VU Telekommunikation

Prof. A. Goiser, A. Körner, G. Lasser, F. Xaver
Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik

Übung 1 (17. – 15. Mai 2010)

Für die folgenden Beispiele sei das Rechtecksignal als

$$p(t) := \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowie die Dreiecksfunktion als

$$\Lambda(t) := \max(1 - |t|, 0) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert.

Beispiel 1 — Korrelationsfunktion. Gegeben sind zwei Funktionen

$$s_1(t) = 2\sin(2\pi 0,1t)p\left(\frac{t-5}{10}\right)$$

und

$$s_2(t) = -2\Lambda\left(\frac{t-2,5}{2,5}\right) + 2\Lambda\left(\frac{t-7,5}{2,5}\right).$$

1. Skizzieren Sie die Funktionen.
2. Berechnen und skizzieren Sie die normierte Kreuzkorrelationsfunktion $\rho_{12}(\tau)$ von $s_1(t)$ und $s_2(t)$.
3. Geben Sie das Bild der normierten Kreuzkorrelationsfunktion $\rho_{12} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an und interpretieren Sie es.
4. Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho_{12}(0)$.

Beispiel 2 — Signaltheorie. Betrachten Sie das Signal

$$s(t) = a \cdot p(t - \mu), \qquad a, \mu \in \mathbb{R},$$

wobei $p(t)$ den normierten verschobenen Rechteckimpuls bezeichnet.

1. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $S_1(f) := \mathcal{F}\big(s(t)\big)$ und $S_2(f) := \mathcal{F}\big(s^2(t)\big)$.
2. Ermitteln Sie die Korrelationsfunktion von $s(t)$ mit dem normierten Rechteckimpuls $p(t)$.
3. Berechnen Sie die Faltung zwischen $s(t)$ und dem normierten Rechteckimpuls $p(t)$.
4. Lässt sich aus Punkt (2.) und (3.) ein Zusammenhang folgern? Diskutieren Sie das Resultat.

Beispiel 3 — Autokorrelation und Selbstfaltung. Gegeben sei das Signal

$$s(t) = 8 \cdot p(t - 3).$$

1. Berechnen und skizzieren Sie
   a) die Autokorrelationsfunktion $R_s(\tau)$,
   b) das Energiedichtespektrum $E_s(f)$ sowie
   c) die Selbstfaltung $s(t) * s(t)$.
2. Bestimmen Sie die Dekorrelationszeit.
3. Diskutieren Sie den Unterschied zwischen Autokorrelation und Selbstfaltung.

Beispiel 4 — Stationärer Zufallsprozess. Das Leistungsdichtespektrum eines stationären Zufallsprozess ist eine gerade Funktion. Der Graph ist jeweils eine Dreiecksfunktion zentriert um $\pm f_0$ mit $f_0 = 10$ kHz. Die Basis der Dreiecke ist 2 kHz breit und das Maximum liegt bei $500 \cdot 10^{-6}$ V^2/Hz.

1. Skizzieren Sie das Leistungsdichtespektrum und geben Sie eine geschlossene Funktionsgleichung an.
2. Berechnen Sie die Leistung des Zufallsprozesses.
3. Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion des Zufallsprozesses und skizzieren Sie diese.
4. Bestimmen Sie die Dekorrelationszeit.

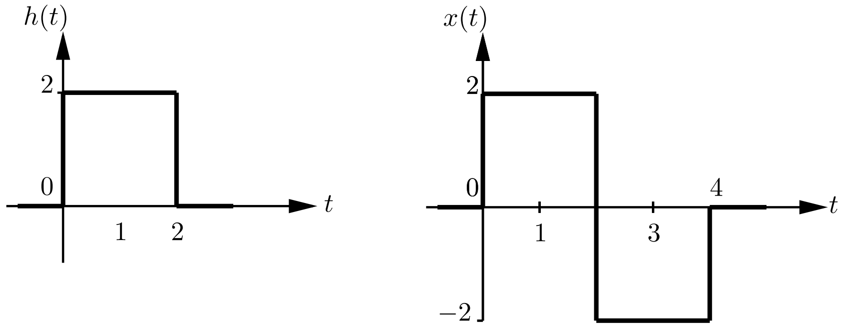

Abbildung 1: Angabe zu Beispiel 5

Beispiel 5 — Lineares System. Von einem linearen System ist die Impulsantwort $h(t)$ bekannt und es wird mit einem Eingangssignal $x(t)$ angeregt (siehe Abbildung 1).

1. Berechnen und skizzieren Sie das Amplitudenspektrum des Eingangssingals.
2. Geben Sie die Übertragungsfunktion des Systems an.
3. Berechnen und skizzieren Sie das Ausgangssignal $y(t)$.
4. Berechnen und skizzieren Sie das Amplitudenspektrum des Ausgangssignals.

Beispiel 6 — Lineares System angeregt mit Rauschen. Ein RC-Tiefpass ($R = 1$ kΩ, $C = 1$ μF) wird mit weißem Rauschen ($N_0/2 = 200$ pW/Hz) angeregt.

1. Skizzieren Sie die Schaltung.
2. Berechnen Sie die Impulsantwort $h(t)$ und die Übertragungsfunktion $H(f)$.
3. Berechnen Sie die Leistung des Ausgangssignals.
4. Berechnen Sie die Sprungantwort $q(t)$ des Systems.
5. Ist das Ausgangssignal ebenfalls ein weißes Signal?
6. Bestimmen Sie die äquivalente Rauschbandbreite des Systems.

Beispiel 7 — Zufallsvariablen. Seien X und Y zwei reelle statistisch unabhängige Zufallsvariablen mit den Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

$$p_X(x) = 2 \cdot p\,(2x)$$

und

$$p_Y(y) = c \cdot p\left(\frac{y-2}{2}\right).$$

1. Zeigen Sie dass $p_X(x)$ die Bedingungen einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion erfüllt.

2. Wie groß muss die Konstante c sein, damit $p_Y(y)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist?

3. Zeichnen sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $P_X(x)$ und $P_Y(y)$.

4. Gegeben sei nun eine neue Zufallsvariable

   $$Z = X + Y.$$

   Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p_Z(z)$.

5. Geben Sie die Momente und zentrierten Momente von Z der Ordnung 1 und 2 an.

Beispiel 8 — Theorem von Parseval. Beweisen Sie für periodische Signale $s(t)$ mit der Periode $T \in \mathbb{R}^+$ das *Theorem von Parseval*

$$P = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |s(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2,$$

wobei $C_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$, die Fourierkoeffizienten von $s(t)$ bezeichnen. Wie ist das Theorem in den Hilberträumen (Funktionenraum L^2, Folgenraum l^2; siehe Mathematik 3 für Elektrotechnik) formuliert?