + 1 = 0 \Rightarrow 2 - \tan^2 \alpha = 0$$

$$\tan \alpha = \pm \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 0,9553 \text{ rad}$$

Wann $\alpha = 0 \cdot \pi$ physl.: $\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot a = n \cdot \pi \Rightarrow \lambda_0 = 2a$

Wann $\alpha = 0,9553$ physl.: $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot a = 0,9553 \Rightarrow \lambda_0 = 6,577 a$

3) Ermitteln Sie die Grenzfrequenzen höherer Moden.

$$\alpha = 0,9553 + n \cdot \pi \quad \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a = 0,9553 + n \cdot \pi$$

$$f = \frac{c_0}{\lambda}$$

Tabelle:

$$f_{g1} |_{n=0} = 4,55 \text{ GHz}$$

$$f_{g2} |_{n=1} = 19,55 \text{ GHz}$$

$$f_{g3} |_{n=2} = 34,54 \text{ GHz}$$

4) Welchen Verlauf hat der Betrag der z-Komponente des elektrischen Feldes des Grundmodus über der Querabmessung (numerische Auswertung)?

$$\text{Hinweis: } \tan(2j) = \frac{2 \tan(j)}{1 - \tan^2(j)}$$

Grundmodus: $f_{g1} = 4,55 \text{ GHz}$

$$|E_{z1}| = A_1 \cdot |\sin(k_{x1} \cdot x)| = E_0 \cdot |\sin \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 / \mu_0 - k_z^2}|$$

$$k_{x1} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$\omega^2 \epsilon_0 / \mu_0 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 = k_z^2$$

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi \cdot c}{\lambda_0}$$

$$\tan(2j) = \frac{2 \tan(j)}{1 - \tan^2(j)}$$

$$k_{x1} = \sqrt{\left(\frac{2\pi f}{c_0}\right)^2 - k_z^2}$$

Allgemein: $|E_{z1}| = A_1 \cdot \sin(k_{x1} \cdot x)$ $k_{x1} = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\pi}{a}$ $|E_{z1}| = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right)$
 $|E_{z2}| = A_2 \cdot \sin(k_{x2} \cdot (x-2a))$ $k_{x2} = \frac{4\pi}{a} = \frac{2\pi}{a}$ $|E_{z2}| = A_3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right)$