

Ausarbeitung des Fragenkataloges
zu
Telekommunikation
(Prof. Goiser)

Inhalt

1. Einleitung.....	6
2. Periodische und transiente Signale.....	6
1. Was wissen Sie über die trigonometrische Form der Fourierreihe?.....	6
2. Was wissen Sie über die Exponentialform der Fourierreihe?.....	7
3. Worin liegen die Unterschiede zwischen ein- und zweiseitigem Amplitudenspektrum?.....	8
4. Was wissen Sie über das diskrete Leistungsdichtespektrum und über das Parseval'sche Theorem?.....	8
5. Wie bestimmt man die Bandbreite eines Signales?.....	9
6. Was wissen Sie über das Abtasttheorem von Nyquist?.....	9
7. Wie kommt man von der Fourierreihe zur Fouriertransformation?.....	9
8. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation der allgemeinen Rechteckfunktion an.....	10
9. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation eines um τ Sekunden verschobenen allgemeinen Rechtecks an.....	10
10. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation eines um τ Sekunden verschobenen Diracs an.....	10
11. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation eines Dreiecks der Breite $2T$ an.....	11
12. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation einer Exponentialschwingung an.....	11
13. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation einer Sinusschwingung an.....	11
14. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation der Vorzeichenfunktion an.....	11
15. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation der Sprungfunktion an.....	12
16. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation der Abtastfunktion an.....	12
17. Welche Theoreme der Fouriertransformation kennen Sie?.....	12
18. Erklären Sie das Theorem der Zeitverschiebung in der Fouriertransformation.....	13
19. Erklären Sie das Theorem der Faltung in der Fouriertransformation.....	13
20. Erklären Sie, wie man von der Fouriertransformation zur Fourierreihe kommt.....	13
21. Wie stellt man Kurvenformen als Vektoren dar?.....	14
22. Erklären Sie den Zusammenhang und die Eigenschaften der Korrelationsfunktion von reellen Signalen.....	15
3. Zufallssignale und Rauschen.....	16
1. Was wissen Sie über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, bedingte Wahrscheinlichkeit, gemeinsame Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse, statistische Unabhängigkeit und das Gesetz von Bayes?.....	16
2. Was wissen Sie über die Fehlerwahrscheinlichkeit in einem Datenblock, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Bitfehler gegeben ist?.....	17
3. Welche Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsdichte kennen Sie?.....	17
4. Geben Sie die wichtigsten Momente einer Wahrscheinlichkeitsdichte an.....	18
5. Was wissen Sie über die gemeinsame Verteilung und die Randverteilung?.....	19
6. Was wissen Sie über die gemeinsamen Momente, Korrelation und Kovarianz?.....	20
7. Leiten Sie den zentralen Grenzwertsatz her.....	20
8. Wie beschreibt man einen Zufallsprozess in allgemeinsten Form?.....	21
9. Erklären Sie was stationäre und ergodische Zufallsprozesse sind.....	21
10. Was wissen Sie über den Gauß-Prozess?.....	22
11. Was wissen Sie über die Autokorrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum von Zufallsprozessen.....	22
12. Erklären Sie das Wiener-Kintchine Theorem.....	23

13. Was wissen Sie über weißes Rauschen?.....	23
14. Was wissen Sie über die Kreuzkorrelation von Zufallsprozessen?.....	24
4. Lineare Systeme.....	24
1. Wie beschreibt man ein lineares System im Zeitbereich, wenn es mit einem determinierten Signal angeregt wird?.....	24
2. Wie berechnet man das Ausgangssignal eines linearen Systems, wenn es mit einem determinierten Signal angeregt wird?.....	25
3. Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Sprungantwort und Impulsantwort eines linearen Systems.....	25
4. Wie beschreibt man ein lineares System im Frequenzbereich?.....	26
5. Wie beschreibt man das Ausgangsverhalten eines linearen Systems, wenn dieses mit einem Zufallssignal angeregt wird?.....	26
6. Was wissen Sie über die Rauschbandbreite eines linearen Systems?.....	27
7. Was wird aus weißem Rauschen, wenn es über ein lineares System übertragen wird?.....	27
8. Was wissen Sie über die Rayleighdichte?.....	28
9. Was wissen Sie über die Chi-Square-Dichte?.....	28
5. Abtasten, Multiplex und PCM.....	29
1. Welche Arten des Abtastvorganges kennen Sie und wie unterscheiden sich diese?.....	29
2. Was bezeichnet man als Aliasing und welches Gütekriterium verwendet man dafür?.....	29
3. Was wissen Sie über das Abtasten von Bandpasssignalen?.....	30
4. Was wissen Sie über das Multiplexen von analogen Impulsen?.....	31
5. Was wissen Sie über die quantisierte Puls-Amplituden Modulation?.....	31
6. Was wissen Sie über PCM?.....	32
7. Was wissen Sie über companded PCM?.....	32
8. Was wissen Sie über das Multiplexen von PCM-Signalen?.....	33
9. Was wissen Sie über Delta PCM?.....	33
10. Was wissen Sie über differentielles PCM (DPCM)?.....	33
11. Was wissen Sie über adaptives PCM (ADPCM)?.....	34
12. Was wissen Sie über die Deltamodulation?.....	34
13. Was wissen Sie über adaptive Deltamodulation?.....	34
6. Basisbandübertragung und Basisbandmodulation.....	34
1. Was wissen Sie über Center-Point Detection.....	34
2. Leiten Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit einer binären Basisbandübertragung in einem Gauß-gestörten Kanal her. Hinweis: Legen Sie besondere Sorgfalt auf die von Ihnen gemachten Annahmen.....	35
3. Bestimmen Sie die Bitfehlerrate einer Basisbandübertragung in AWGN, wenn ein unipolares NRZ Rechteckformat verwendet wird.....	36
4. Bestimmen Sie die Bitfehlerrate einer Basisbandübertragung in AWGN, wenn ein bipolares NRZ Rechteckformat verwendet wird.....	36
5. Beschreiben Sie die unipolare Signalisierung (RZ und NRZ) und geben Sie deren Eigenschaften an.....	37
6. Beschreiben Sie die polare Signalisierung (RZ und NRZ) und geben Sie deren Eigenschaften an.....	37
7. Beschreiben Sie die Manchester Codierung.....	38
8. Was wissen Sie über die Entzerrung von Impulsen?.....	38
9. Was wissen Sie über die Taktrückgewinnung?.....	39
7. Entscheidungstheorie.....	39
1. Welche Entscheidungsphilosophien gibt es für binäre Symbolströme?.....	39
2. Was wissen Sie über das Entscheidungskriterium vom Bayes?.....	40
3. Was wissen Sie über das Neyman-Pearson Kriterium?.....	41
8. Optimale Filterung für die Übertragung und Detektion.....	41
1. Wie kommt es zur Intersymbolinterferenz und wie kann man sie bekämpfen?.....	41
2. Leiten Sie die Bedingungen her, die für ISI-freie Signale notwendig sind.....	42
3. Erklären Sie das Nyquist'sche Symmetrietheorem.....	42

4. Erklären Sie das Raised-Cosine Filter.....	43
5. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion für Matched-Filter Detektion.....	43
6. Berechnen Sie die Impulsantwort eines Matched-Filters.....	44
7. Berechnen Sie das Ausgangssignal eines Matched-Filters.....	44
8. Erklären Sie das Matched-Filter mit: Übertragungsfunktion, Impulsantwort und dem Ausgangssignal.....	45
9. Erklären Sie den Unterschied zwischen Matched-Filter Detektion und Korrelationsdetektion.....	45
10. Leiten Sie das SNR zum Entscheidungszeitpunkt für einen Korrelationsdetektor her.....	46
11. Was wissen Sie über die Root-Raised Cosine Filterung?.....	48
9. Informationstheorie, Quellkodierung und Verschlüsselung.....	48
1. Leiten Sie den Informationsgehalt einer Nachricht her.....	48
2. Berechnen Sie und stellen Sie graphisch die Entropie einer binären Quelle dar.....	49
3. Erklären Sie die Mechanismen, welche zum Informationsverlust auf Grund von Störungen führen. Hinweis: keine Gleichungen.....	50
4. Was wissen Sie über Quellkodierung?.....	50
5. Wie dekodiert man Codewörter variabler Länge?.....	51
6. Welche Beispiele kennen Sie für Quellkodierung und worauf kommt es dabei an?.....	52
10. Kanalkodierung.....	53
1. Welche Anforderungen richtet man an Kanalkodierung und welche Arten gibt es?.....	53
2. Erklären Sie die Eigenschaften der wichtigsten ARQ-Verfahren.....	53
3. Wodurch kommt der Schwelleneffekt in der Bitfehlerwahrscheinlichkeit kodierter Übertragungssysteme zustande?.....	54
4. Welche Güteparameter gibt es zur Beurteilung von Codes?.....	54
5. Erklären Sie die Struktur und Eigenschaften von Blockcodes.....	55
6. Leiten Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit eines Codewortes für einen Blockcode her.....	55
7. Welche Eigenschaften haben lineare Gruppencodes und welche Codes gehören zu linearen Gruppencodes?.....	56
8. Was wissen Sie über den Hamming-Bound?.....	56
9. Geben Sie eine Möglichkeit an, wie man die Codewörter eines linearen Gruppencodes systematisch konstruiert.....	57
10. Wie dekodiert man einen linearen Gruppencode mit Hilfe eines Syndroms?.....	57
11. Wie wird ein Informationswort durch einen zyklischen Code codiert und decodiert? Welche Eigenschaften besitzt der zyklische Code?.....	59
12. Was wissen Sie über Interleaving?.....	59
13. Was wissen Sie über die Codierung mit Hilfe eines Faltungscodes?.....	60
14. Wie decodiert man einen Faltungscodes?.....	60
15. Was wissen Sie über den Viterbi-Algorithmus?.....	61
11. Bandpassmodulation eines Trägersignales.....	61
1. Was wissen Sie über OOK?.....	61
2. Vergleichen Sie kohärente und unkohärente Empfänger.....	62
3. Leiten Sie eine Formel für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für OOK-Modulation her.....	62
4. Was wissen Sie über die BPSK?.....	63
5. Leiten Sie eine Formel für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für BPSK-Modulation her.....	63
6. Was wissen Sie über BFSK?.....	64
7. Welche Verfahren kennen Sie für die Trägerrückgewinnung?.....	64
8. Was wissen Sie über MPSK?.....	65
9. Was wissen Sie über QPSK und OQPSK?.....	65
10. Was wissen Sie über MSK und GMSK?.....	66
12. Systemrauschen und Linkbudget.....	67
1. Was wissen Sie über das thermische Rauschen als Störung?.....	67

2. Worauf bezieht sich die Ultraviolettkatastrophe?.....	68
3. Was wissen Sie über das Schrotrauschen und Flickerrauschen?.....	68
4. Bestimmen Sie die Rauschleistung eines rauschenden Verstärkers, wenn am Eingang ein rauschender Widerstand liegt.....	69
5. Wie bestimmt man die Rauschtemperatur von kaskadierten Teilsystemen?.....	69
6. Wie bestimmt man die Rauschtemperatur, wenn ein System verlustbehaftet ist?.....	69
7. Beschreiben Sie die Struktur eines Superheterodynempfängers. Geben Sie Größenordnungen für die Verstärkungen und die Rauschtemperaturen der einzelnen Teile an.....	70
8. Was wissen Sie über die Formel von Friis?.....	70
9. Welche Größen gehen in das Linkbudget für Kabelübertragung und Funkübertragung ein?.....	71
10. Was wissen Sie über die isotrope Antenne?.....	71
11. Was wissen Sie über Antennen mit Richtwirkung?.....	72
12. Bestimmen Sie die Trägerleistung für Freiraumausbreitung am Anschluss der Empfangsantenne.....	73
13. Was bedeutet und gibt die Bezeichnung EIRP an? Was bedeutet und gibt die Bezeichnung FSPL an?.....	73
14. Was wissen Sie über die Mehrwegeausbreitung?.....	74
15. Bestimmen Sie die empfangene Trägerleistung für die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen über eine ebene Fläche am Anschluss der Antenne. (Hinweis: verwenden Sie das zwei Pfade Modell).....	74
16. Welche Rauschquellen bestimmen die Antennentemperatur?.....	75
13. Mobile Kommunikation.....	75
1. Welche Probleme verursacht der Mobilfunkkanal?.....	75
2. Welche Größen bestimmen die empfangene Leistung?.....	76
3. Wodurch unterscheiden sich langsame und schnelle Schwunderscheinungen?.....	76
4. Wie werden schnelle Schwunderscheinungen charakterisiert?.....	76
5. Was wissen Sie über die Zeitdispersion, frequenzselektiven Schwund und die Kohärenzbandbreite?.....	76
6. Was wissen Sie über zelluläre Strukturen und leiten Sie die Clusterformel her.....	77
7. Erklären Sie die wesentlichen Elemente der Architektur eines terrestrischen Mobilfunksystems.....	78
8. Was wissen Sie über Code-Division Multiplex (CDMA) und die Spread-Spectrum Technologie?.....	78
14. Übertragung und Speicherung von Videosignalen.....	79
1. Beschreiben Sie den prinzipiellen Aufbau eines Fernsehbildes. Wie heißen die Standards für das Fernsehen in Österreich, USA und Frankreich? Erklären Sie den in Österreich verwendeten Standard genauer.....	79
2. Was wissen Sie über die Farbdarstellung von Videosignalen?.....	79
3. Beschreiben Sie den PAL-Standard und vergleichen Sie diesen mit anderen Standards.....	80
4. Beschreiben Sie den Standard HDTV.....	80

1. Einleitung

Einleitung ist das erste Kapitel des Buches. Da hier aber keine Fragen zu beantworten sind möchte ich dieses Kapitel als Einleitung zu dieser Ausarbeitung benutzen. Dies ist eine Ausarbeitung zur Vorlesung von Professor Goiser. Sie beruht auf einem Fragenkatalog, der auch auf der TUWIS-Seite der Vorlesung als offizieller Fragenkatalog angegeben ist.

Zur Fehlerhaftigkeit. Die Erklärungen in dieser Ausarbeitung sind keine direkte Übersetzung aus dem Buch. Ich gebe offen zu, dass ich dieses Buch (Digital Communications, Ian A. Glover und Peter M. Grant) nicht mag, weil es meiner Meinung nach schlecht geschrieben ist. Manche Erklärungswege, die ich hier verwende können unvollständig oder falsch sein. Ich kann aber versichern, mich ehrlich um größtmögliche Vollständigkeit und Richtigkeit bemüht zu haben. Der hintere Teil der Ausarbeitung verliert wahrscheinlich an Qualität, da das Buch das auch tut, und mir leider die Zeit auch etwas knapp geworden ist.

Zum Umfang, den ich wohl ganz schön unterschätzt habe, als ich mit dem Schreiben dieses Dokuments begann. Ich habe die Angewohnheit, sofern es zeitlich möglich ist, die Dinge so weit zu zerlegen bis ich sie vollständig verstanden zu haben glaube. Das spiegelt sich auch in meiner Ausarbeitung nieder, sie ist bestimmt nicht zum auswendig lernen geeignet. Der Leser dieses Dokumentes ist gut beraten, wenn er versucht, das geschriebene zu verstehen.

Nach abgelegter Prüfung kann ich sagen, dass es für ein positives Abschließen der Prüfung momentan definitiv NICHT notwendig ist IRGENDWAS zu verstehen. Schade. Wer eine gute Note haben will, sollte aber doch ungefähr wissen, wovon er spricht.

Ich wünsche allen viel Erfolg bei der Prüfung und hoffe, dass diese Ausarbeitung eine wertvolle Lernunterlage bietet.

Sollte jemand Fehler in diesem Dokument finden, dann bitte ich, mich davon in Kenntnis zu setzen, meine E-Mail Adresse ist schany@gmx.at

2. Periodische und transiente Signale

1. Was wissen Sie über die trigonometrische Form der Fourierreihe?

Praktisch jede periodische Funktion lässt sich als so genannte *Fourierreihe* darstellen.

Die trigonometrische Darstellung der Fourierreihe hat die Form:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

wobei $\omega_n = n \omega_0$ - die Frequenz der Teilschwingungen - immer ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz ist.

Es sind also die Koeffizienten C_n , sowie die Nullphasen der Teilschwingungen zu berechnen.

Eine Darstellung der Fourierreihe, die ein einfaches Berechnen ihrer Koeffizienten ermöglicht, ist die folgende Darstellung:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \omega_n t - B_n \sin \omega_n t$$

Hierfür gilt:

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t') dt'$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(t') \cos(\omega_n t) dt'$$

$$B_n = -\frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(t') \sin(\omega_n t) dt'$$

Die Koeffizienten werden also über die sogenannte „periodische Korrelation“ gebildet. Der Faktor 2 bei den Koeffizienten A und B wirkt etwas fehl am Platz, ist aber notwendig, damit für $f(t) = \cos(\omega_n t)$ der zugehörige Koeffizient $A_n=1$ ist.

Die Umrechnung zur ersten Darstellung erfolgt über

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{B_n}{A_n}\right)$$

Allgemein lässt sich zur Fouriertransformation sagen, dass mit ihr jede stückweise integrierbare Funktion an allen Punkten (außer den Sprungstellen) theoretisch beliebig genau approximierbar ist. Mathematisch betrachtet handelt es sich um die Abbildung der periodischen Funktion in einen unendlichdimensionalen Raum, dessen Basisvektoren die einzelnen Schwingungen sind. Die Koordinaten sind dann die Koeffizienten und die Funktion der skalaren Multiplikation wird von der Korrelationsfunktion übernommen.

2. Was wissen Sie über die Exponentialform der Fourierreihe?

Praktisch jede periodische Funktion lässt sich als so genannte *Fourierreihe* darstellen.

Die Exponentialform der Fourierreihe hat die Form:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\omega_n t}$$

Dies ist die allgemeinste Form der Fourierreihe, sie gilt sowohl für reelle, als auch für komplexwertige Funktionen $f(t)$.

Die Fourierkoeffizienten werden so wie bei der trigonometrischen Form über eine periodische Korrelation berechnet:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t') e^{-j\omega_n t'} dt'$$

Der negative Exponent liegt darin begründet, dass für $f(t) = e^{j\omega_n t}$ das Integral wieder 1 ergeben soll.

Für reellwertige $f(t)$ gibt es einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten mit positivem und negativem n :

$$C_n = C_{-n}^*$$

Die Umrechnung in die trigonometrische Sinus/Kosinus – Form ist über den Zusammenhang

$$2C_n = A_n + jB_n \text{ möglich (natürlich nur für reelle Signale).}$$

Allgemein lässt sich zur Fouriertransformation sagen, dass mit ihr jede stückweise integrierbare Funktion an allen Punkten (außer den Sprungstellen) theoretisch beliebig genau approximierbar ist. Mathematisch betrachtet handelt es sich um die Abbildung der periodischen Funktion in einen unendlichdimensionalen Raum, dessen Basisvektoren die einzelnen Schwingungen sind. Die

Koordinaten sind dann die Koeffizienten und die Funktion der skalaren Multiplikation wird von der Korrelationsfunktion übernommen.

3. Worin liegen die Unterschiede zwischen ein- und zweiseitigem Amplitudenspektrum?

Ausgehend von der Exponentialform der Fourierreihen, in der sowohl Koeffizienten mit positivem wie auch mit negativem Index vorkommen, lässt sich ein Amplitudenspektrum (Amplitude über der Frequenz) konstruieren.

Für komplexwertige Signale werden beide Teile dieses Spektrums benötigt. Es ergibt sich (da periodische Signale nur diskrete Frequenzen haben) ein diskretes Spektrum von $n=-\infty$ bis $+\infty$.

Für reellwertige Signale lässt sich aus dem Zusammenhang $C_n = C_{-n}^*$ ablesen, dass ein Fourierkoeffizient und sein Partner mit negativem Index den gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Phase haben. Es ergibt sich für das Amplitudenspektrum also eine gerade Funktion (für das Phasenspektrum hingegen eine ungerade), ergo wird nur eine Seite des Spektrums benötigt, die andere ergibt sich aus dieser.

Man erhält ein einseitiges Spektrum, das die Koeffizienten der trigonometrischen Fourierreihe (Kosinusform) darstellt, indem die Amplituden mit negativem Index zu den zugehörigen mit positivem Index addiert werden (entspricht einer Verdoppelung). Die Phase bleibt gleich.

Das einseitige Spektrum ist also eine Vereinfachung bei Einschränkung auf reellwertige Signale.

4. Was wissen Sie über das diskrete Leistungsdichtespektrum und über das Parseval'sche Theorem?

Für eine periodische Funktion $f(t)$ lassen sich zwei Begriffe für Leistung definieren. Zum einen die Momentanleistung $f(t)^2$ und zum anderen die gemittelte Leistung

$$P_m = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |f(t)|^2 dt$$

Eine Sinusschwingung mit der Amplitude 1 hat immer die gemittelte Leistung $\frac{1}{2}$. Da unsere periodischen Signale aus einzelnen Sinusschwingungen aufgebaut sind, lässt sich dieser Umstand nutzbar machen. Berechnet man die gemittelte Leistung für ein periodisches Signal, dann erhält man ein Integral über einen Ausdruck, in dem jede der einzelnen Schwingungen miteinander multipliziert wird. Da die einzelnen Schwingungen jedoch orthogonal bezüglich der Korrelation sind, fallen alle Multiplikationen der Schwingungen untereinander weg, und es bleiben nur die Multiplikationen mit sich selber zurück, es resultiert:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \phi) \right|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |\cos(\omega_n t + \phi)|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^2}{2}$$

Dies entspricht dem Parseval'schen Theorem für reellwertige Signale.

Die Koeffizienten der Länge $\frac{C_n^2}{2}$ können als Spektrum angeschrieben werden, es ist dies das einseitige Leistungsdichtespektrum.

Die Verallgemeinerung auf die exponentialform der Fourieranalyse und entsprechend auf das

zweiseitige Leistungsdichtespektrum erfolgt analog. Es ist dann:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{j\omega_n t} \right|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2$$

Die Koeffizienten des zweiseitigen Leistungsdichtespektrums sind dann entsprechend $|C_n|^2$.

5. Wie bestimmt man die Bandbreite eines Signales?

Alle praktisch vorkommenden Signale sind in irgendeiner Form Bandbeschränkt, d.h. der Betrag der Frequenzanteile nimmt mit steigender Frequenz ab. Es werden nun Grenzfrequenzen f_{min} und f_{max} gesucht, unterhalb bzw. oberhalb deren der Betrag der Frequenzanteile des Signals unterhalb eines bestimmten Wertes liegt. Die Bandbreite des Signals ist dann $B = f_{max} - f_{min}$. Es ist wichtig zu verstehen, dass dieser Grenzwert willkürlich gewählt wird (häufig $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3\text{dB}$ des Maximalwertes).

Für Basisband- oder Tiefpasssignale (synonym), die keine untere Grenzfrequenz haben wird der Nullpunkt als f_{min} verwendet. Es wird nie eine negative von einer positiven Frequenz abgezogen. Die Bandbreite ist gleich für ein- und zweiseitige Spektren.

6. Was wissen Sie über das Abtasttheorem von Nyquist?

Das Abtasttheorem von Nyquist besagt, dass ein Signal, das keine Spektralkomponenten über f_h hat und mit der Sampling-Frequenz f_s abgetastet wird, wieder (theoretisch) perfekt rekonstruiert werden kann, sofern

$$f_s \geq 2 \cdot f_h$$

ist.

Dies folgt aus der Tatsache, dass durch die Abtastung ein periodisches (zweiseitiges) Spektrum entsteht. Die Periode ist dabei f_s . Damit sich also positiver und negativer Teil zweier Perioden nicht berühren muss obige Ungleichung gelten.

7. Wie kommt man von der Fourierreihe zur Fouriertransformation?

Die Fouriertransformation beschreibt im Gegensatz zur Fourierreihe nicht periodische Funktionen. Nun kann eine nicht periodische Funktionen aber als periodisch mit der Periodendauer unendlich angesehen werden.

Man wählt den folgenden Ansatz für die Gleichungen der Exponentialform der Fourieranalyse:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \infty \\ \int_t^{t+T} &\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \\ C_n &\rightarrow F(\omega) d\omega \\ \sum &\rightarrow \int \end{aligned}$$

Es gehen also die Integralgrenzen der Analysegleichung nach Unendlich, aus den Fourierkoeffizienten wird eine spektrale Verteilungsfunktion und aus der Summe bei der Synthesegleichung wird ein Integral.

$$C_n = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t') e^{-j\omega_n t'} dt' \rightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega t'} dt$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\omega_n t} \rightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Das Ergebnis dieses Überganges ist die Fouriertransformation. Wichtig anzumerken ist, dass $F(\omega)$ eine integrierbare Verteilungsfunktion ist. Im Gegensatz zu C_n mit der Einheit V (für Spannungssignale) hat sie die Einheit $V/(1/s) = Vs$.

8. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation der allgemeinen Rechteckfunktion an.

Die allgemeine Rechteckfunktion ist definiert als:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 1/2 & |t| = 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$

Eingesetzt in die Transformationsgleichung:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t') e^{-j\omega t'} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\omega t'} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-1/2}^{1/2}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega 1/2} - e^{j\omega 1/2}) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = \text{sinc}(\omega/(2\pi)) \text{ mit } \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Es ergibt sich also die Korrespondenz:

$$\Pi(t) \Leftrightarrow \text{sinc}(\omega/(2\pi))$$

9. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation eines um τ Sekunden verschobenen allgemeinen Rechtecks an.

Ausgehend von der Korrespondenz $\Pi(t) \Leftrightarrow \text{sinc}(\omega/(2\pi))$ und der Verschiebungseigenschaft der Fouriertransformation $f(t-\tau) \Leftrightarrow e^{-j\omega\tau} F(\omega)$ ergibt sich hier die Korrespondenz:

$$\Pi(t-\tau) \Leftrightarrow e^{-j\omega\tau} \text{sinc}(\omega/(2\pi))$$

10. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation eines um τ Sekunden verschobenen Diracs an.

Der Dirac-Impuls ist eine Distribution die Definiert ist als $\delta(t) = \begin{cases} 0 & |t| > 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$ mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \text{ und } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) \cdot f(t) dt = f(\tau) \text{ . Mit dieser Definition ist}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t' - \tau) e^{-j\omega t'} dt = e^{-j\omega\tau}$$

Es folgt also die Korrespondenz:

$$\delta(t - \tau) \Leftrightarrow e^{-j\omega\tau}$$

11. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation eines Dreiecks der Breite $2T$ an.

Ein Dreieck der Breite $2T$ entsteht durch Faltung zweier Rechtecksfunktionen der Breite T .

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

Mit der Korrespondenz $\Pi(t) \Leftrightarrow \text{sinc}(\omega/(2\pi))$, $f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ und der Faltungseigenschaft der Fouriertransformation $f(t) * g(t) \Leftrightarrow F(\omega) \cdot G(\omega)$ folgt

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow T \text{sinc}^2(\omega/(2\pi)T)$$

12. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation einer Exponentialschwingung an.

Mit der bekannten Korrespondenz $\delta(t - \tau) \Leftrightarrow e^{-j\omega\tau}$ und der Dualität der Fouriertransformation $F(t) \Leftrightarrow f(-\omega)$ (die Fouriertransformierte mit einer Zeitvariablen korrespondiert mit der Ausgangsfunktion mit der negativen Frequenzvariablen) ergibt sich die Korrespondenz:

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$$

13. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation einer Sinusschwingung an.

Mit der Korrespondenz $e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$, der Zeitspiegelungseigenschaft der Fouriertransformation $f(-t) \Leftrightarrow F(-\omega)$ und der aus der Euler'schen Identität folgenden Beziehung $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ ergibt sich die Korrespondenz:

$$\sin(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2j} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$$

14. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation der Vorzeichenfunktion an.

Die Vorzeichenfunktion ist definiert als $\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$. Sie lässt sich darstellen als

$$\text{sgn}(t) = -1 + 2 \cdot \sigma(t) \quad \text{Über die Korrespondenz (siehe nächste Frage) } \sigma(t) \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2} \delta(\omega)$$

und $e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$ ($\omega_0 = 0$) folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(t) &\Leftrightarrow -\delta(\omega) + 2 \cdot \left(\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2} \delta(\omega) \right) \\ \operatorname{sgn}(t) &\Leftrightarrow \frac{1}{j\frac{\omega}{2}} \end{aligned}$$

15. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation der Sprungfunktion an.

Die Sprungfunktion ist definiert als $\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$. Sie ist darstellbar als $\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt'$.

Mit der bekannten Korrespondenz $\delta(t) \Leftrightarrow 1$ und dem Theorem für die Integration

$$\int_{-\infty}^t f(t') dt' \Leftrightarrow \frac{1}{(j\omega)} F(\omega) + \frac{1}{2} F(0) \delta(\omega)$$

folgt

$$\sigma(t) \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2} \delta(\omega)$$

16. Geben Sie die Korrespondenz der Fouriertransformation der Abtastfunktion an.

Die Abtastfunktion $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$ ergibt mit der Korrespondenz $\delta(t - \tau) \Leftrightarrow e^{-j\omega\tau}$

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT_s}$ die Summe im Frequenzbereich entspricht der Synthese der

Fourierreihe für einen periodischen Impulszug mit der Periode $\frac{2\pi}{T_s}$ ($C_n = \frac{T_s}{2\pi}$), es folgt also

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T_s})$$

17. Welche Theoreme der Fouriertransformation kennen Sie?

- Linearität $\alpha f(t) + \beta g(t) \Leftrightarrow \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$
- Zeitverschiebung $f(t - \tau) \Leftrightarrow e^{-j\omega\tau} \cdot F(\omega)$
- Änderung der Zeitskala $f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a})$
- Zeitumkehrung $f(-t) \Leftrightarrow F(-\omega)$
- Konjugation $f^*(t) \Leftrightarrow F^*(-\omega)$
- Dualität $F(t) \Leftrightarrow f(-\omega)$
- Frequenzverschiebung $e^{j\omega_c t} f(t) \Leftrightarrow F(\omega - \omega_c)$

- Zeitdifferenzierung $\frac{d^n}{dt^n} f(t) = (j\omega)^n F(\omega)$
- Zeitintegration $\int_{-\infty}^t f(t) dt \Leftrightarrow (j\omega)^{-1} F(\omega) + 1/2 F(0) \delta(\omega)$
- Faltung $f(t) * g(t) \Leftrightarrow F(\omega) \cdot G(\omega)$
- Multiplikation $f(t) g(t) \Leftrightarrow F(\omega) * G(\omega)$
- Frequenzdifferentiation $(-jt)^n v(t) \Leftrightarrow \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$

18. Erklären Sie das Theorem der Zeitverschiebung in der Fouriertransformation.

Beim Blick auf die Synthesegleichung der Fouriertransformation zeigt sich:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\rightarrow f(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t} dt \rightarrow f(t-\tau) \Leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega\tau}$$

19. Erklären Sie das Theorem der Faltung in der Fouriertransformation.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-j\omega y} dy e^{j\omega t} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{j\omega(t-y)} dy d\omega$$

Variablensubstitution ergibt

$$u = t - y$$

$$y = t - u$$

$$\frac{dy}{du} = -1 \Rightarrow dy = -du$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u) e^{j\omega u} du d\omega$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} g(t-u) e^{j\omega u} dx du d\omega$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-u) e^{j\omega(u-x)} dx du d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(u-x)} d\omega = \delta(u-x) \text{ Siehe entsprechende Fouriertransformation}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx$$

Eh ganz eifoch, oda?

20. Erklären Sie, wie man von der Fouriertransformation zur Fourierreihe kommt.

Die Fouriertransformation einer periodischen Funktion soll der Ausgangspunkt dieser Diskussion werden.

Zunächst nimmt man ein Signal $f(t)$, das vor $t=0$ und nach $t=T$ (Periodendauer) in so fern keine oder vernachlässigbare Werte hat, sodass die folgende Summe konvergiert.

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-kT)$$

Dies ist dann die periodische Funktion. In die selbe Kerbe schlägt eine andere Darstellungsform. Wir konstruieren unsere periodische Funktion nun aus einer zeitlichen Faltung mit der Abtastfunktion:

$$f_p(t) = f(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

Ausführen der Faltung bringt uns wieder auf die obige Form. Wird diese Gleichung fouriertransformiert, wird sie zu

$$F_p(\omega) = F(\omega) \cdot \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Es entsteht also ein abgetastetes Spektrum, ein Zug von Dirac-Nadeln mit der Gewichtung $F(\omega_n)\omega_0$. Diese Gewichtung entspricht den Fourier-Koeffizienten.

21. Wie stellt man Kurvenformen als Vektoren dar?

Hier wird zunächst vom einfachsten Fall der periodischen, Bandbegrenzten Funktion ausgegangen, und dann verallgemeinert. Als Vektoren werden hier mathematische Objekte verstanden, die durch einen Satz von Koeffizienten (den Koordinaten) und festgelegten Vektoren (den Basisvektoren) vollständig beschrieben werden.

Im Ausgangsfall betrachten wir also Funktionen, die als Fourierreihe dargestellt werden können (Periode T), und die keine Frequenzanteile über einer bestimmten Frequenz f_{max} haben.

Diese können durch N Koeffizienten vollständig beschrieben werden. Da die Teilschwingungen bei periodischen Funktionen immer spektral um $f_0 = 1/T$ auseinander liegen kann die Anzahl der Koeffizienten (= die Dimension) als $N = 2f_{max}/f_0 = 2f_{max}T$ berechnet werden (2, weil pro Frequenz zwei reelle Koeffizienten notwendig sind).

Diese Darstellung kann jetzt auch als Vektordarstellung aufgefasst werden. Die Fourieranalytisierte Funktion ist dann ein Vektor, die Fourierkoeffizienten sind die Koordinaten und die Kosinus, Sinus oder komplexen Exponentialfunktionen sind die Basisvektoren.

Wir werden jetzt nach einander beweisen, dass die Kriterien für einen linearen Raum erfüllt sind. Unser Raum ist die Menge, der durch N Fourierkoeffizienten (gilt nicht für die reine Kosinusdarstellung der Fourierreihe, weil der Winkel keinen Basisvektor hat) darstellbaren Funktionen.

- **Addition und Subtraktion:** Dass man zwei dieser Vektoren addieren kann oder von einander abziehen kann und dass die resultierende Funktion wieder eine Fourierreihe ist, ist wohl einleuchtend und durch einsetzen sofort verifizierbar. Das Nullelement ist 0.
- **Multiplikation mit einer reellen Zahl:** kann auch durch Einsetzen bewiesen werden
- **Skalarprodukt:** Als dieses fungiert in unserem Raum die periodische Korrelationsfunktion

$$[f(t), g(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T f^*(t) \cdot g(t) dt$$

So eingeführt ist sichergestellt, dass die Basisvektoren orthogonal sind, da für die „Multiplikation unterschiedlicher Basisvektoren (z.B. $[\sin(t), \cos(t)]$) das Integral 0 ergibt. Dieses Skalarprodukt erfüllt auch die Schwartz'sche Ungleichung.

Das Gelten von Kommutativ und Distributivgesetzen kann wieder durch einsetzen bewiesen werden.

Mit dem definierten Skalarprodukt können prinzipiell alle für dieses orthonormalen Funktionen als Basisvektoren verwendet werden (wie z.B. die rechteckigen Walsh-Funktionen). Auch nicht bandbegrenzte Signale können so in Vektoren abgebildet werden, diese haben aber dann eine unendliche Dimension.

Also noch einmal kurz und bündig: Wie stellt man Kurvenformen als Vektoren dar?

1. Man definiert sich ein Skalarprodukt
2. Über dieses dann eine orthonormale Basis mit ausreichender Dimension
3. Abbildung der Kurve über das Skalarprodukt auf die Basis.

Und schon haben wir unseren Vektor.

22. Erklären Sie den Zusammenhang und die Eigenschaften der Korrelationsfunktion von reellen Signalen.

Ganz allgemein kann die Korrelation von zwei reellen transienten Signalen angeschrieben werden als

$$[f(t), g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(t) dt$$

Wegen ihrer Eigenschaften wird sie auch Skalarprodukt zweier Funktionen genannt. Eine Autokorrelation liegt vor, wenn $f(t) = g(t)$, ansonsten wird sie Kreuzkorrelation genannt.

Verschiebt man die beiden Funktionen relativ zueinander, und berechnet für verschiedene Verschiebungen die Korrelation, so resultiert die *Korrelationsfunktion*.

$$R_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(t - \tau) dt$$

Diese Funktion hat den Schönheitsfehler, dass die Funktionswerte sowohl von der „Ähnlichkeit“ der Signale f und g , als auch von deren Beträgen abhängt. Dies kann durch Normierung behoben werden. Normierung bedeutet hier Division durch die Autokorrelationen der Funktionen

$$\rho_{fg}(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(t - \tau) dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2 dt}}$$

Diese Funktion hat nun die folgenden Eigenschaften:

- Ihr Betrag wird nie größer als Eins (durch die Normierung) $|\rho_{fg}(\tau)| \leq 1$
- Sie ist genau für jenes τ gleich +1, für das die beiden Funktionen vollständig korreliert sind (d.h. bis auf einen positiven Faktor gleich) $\rho_{fg}(\tau) = 1 \rightarrow f(t) = k \cdot g(t - \tau)$ mit $k > 0$
- Sie ist genau für jenes τ gleich -1, für das die beiden Funktionen genau entgegengesetzt sind (d.h. bis auf einen negativen Faktor gleich) $\rho_{fg}(\tau) = -1 \rightarrow f(t) = -k \cdot g(t - \tau)$ mit $k > 0$

- Wenn die (normierte) Korrelationsfunktion für ein $\tau = 0$ liefert, sind die beiden Signale für diese Verschiebung völlig unkorreliert, d.h. haben keine Ähnlichkeit.

Bei periodischen Funktionen wird die periodische Korrelation verwendet:

$$[f(t), g(t)]_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot g(t) dt$$

Die daraus abgeleiteten Funktionen werden analog zu oben gebildet.

3. Zufallssignale und Rauschen

1. Was wissen Sie über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, bedingte Wahrscheinlichkeit, gemeinsame Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse, statistische Unabhängigkeit und das Gesetz von Bayes?

Die **Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses A ist definiert als die relative Häufigkeit des Auftretens von Ereignis A (also Anzahl des Eintretens von A durch Anzahl der Stichproben N) wenn N unendlich groß wird.

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{L}{N}$$

Wobei L die Anzahl des Auftretens von A ist.

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** zweier Ereignisse A und B wird angeschrieben als

$$P(A|B) \text{ bzw. } P(B|A)$$

Sie gibt an, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass A eintritt, wenn B bereits eingetreten ist bzw. umgekehrt.

Die **gemeinsame Wahrscheinlichkeit** zweier Ereignisse A und B wird angeschrieben als

$$P(A, B)$$

Sind A und B **statistisch unabhängig**, d.h. ändert das Eintreten von B nichts an der Wahrscheinlichkeit für den Eintritt von A bzw. umgekehrt, dann ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeit definiert als

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

(Beispiel Entnahme einer Kugel aus einer Schachtel mit 5 roten und 5 blauen Kugeln mit Zurücklegen)

Sind A und B **statistisch abhängig** kommt auch noch die bedingte Wahrscheinlichkeit ins Spiel und unsere gemeinsame Wahrscheinlichkeit wird zu

$$P(A, B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

(Beispiel Schachtel mit Kugeln ohne zurücklegen)

Da die Wahrscheinlichkeit für beide Varianten (zuerst tritt B ein und dann A, bzw. umgekehrt) gleich ist, lässt sich der Rechte Teil der Gleichung umschreiben auf:

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A)$$

Dies ist die Bayes'sche Regel.

2. Was wissen Sie über die Fehlerwahrscheinlichkeit in einem Datenblock, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Bitfehler gegeben ist?

Gegeben ist also ein Codewort der Länge n , das über einen Kanal mit der Bitfehlerwahrscheinlichkeit P_e übertragen wird.

Es wird angenommen, dass jedes Bit eine statistisch von den anderen unabhängige Stichprobe ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bit nun fehlerhaft erkannt wird ist also P_e . Da es keine anderen Ereignisse geben kann (nur passt oder passt nicht) und die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 sein muss ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bit heil durch den Kanal durchkommt $1 - P_e$.

Wenn wir nun wissen wollen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass j Bit unseres Datenstromes kaputt sind, müssen wir wie folgt vorgehen:

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass irgendwelche j Bit falsch erkannt werden ist P_e^j
2. Die Wahrscheinlichkeit, dass die anderen Bits ok sind ist $(1 - P_e)^{n-j}$
3. Die Anzahl der möglichen Kombinationen von j kaputten Bits in einem n -Bit-Codewort ist $\binom{n}{j}$

Zusammen gibt das die Wahrscheinlichkeit

$$P(j \text{ Bitfehler in einem } n \text{ Codewort}) = P_e^j (1 - P_e)^{n-j} \cdot \binom{n}{j}$$

3. Welche Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsdichte kennen Sie?

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** ist eine Funktion, die einem möglichen Ergebnis einer Zufallsvariablen einen Wahrscheinlichkeitswert zuordnet. Sie wird so definiert, dass

$$P_X(x) = P(X \leq x)$$

die Wahrscheinlichkeitsverteilung liefert für den Wert x die Wahrscheinlichkeit, dass die diskrete Zufallsvariable X kleiner oder gleich dem Wert x ist.

Sie hat folgende Eigenschaften:

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung liefert nur sinnvolle Wahrscheinlichkeitswerte also $0 \leq P_X(x) \leq 1$
- Die Verteilung liefert an dem Punkt garantiert Null, den die Zufallsvariable nicht unterbieten kann $P_X(-\infty) = 0$
- Die Verteilung liefert an dem Punkt garantiert Eins, den die Zufallsvariable nicht überbieten kann $P_X(\infty) = 1$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der Zufallsvariablen zwischen zwei Werten x_1 und x_2 liegt errechnet sich zu $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_2) - P(x_1)$. Das ist Einleuchtend, weil wir die Wahrscheinlichkeit haben, dass $X \leq x_2$ ist und davon die Fälle abziehen, in denen $X \leq x_1$ ist.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist monoton nichtfallend. Wem das aus der Definition

nicht klar wird, der sollte endlich Mathe1 machen. $\frac{d}{dx} P_X(x) \geq 0$

Die **Wahrscheinlichkeitsdichte** gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Wert der Zufallsvariablen in dem infinitesimal kleinen Bereich zwischen x und $x+dx$ liegt. Man kann nicht sagen, dass sie die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der X im Punkt x zu liegen kommt, weil ein Punkt per definition unendlich dünn ist, und es daher unmöglich ist, ihn zu treffen. (Zumindest ist das meine Interpretation). Die Wahrscheinlichkeitsdichte kann aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet werden über

$$p_X(x) = \frac{d}{dx} P_X(x)$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung aus der Wahrscheinlichkeitsdichte bekommt man über

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(x') dx'$$

Die Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichte sind naheliegend:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen x_1 und x_2 liegt errechnet sich nun über

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x) dx$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass X irgendwo ist, ist $1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1$
- Es gibt keine negativen Wahrscheinlichkeiten (siehe auch Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilung) $p_X \geq 0$.

Beide Funktionen können auf diskrete, kontinuierliche oder gemischte Zufallsvariablen angewandt werden. Für kontinuierliche Zufallsvariablen sind die beiden Funktionen ebenfalls kontinuierlich, bei diskreten Anteilen bekommt die Wahrscheinlichkeitsverteilung Unstetigkeiten in Form von Stufen, die Wahrscheinlichkeitsdichte in Form von (Dirac-)Nadeln.

4. Geben Sie die wichtigsten Momente einer Wahrscheinlichkeitsdichte an

Die Momente werden in der Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Charakterisierung von Zufallsvariablen verwendet. Manche haben aber auch, sofern sie auf normale Signale angewandt werden eine Physikalische Bedeutung.

Gewöhnliche Momente:

Ein gewöhnliches Moment n -ter Ordnung der Zufallsvariablen X kann über die Formel

$$\overline{X^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx$$

berechnet werden, wobei x das Ergebnis von X und $p(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte am Punkt x ist.

$n=0$:

$$\overline{X^0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^0 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 p(x) dx = 1$$

Das Nullte Moment liefert also immer eins, hat also keine Aussagekraft.

n=1:

$$\overline{X^1} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \overline{X}$$

Beim ersten Moment handelt es sich um den Mittelwert oder auch Erwartungswert der Zufallsvariablen. Auf ein Spannungs- oder Stromsignal angewandt liefert dieses Moment den Gleichstrom/-spannungswert.

n=2:

$$\overline{X^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

Das zweite Moment wird manchmal als *Mean Square* bezeichnet. Hier werden auch negative Werte positiv gezählt. Physikalische Bedeutung hat die Wurzel aus diesem Moment als *Root Mean Square*, dies entspricht dem Effektivwert.

Gewöhnliche Momente höherer Ordnung haben für uns keine Bedeutung.

Zentrale Momente:

Ein zentrales Moment n-ter Ordnung wird berechnet über

$$\overline{(X - \overline{X})^n} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{X})^n p(x) dx$$

n=0:

$$\overline{(X - \overline{X})^0} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{X})^0 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 p(x) dx = 1$$

Mit der selben Argumentation wie oben hat das nullte zentrale Moment absolut keine Bedeutung.

n=1:

$$\overline{(X - \overline{X})^1} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{X})^1 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{X} p(x) dx = \overline{X} - \overline{X} \cdot 1 = 0$$

Wie hier gezeigt wird liefert das zentrale Moment erster Ordnung immer Null, hat also ebenfalls keine Aussagekraft.

n=2:

$$\overline{(X - \overline{X})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{X})^2 p(x) dx = \sigma^2 = s^2$$

Das zweite zentrale Moment wird üblicherweise Varianz genannt. Die Wurzel aus diesem ist die Standardabweichung (s, bzw. σ für Gauß-Verteilte Zufallsvariablen).

Physikalische Bedeutung ist (wieder mit Wurzel) der Effektivwert des Wechselanteils.

n=3, n=4:

Das dritte bzw. vierte Moment (dividiert durch s^3 bzw. s^4) werden als „skew“ (Schiefe) bzw. „kurtosis“ (Wölbung) bezeichnet.

5. Was wissen Sie über die gemeinsame Verteilung und die Randverteilung?

Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen, dann gibt es eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$p_{XY}(x, y)$ die die Wahrscheinlichkeit angibt, dass sich die Zufallsvariable X im Bereich $x+dx$ und Y im Bereich $y+dy$ aufhält. Dies ist die *gemeinsame Verteilung*. Während die Wahrscheinlichkeitsdichte für eine Variable als Linie dargestellt werden kann, wird die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte als Fläche gezeichnet. Sie hat die selben Eigenschaften wie eine „normale“ Wahrscheinlichkeitsdichte:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die kombinierte Zufallsvariable (X,Y) innerhalb der Fläche F befindet ist $\int \int_F p_{XY}(x, y) dx dy$
- Sie ist immer positiv
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y) dx dy = 1$

Will man aus der gemeinsamen Verteilung eine Verteilung nur für X (bzw. Y) ableiten, also die Wahrscheinlichkeitsdichte für X, egal welchen Wert Y hat, dann bietet sich der folgende Weg an.

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y) dy$$

Dies ist die Randverteilung.

6. Was wissen Sie über die gemeinsamen Momente, Korrelation und Kovarianz?

Die **gemeinsamen Momente** können über die gemeinsame Verteilung ähnlich wie die normalen Momente berechnet werden:

$$\overline{X^n Y^m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^m p_{XY}(x, y) dx dy$$

Ein besonderer Fall liegt für n=1 und m=1 vor, dies ist die **Korrelation**. Bei hoher positiver Korrelation befinden sich die Werte von X und Y im Mittel in einem engeren Bereich umeinander, bei hoher negativer Korrelation sind X und Y im Mittel im entgegengesetzten Bereich, bei einer kleinen Korrelation gibt die Größe von X keine Aussage über die Größe von Y.

Wie auch im einfachen Fall lassen sich auch für gemeinsame Verteilungen **zentrale gemeinsame Momente** definieren. Diese haben die Form:

$$\overline{(X - \bar{X})^n (Y - \bar{Y})^m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^n (y - \bar{Y})^m p_{XY}(x, y) dx dy$$

Auch hier ist der Fall für n=1 und m=1 ein besonderer, genannt „**Kovarianz**“. Die Kovarianz ist die Korrelation der Abweichungen von den Mittelwerten der Zufallsvariablen. Für Zufallsvariablen mit dem Mittelwert 0 geht die Kovarianz in die Korrelation über.

Zwei Zufallssignale heißen **unkorreliert**, wenn $\overline{XY} = \bar{X}\bar{Y}$. In diesem Fall ist dann die Kovarianz =0.

Zwei statistisch unabhängige Variablen sind immer unkorreliert. Sind zwei Variablen jedoch unkorreliert, dann heißt das nicht, dass sie von einander unabhängig sind. Sie können immer noch über eine nichtlineare Beziehung zusammenhängen, die von der Korrelation nicht erfasst wird.

7. Leiten Sie den zentralen Grenzwertsatz her.

Hierfür ist es zunächst wichtig zu zeigen, dass die Addition zweier statistisch unabhängiger Zufallsvariablen zu einer Faltung der Wahrscheinlichkeitsdichten führt.

Als erstes schreibt man die Ausgangssituation an:

$$Z = X + Y$$

X und Y sind zunächst einfach Zufallsvariablen, die über die gemeinsame Verteilung $p_{XY}(x, y)$ definiert sind.

Nimmt also Z einen konkreten Wert z an, dann lässt sich zwischen X und Y der Zusammenhang

$$Y = z - X$$

herstellen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Z im Bereich zwischen z und z+dz zu liegen kommt ergibt sich dann zu

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, z-x) dx$$

Es wird also über alle Kombinationen summiert, für die x+y=z ist.

Sind nun X und Y statistisch unabhängig kann die Verteilungsfunktion angeschrieben werden als

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

Und unsere Verteilung für Z wird zu

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z-x) dx = (p_X * p_Y)(z)$$

Bei Addition von Zufallsvariablen werden also die Wahrscheinlichkeitsdichten gefaltet. Nun führt eine Faltung zweier Signale immer auf eine glattere Funktion als es die Ausgangssignale waren. Es zeigt sich, (z.B. bei der Selbstfaltung eines Rechtecksignals), dass schon nach wenigen Faltungsschritten eine gute Approximation für die Normalverteilung entsteht, die mit jeder Faltung besser wird. Dies ist der zentrale Grenzwertsatz der Statistik. In Worten:

Wenn N statistisch unabhängige Variablen addiert werden, dann hat die Summe eine Wahrscheinlichkeitsdichte, die mit $N \rightarrow \infty$ gegen eine Normalverteilung tendiert, unabhängig von der Form der Wahrscheinlichkeitsdichten der Ausgangsvariablen.

8. Wie beschreibt man einen Zufallsprozess in allgemeinsten Form?

Ein Zufallsprozess in seiner allgemeinsten Form wird durch eine zeitabhängige Zufallsvariable beschrieben. Dies ist der übliche Fall, die Zeitabhängigkeit kann auch durch eine Ortsabhängigkeit ersetzt werden, die Aussagen behalten ihre Gültigkeit.

Die Zufallsvariable beschreibt die statistischen Eigenschaften eines Ensembles von N Signalen, die den Prozess bilden. Diese Signale können, aber müssen selbst keine Zufallssignale sein. Es kann sich auch z.B. um Sinus-Signale mit statistisch verteilter Phase handeln.

Es sind also $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ die Signale, die das Ensemble bilden, und $X(t)$ die Zufallsvariable, die die statistischen Eigenschaften dieses Ensembles (Mittelwert, Standardabweichung, Wahrscheinlichkeitsverteilung) zum Zeitpunkt t beschreibt. Eine konkrete Realisierung $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt wird auch Stichprobe oder Sample genannt.

9. Erklären Sie was stationäre und ergodische Zufallsprozesse sind.

Ein **stationärer Zufallsprozess** ist so definiert, dass sich die statistischen Eigenschaften des Prozesses (d.h. der Zufallsvariablen, die ihn beschreibt) mit der Zeit nicht ändern. Es gibt zwei Definitionen von stationären Zufallsprozessen:

1. Ein stationärer Zufallsprozess in strenger Definition liegt vor, wenn sich keine der ihn beschreibenden Wahrscheinlichkeitsdichten (normale, gemeinsame, Randverteilung, ...) mit der Zeit ändern. Wenn also keine der Statistiken zeitabhängig ist.

2. Eine lockerere Definition für einen stationären Zufallsprozess ist, dass sich der Mittelwert $\overline{X(t)}$ über der Zeit nicht ändert, und dass die Autokorrelation $\overline{X(t_1)X(t_2)}$ nur von der Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ abhängt.

Die **Ergodizität** verlangt von einem Zufallsprozess, dass der Mittelwert seines Ensembles $\overline{X(t_j)}$ zu jedem Zeitpunkt gleich ist dem zeitlichen Mittelwert jeder der Ensemble-Signale $\overline{x_i(t)}$.

Es ist also $\langle x_i^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_{X(t_j)}(x) dx = \overline{X^n(t_j)}$ für alle i und j.

Es ist aus dieser Definition (im linken Integral wird über alle t integriert) schon ersichtlich, dass ein ergodischer Prozess auch stationär ist. Der Umkehrschluss gilt allerdings nicht.

10. Was wissen Sie über den Gauß-Prozess?

Ein Gauß-Prozess im engeren Sinne liegt vor, wenn die Zufallsvariablen

$X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2), \dots, X_N = X(t_N)$ über eine N-dimensionale gemeinsame Gauß-Verteilung miteinander verknüpft sind. (N endlich, aber beliebig)

Ein Gauß-Prozess im weiteren Sinne liegt vor, wenn einzelne, beliebig gezogene, Samples des Prozesses einer Gauß-Verteilung entspringen.

Die (enge und weitere) Definition eines Gauß-Prozesses hat folgende Eigenschaften:

1. Ein Gauß-Prozess im engeren Sinn ist immer auch einer im weiteren Sinn
2. Ein Gauß-Prozess im engeren Sinne kommt praktisch nicht vor, er ist der unvorhersagbarste, strukturloseste Prozess, der vorstellbar ist. Er ist in der Übertragungstechnik deshalb so wichtig, weil er das thermische Rauschen beschreibt, das zu einem gewissen Grad in allen Komponenten vorhanden ist.
3. Eine Gauß-Wahrscheinlichkeitsdichte ist vollständig durch ihre ersten und zweiten Momente definiert. Alle höheren Momente sind 0.

Anmerkung: Diese Stelle im Buch ist wirklich schlecht erklärt, ich weiß nicht, ob das hier richtig wiedergegeben ist.

11. Was wissen Sie über die Autokorrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum von Zufallsprozessen

Die **Autokorrelationsfunktion** gibt Aufschluss über die Veränderungen des Zufallsprozesses X(t) über der Zeit. Sie ist definiert als

$$\overline{X(t) \cdot X(t - \tau)}$$

Für *ergodische* Prozesse, für die das Ensemble-Mittel gleich dem Zeitmittel ist, kann dies umgeschrieben werden zu

$$\overline{X(t) \cdot X(t - \tau)} = \langle x(t) \cdot x(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x(t - \tau) dt = R_x(\tau)$$

Diese Funktion (gilt nur für ergodische Prozesse) hat nun folgende Eigenschaften:

1. Die Funktion ist gerade $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ (lässt sich durch Substitution $t \rightarrow t + \tau$ elegant und einfach zeigen)

- Die Autokorrelationsfunktion hat ihr Maximum im Ursprung, dort entspricht sie dem quadratischen Effektivwert (mean square) von $x(t)$ $R_x(0) = \langle x^2(t) \rangle$
- Für $\tau \rightarrow \infty$ geht $R_x(\tau) \rightarrow \langle x(t) \rangle^2$ also gegen das Quadrat des Gleichanteiles (=Mittelwert) von $x(t)$
- $R_x(0) - R_x(\infty) = s^2$
- Nach dem Wiener-Kintchine Theorem lässt sich aus der Autokorrelationsfunktion durch Fouriertransformation das Leistungsdichtespektrum von $x(t)$ gewinnen.
 $R_x(\tau) \Leftrightarrow_{FT} G_x(\omega)$

Das Leistungsdichtespektrum eines Zufallsprozesses hat folgende Eigenschaften:

- $G_x(\omega)$ ist eine gerade Funktion (weil die Funktion im Zeitbereich reell ist)
- $G_x(\omega)$ nimmt nur positive reelle Werte an
- $\int_{-\infty}^{+\infty} G_x(\omega) d\omega = \langle x^2(t) \rangle$ Das Integral über die Leistungsdichte ist die Leistung
- Hat $G_x(\omega)$ eine Dirac-Nadel im Ursprung, dann ist das Gewicht dieses Impulses die Leistung des Gleichanteiles des Signals $\int_{0-}^{0+} G_x(\omega) d\omega = \langle x^2(t) \rangle$.

12. Erklären Sie das Wiener-Kintchine Theorem

Das Wiener-Kintchine Theorem besagt, dass für ergodische, reelle Zufallsprozesse die Autokorrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum ein Fouriertransformationspaar bilden.

Anmerkung:

Das wäre ja eigentlich als Erklärung genug. Wo es möglich ist gehe ich die Herleitungen durch, hier komme ich aber auf keinen grünen Zweig. Es würde sich die Faltungseigenschaft der Fouriertransformation anbieten, wenn nicht dieser 1/T-Faktor vor dem Faltungsintegral stünde.

13. Was wissen Sie über weißes Rauschen?

Weißes Rauschen ist ein Zufallssignal, dessen Autokorrelationsfunktion $R_x(\tau) = C \delta(\tau)$

ist. Das bedeutet, dass zwei Samples eines weißen Zufallsprozesses, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten entnommen wurden absolut unkorreliert sind, egal wie weit sie zeitlich beieinander liegen. Man kann auch sagen, die Dekorrelationszeit (der Zeitunterschied, der mindestens nötig ist, um ein Absinken der Korrelation zweier Samples auf einen bestimmten Wert zu bewirken) ist 0.

Über das Wiener-Kintchine Theorem kann das Leistungsdichtespektrum des weißen Rauschens durch Fouriertransformation bestimmt werden. $G_x(\omega) = C$

Der Ausdruck „weißes Rauschen“ kommt von diesem Ergebnis, dass nämlich alle Frequenzen zu gleichen Teilen in dem Signal enthalten sind.

Die Definition des weißen Rauschens ist nur eine Aussage über die Korrelation zwischen Samples. Es sagt allerdings nichts über die Wahrscheinlichkeitsdichte des Prozesses zu einem Zeitpunkt aus. Es kann also z.B. einen weißen Gauß-Prozess geben, o.ä. Ein weißer Prozess ist allerdings *nicht automatisch* auch ein Gauß-Prozess.

14. Was wissen Sie über die Kreuzkorrelation von Zufallsprozessen?

In ähnlicher Weise wie die Autokorrelation lässt sich die Kreuzkorrelation anschreiben:

$$\overline{X(t)Y(t-\tau)}$$

Es wird also die Korrelation von X und Y überprüft, wobei die beiden Zufallsvariablen mit unterschiedlichen zeitlichen Verschiebungen zueinander verglichen werden. Für *ergodische* Prozesse lässt sich diese Darstellung wieder umschreiben auf:

$$\overline{X(t)Y(t-\tau)} = \langle x(t) \cdot y(t-\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot y(t-\tau) dt = R_{xy}(\tau)$$

Es lassen sich für diese Funktion wieder ein paar Eigenschaften zusammenfassen:

- $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$ (ACHTUNG: Index beim zweiten R vertauscht, nicht übersehen!)
- $\sqrt{R_x(0) \cdot R_y(0)} > |R_{xy}(\tau)| \quad \forall \tau$ das geometrische Mittel der einzelnen Autokorrelationen im Ursprung (wo – wie schon oben erwähnt - immer das Maximum der Autokorrelation liegt) ist größer als das größte Extremum der Kreuzkorrelationsfunktion. Das schließt auch das arithmetische Mittel ein, da das geometrische Mittel zweier reeller Zahlen nie größer als das arithmetische Mittel sein kann.
- Nur für *statistisch unabhängige* Prozesse gilt $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0$. Hat *einer* der beiden Prozesse zusätzlich noch den Mittelwert 0, dann ist $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0$.
- Auch hier lässt sich ein „Kreuzleistungsdichtespektrum“ durch Fouriertransformation angeben $R_{xy}(\tau) \Leftrightarrow_{FT} G_{xy}(\omega)$

4. Lineare Systeme

1. Wie beschreibt man ein lineares System im Zeitbereich, wenn es mit einem determinierten Signal angeregt wird?

Die meisten technisch relevanten Systeme können durch eine lineare Differentialgleichung beschrieben werden. Diese hat die Form:

$$\frac{d^N}{dt^N} y(t) + a_{N-1} \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t) + \dots + a_2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M}{dt^M} x(t) + b_{M-1} \frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}} x(t) + \dots + b_2 \frac{d^2}{dt^2} x(t) + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t)$$

(Anmerkung: Ich benutze diese Darstellung, weil ich glaube, dass das im Buch falsch ist)

Sind die Koeffizienten zeitunabhängig, dann handelt es sich um ein LTI-System. Für die Darstellung von Zeitverzögerungen muss zu t noch eine Verzögerungszeit dazuaddiert werden. Dies wird hier aber zur Vereinfachung weggelassen.

Ein *lineares und zeitinvariantes* System wird durch seine Impulsantwort vollständig beschrieben. Diese ist das Ausgangssignal des Systems für einen Dirac-Impuls als Eingangssignal.

$$x(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = h(t)$$

2. Wie berechnet man das Ausgangssignal eines linearen Systems, wenn es mit einem determinierten Signal angeregt wird?

Zunächst wird von einem System ausgegangen, das durch eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{d^N}{dt^N} y(t) + a_{N-1} \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t) + \dots + a_2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M}{dt^M} x(t) + b_{M-1} \frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}} x(t) + \dots + b_2 \frac{d^2}{dt^2} x(t) + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t)$$

beschrieben wird. Das Ausgangssignal y ist dann die Lösung dieser Differentialgleichung.

Es wird – ähnlich wie bei der üblichen Lösung von Differentialgleichungen – zunächst die homogene Differentialgleichung betrachtet:

$$\frac{d^N}{dt^N} y(t) + a_{N-1} \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t) + \dots + a_2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = 0$$

Diese muss den sogenannten Anfangsbedingungen genügen:

$$\frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(0), \dots, a_2 \frac{d^2}{dt^2} y(0), \frac{d}{dt} y(0), y(0) \text{ haben dabei definierte Werte.}$$

Die Anfangsbedingung beschreibt den Zustand, in dem sich das System zum Zeitpunkt $t=0$ befindet. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung für diese Anfangsbedingungen ist also das Ausgangssignal des Systems, wenn ab $t=0$ das Eingangssignal auf Null gesetzt wird. Sie heißt deshalb auch *Nulleingangsantwort*, oder *freie Antwort* y_{free} .

Außerdem muss nun noch eine Lösung gefunden werden, die der Differentialgleichung inklusive Eingangssignal genügt, und für die die Anfangsbedingungen gleich 0 sind.

Diese Lösung hingegen beschreibt das Ausgangssignal, wenn das System bei $t=0$ in einem vollkommen „leeren“ Zustand ist (z.B. alle Speicher entleert) und ab $t=0$ das Eingangssignal angelegt wird. Sie kann deshalb auch Nullzustandsantwort oder im Englischen *forced response* y_{forced} genannt werden.

Die *vollständige Lösung* ergibt sich dann durch Addition der beiden $y = y_{free} + y_{forced}$

Die Aufteilung in Nullzustands- und -eingangsantwort, obwohl sehr ähnlich der Zerlegung in homogene und partikuläre Lösung, ist viel strikter als diese, weil für die festgelegten Werte des Signals und dessen Ableitungen der Zeitpunkt mit $t=0$ bestimmt ist. Weiters kann die partikuläre Lösung am Anfang beliebige Werte annehmen.

Eine weitere Möglichkeit der Aufteilung, die vor allem in Zusammenhang mit der Fourieranalyse interessant ist, ist die Aufteilung in das transiente Signal, das mit der Zeit an Amplitude verliert, und das stationäre Signal, das dann übrigbleibt. $y = y_{trans} + y_{stat}$ mit $y_{trans} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Ist das System vom Typ LTI und ist die Impulsantwort bekannt, dann lässt sich das Ausgangssignal für ein gegebenes Eingangssignal durch die Faltung berechnen:

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) \cdot x(\tau) d\tau$$

3. Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Sprungantwort und Impulsantwort eines linearen Systems.

Die Sprungantwort ist das Ausgangssignal des Systems zu dem Eingangssignal

$$x(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} .$$

Die Beziehung zur Impulsantwort lässt sich über die Faltungsdarstellung herstellen.

$$y(t) = q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau$$

Dadurch, dass u für negative Zeit 0 ist, kann die untere Schranke des Integrals auf 0 gesetzt werden.

$$q(t) = \int_0^{+\infty} h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 h(t+\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

Oder in umgekehrter Richtung:

$$h(t) = \frac{d}{dt} q(t)$$

4. Wie beschreibt man ein lineares System im Frequenzbereich?

Wie schon erwähnt, kann das Ausgangssignal eines LTI-Systems über eine Faltung mit der Impulsantwort berechnet werden. Wird diese Gleichung Fourier transformiert wird die Faltung zu einer Multiplikation der Fouriertransformierten des Eingangssignales und der Impulsantwort.

$$y(t) = (x * h)(t) \Leftrightarrow_{FT} Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

Im Frequenzbereich sind alle Funktionen komplexwertig. Ist

$$x(t) = x_0 \cdot e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow_{FT} X(\omega) = x_0 \cdot \delta(\omega - \omega_0) \quad , \text{ dann folgt}$$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) = x_0 \cdot \delta(\omega - \omega_0) \cdot H(\omega_0)$$

$$\text{mit } H(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)}$$

$$Y(\omega) = x_0 \cdot A(\omega_0) \cdot e^{j\Phi(\omega_0)} \Leftrightarrow_{IFT} y(t) = x_0 \cdot A(\omega_0) \cdot e^{j(\omega_0 \cdot t + \Phi(\omega_0))}$$

Für komplexe Phasoren als Eingangssignal gibt ein LTI-System wieder einen komplexen Phasor als Ausgangssignal. Die Fouriertransformierte der Impulsantwort gibt an, mit welchem Wert der Betrag multipliziert, und um wie viel die Phase verschoben wird. Wegen dieser zentralen Bedeutung wird sie auch „Übertragungsfunktion“ genannt. Es ist durch Real- oder Imaginärteil Bildung ohne Probleme möglich, diese Aussage auf Sinusschwingungen zu verallgemeinern.

Die Darstellung der Übertragungsfunktion ist mit einem Graphen alleine kaum möglich, da es sich um eine komplexe Größe handelt. Es werden also entweder Real- und Imaginärteil getrennt über der Frequenz (-> Bodediagramm) oder der Verlauf in der komplexen Ebene mit der Frequenz als Parameter (-> Ortskurve) dargestellt.

5. Wie beschreibt man das Ausgangsverhalten eines linearen Systems, wenn dieses mit einem Zufallssignal angeregt wird?

Der einfachste Weg der Beschreibung ist über das Leistungsdichtespektrum. Ein LTI-System wird im Frequenzbereich beschrieben durch

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

Durch Multiplikation mit der Konjugation links und rechts lässt sich zeigen, dass

$$Y(\omega)Y^*(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \cdot X^*(\omega) \cdot H^*(\omega) = X(\omega) \cdot X^*(\omega) \cdot H(\omega) \cdot H^*(\omega)$$

$$\rightarrow |Y(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2 \cdot |H(\omega)|^2$$

Da es sich hier um Leistungsdichten handelt, kann dieses Ergebnis umgeschrieben werden auf

$$G_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot G_x(\omega)$$

Das Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignals ist also das Leistungsdichtespektrum des Eingangssignals multipliziert mit dem quadratischen Betrag der Übertragungsfunktion.

Eine Aussage im Zeitbereich lässt sich über die inverse Fouriertransformation in Verbindung mit dem Wiener-Kinchine Theorem herleiten:

$$R_{yy}(\tau) = R_{hh}(\tau) * R_{xx}(\tau)$$

Die Autokorrelationsfunktion des Ausgangssignals errechnet sich also aus der Autokorrelationsfunktion des Eingangssignals gefaltet mit der Autokorrelationsfunktion der Impulsantwort.

6. Was wissen Sie über die Rauschbandbreite eines linearen Systems?

Gegeben sei ein Filter mit allgemeiner Bandpasscharakteristik. Der maximale Betrag der Übertragungsfunktion sei bei ω_p . Wird dieser mit weißem Rauschen am Eingang angeregt, dann entspricht der Betragsfrequenzgang des Ausgangssignales dem der Übertragungsfunktion dieses Filters.

Die Frage ist nun: Welche Bandbreite B_N hätte ein Filter mit einer reinen Rechteck-Übertragungsfunktion, die in der Umgebung von ω_p eben den Maximalwert des obigen Filters annimmt, und außerhalb Null ist, und das für weißes Rauschen am Eingang die gleiche Rauschleistung am Ausgang hat.

Es müssen also die Flächen unter den Leistungsdichtekurven gleich sein:

$$|H(\omega_p)|^2 \cdot B_N = \int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

$$\rightarrow B_N = \frac{\int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}{|H(\omega_p)|^2}$$

7. Was wird aus weißem Rauschen, wenn es über ein lineares System übertragen wird?

Das Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignales eines LTI-Systems wird aus dem des Eingangssignales über die bekannte Formel berechnet:

$$G_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot G_x(\omega)$$

Weißes Rauschen hat ein konstantes Leistungsdichtespektrum, das Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignales wird also gleich dem quadratischen Betrag der Übertragungsfunktion multipliziert mit dieser Konstanten sein. Es ist nachher also kein weißes Rauschen mehr.

Praktisch die gleiche Argumentation lässt sich im Zeitbereich durchführen:

Es gilt hier ja der Zusammenhang $R_{yy}(\tau) = R_{hh}(\tau) * R_{xx}(\tau)$.

Das weiße Rauschen hat als Autokorrelationsfunktion einen Dirac-Impuls, die Autokorrelationsfunktion des Ausgangssignales wird also gleich der der Impulsantwort sein (Für die Faltung ist der Dirac-Impuls ja das Einselement). Das Ausgangssignal ist also nicht mehr völlig unkorreliert und daher nicht mehr weiß.

8. Was wissen Sie über die Rayleighdichte?

Die Rayleighdichte entsteht aus der Gauss-Verteilung durch Variablentransformation.

Es sind zwei Zufallsvariablen X und Y gegeben. Diese sollen Gauss Verteilt mit den gleichen Parametern und statistisch unabhängig sein, daher werden sie durch folgende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben:

$$p_{XY}(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

Diese sollen jetzt auf Polarkoordinaten abgebildet werden, es entstehen also die Zufallsvariablen

R und Φ mit den Zusammenhängen $r^2 = x^2 + y^2$ und $\phi = \arctan(\frac{y}{x})$ und der neuen gemeinsamen Verteilung $p_{R\Phi}(r, \phi)$.

Diese neue Verteilung muss die selben Wahrscheinlichkeiten liefern wie die ursprüngliche, es muss also

$$\begin{aligned} p_{R\Phi}(r, \phi) \cdot dr \cdot d\phi &= p_{XY}(x, y) \cdot dx \cdot dy \\ &= p_{XY}(r \cdot \cos(\phi), r \cdot \sin(\phi)) \cdot r \cdot dr \cdot d\phi \\ p_{R\Phi}(r, \phi) &= p_{XY}(r \cdot \cos(\phi), r \cdot \sin(\phi)) \cdot r \\ p_{R\Phi}(r, \phi) &= \frac{r}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{(r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2}{2\sigma^2}} = \frac{r}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

Dies ist nun die gemeinsame Verteilung für R und Φ , die von letzterem völlig unabhängig ist.

Die Verteilung für R alleine ist die Randverteilung:

$$\begin{aligned} p_R(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} d\phi \\ p_R(r) &= \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

Dies ist die Rayleigh-Dichte.

9. Was wissen Sie über die Chi-Square-Dichte?

Die Chi-Square Dichte entsteht aus der Gauss-Verteilung durch Variablentransformation.

Es ist X eine Zufallsvariable mit der Verteilung

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Diese soll nun gemäß $Y = X^2$ transformiert werden.

Es ist also $dy = 2x dx$.

Die Transformation ist im Gegensatz zur Transformation in Polarkoordinaten nicht umkehrbar eindeutig. Die negativen Werte von X werden sozusagen zu den positiven umgeklappt, die Bedingung $p_Y(y) \cdot dy = 2 p_X(x) \cdot dx$ muss für positive Werte von y erfüllt sein. Der Faktor 2 in der Bedingung kommt daher, dass durch die Quadrierung die negativen Bereiche ins Positive umgeklappt werden und deshalb jeder Punkt die doppelte Fläche einnimmt (dafür kann y nur positive Werte annehmen).

Einsetzen der Transformation gibt:

$$p_Y(y) \cdot dy = 2 p_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{p_X(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} \cdot dy$$

$$\rightarrow p_Y(y) = \frac{p_X(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{y} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}$$

Dies ist die Chi-Square-Verteilung für einen Freiheitsgrad.

5. Abtasten, Multiplex und PCM

1. Welche Arten des Abtastvorganges kennen Sie und wie unterscheiden sich diese?

Die beiden grundlegenden Arten des Abtastvorganges sind Natural und Flat-Topped Sampling. (Bilder dazu im Buch S166 und 168 Bild 5.4 und 5.5).

Bei Natural Sampling (Bild 5.4) wird das abzutastende Signal einfach mit einem periodischen Rechteckzug (Periode T_s , Pulsbreite $\tau < T_s$) multipliziert. Es entsteht eine abgehackte Version des ursprünglichen Signals. Die Umkehrung des Verfahrens kann einfach durch ein TP-Filter passieren.

Bei Flat-Topped Sampling wird das Ausgangssignal künstlich zu einem Rechteckzug gemacht. Mathematisch kann das wie folgt behandelt werden (Siehe Bild 5.5):

1. Multiplikation des abzutastenden Signals mit einem periodischen Dirac-Impuls-Zug.
2. Falten des so erzeugten Signales mit einem Rechtecksignal der Breite $\tau < T_s$ (im Zeitbereich)

Die Rekonstruktion des Ausgangssignals ist nicht mehr so trivial, da das Rekonstruktionsfilter eine Übertragungsfunktion haben muss, die genau reziprok zur Fouriertransformation des Rechteckes ist.

2. Was bezeichnet man als Aliasing und welches Gütekriterium verwendet man dafür?

Wie bekannt ist, wird durch die Abtastung eines Signales ein periodisches Spektrum erzeugt. Die Periode ist $f_s = \frac{1}{T_s}$, d.h. hat ein abgetastetes Signal $x_{sampled}(t)$ das Spektrum $X_{sampled}(\omega)$, dann ist $X_{sampled}(\omega) = X_{sampled}(\omega + 2\pi f_s)$. Da das Spektrum für reelle Signale symmetrisch um den Ursprung ist, überlagern sich Frequenzanteile, die bei bzw. über $\frac{f_s}{2}$ liegen. Dies wird **Aliasing** genannt. (Bild 5.7 auf Seite 169).

Aliasing kann vor dem Abtasten durch Tiefpass Filterung (Anti Aliasing Filter) gemildert, jedoch in der Praxis nie vermieden werden. Die Güte (in form der **Signal to Distortion Ratio**) einer Abtastung bezüglich des Aliasings kann im einfachsten Fall berechnet werden als die Signalleistung unter

$\frac{f_s}{2}$ dividiert durch die Signalleistung darüber.

$$SDR = \frac{\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} G(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega} \quad \text{mit } G(\omega) = |X(\omega)|^2$$

Da Aliasing besonders bei der Rekonstruktion des ursprünglichen Signals zum Problem wird, kann auch eine andere Form der SDR berechnet werden. Es stellt sich hier die Frage, wie gut das Rekonstruktionsfilter die zweite Periode des Spektrums des abgetasteten Signals unterdrücken kann. Höhere Perioden werden hier nicht betrachtet, da diese i.a. vernachlässigbare Störungen verursachen.

$$SDR = \frac{\int_0^{\infty} G(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} G(\omega - \omega_s) \cdot |H(\omega)|^2 d\omega}$$

Im Zähler steht hier die Leistung des gefilterten Ursprungssignales, im Nenner die Leistung der gefilterten nächsten Wiederholung.

3. Was wissen Sie über das Abtasten von Bandpasssignalen?

Es geht hier um Bandpassingale, deren Bandbreite viel kleiner ist, als ihre Mittenfrequenz

$B \ll f_0$. ein Solches Spektrum ist im Buch abgebildet (Bild 5.10 S.174). Das Spektrum ist oberhalb von f_h sowie unterhalb von f_l gleich Null. Es ist natürlich möglich, nach dem Nyquist-Kriterium abzutasten, mit $f_s > 2f_h$, das ist aber nicht wirklich ökonomisch, da ja die Information, die zum Rekonstruieren des Signals notwendig ist in dem engen Frequenzbereich zwischen f_l und f_h konzentriert ist. Es ist hier möglich, die Abtastfrequenz so zu wählen, dass die Wiederholungen des Spektrums, die durch die Abtastung entstehen genau in den Freien bereich zwischen 0 und f_l fallen.

Die kleinste mögliche Abtastfrequenz muss jene sein, bei der die positiven und negativen Teilspektren des Ursprungssignales immer genau aneinander anschließen, das resultierende Spektrum hat also die Periode $f_s = 2B = 2(f_h - f_l)$. Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass dies nur funktioniert, wenn B ein ganzzahliges Vielfaches von f_h ist. Jede kleine veränderung von f_s würde nun zur Überlappung von Teilspektren und zu Aliasing führen, das Undersampling funktioniert also nur in diesem Punkt. Bei weiterer Untersuchung finden sich aber noch weitere Bereiche, in denen ein Undersampling möglich ist. Beschrieben werden diese durch:

$$2B \left\lfloor \frac{Q}{n} \right\rfloor \leq f_s \leq 2B \left\lfloor \frac{Q-1}{n-1} \right\rfloor$$

mit $Q = f_h/B$ und $n \leq Q$, n positiv ganzzahlig

Die geschwungenen klammern bedeuten die nächst kleinere ganze Zahl (weglassen der Nachkommastellen).

4. Was wissen Sie über das Multiplexen von analogen Impulsen?

Multiplexen von analogen Signalen bedeutet zunächst einmal nur mehrere Signale irgendwie zugleich über den selben Kanal zu übertragen. Es gibt hier mehrere Möglichkeiten, wie Polarisationsmultiplex (wird bei Mikrowellen angewandt), Frequenzmultiplex, oder Zeitmultiplex. Letzterer wird hier behandelt.

Sollen mehrere analoge Impulszüge – sprich gesampelte Analogsignale – im Zeitmultiplex übertragen werden, so sind mehrere Überlegungen anzustellen.

Zunächst funktioniert das Zeitmultiplex ja so, dass zyklisch immer der Reihe nach eines der zu übertragenden Signale auf den Kanal geschaltet werden. Dies gibt wieder einen Impulszug, nur jetzt mit höherer Abtastfrequenz ($N \cdot f_s$ für N Signale).

Das Problem ist, dass die Bandbreite eines Übertragungskanals immer beschränkt oder teuer ist, und daher stellt sich zunächst die Frage wie hoch die Frequenz eines Signales maximal ist, das zu den Abtastzeitpunkten am Empfänger genau die Werte der einzelnen übertragenen Impulse annimmt. Betrachtet man den übertragenen Impulszug als abgetastetes Signal, dann hat ein Signal, das genau diese Werte zu den entsprechenden Zeitpunkten annimmt nach Nyquist zumindest die maximale Frequenz $f_h = 2 \cdot f_{multiplex}$. Ein solches Signal kann einfach durch Nachschalten eines Tiefpasses erzeugt werden.

Ein anderer Zugang ist bei ungefilterten Signalen, die über einen Kanal mit Tiefpasscharakter übertragen werden, nach dem Übersprechen zwischen zwei Pulsen (Crosstalk) zu fragen.

Ein Kanal, der im einfachsten Fall durch einen RC-Tiefpass modelliert wird nun betrachtet. Es werden zwei Rechteck Impulse gleich Höhe und der Breite τ im Abstand t_g übertragen. Die Frage ist nun, wieviel vom ersten Impuls am Ende des Zweiten noch vorhanden ist.

Ein RC Tiefpass erster Ordnung legt immer ein Abklingverhalten der Form $e^{-\frac{t}{RC}}$ an den Tag.

Die Crosstalk Ratio kann also abgeschätzt werden zu

$$XTR = 20 \log \left(\frac{U_n}{U_{n-1}} \right) = 20 \log e^{\frac{t_g + \tau}{RC}} = 20 \frac{\ln e^{\frac{t_g + \tau}{RC}}}{\ln 10} = 54.6 f_{3dB} (t_g + \tau) \text{ mit } f_{3dB} = \frac{1}{2 \pi RC}$$

5. Was wissen Sie über die quantisierte Puls-Amplituden Modulation?

Bei reiner PAM existiert das Signal zwar nur zu diskreten Zeitpunkten, kann aber jeden beliebigen Wert (innerhalb eines Bereiches) annehmen. Bei der quantisierten PAM ist dies nicht mehr der Fall, hier sind nur noch definierte Signallevels verfügbar. Die Abbildung von der PAM zur qPAM erfolgt über eine Treppenkurve (wobei die Treppen nicht notwendigerweise gleich hoch sein müssen). (Siehe Bild 5.16 auf Seite 180).

Anders ausgedrückt führt die Quantisierung zu einer Diskretisierung der Wahrscheinlichkeitsdichte des Signals. Anstatt einer kontinuierlichen Verteilung besteht die Wahrscheinlichkeitsdichte eines quantisierten Signals aus lauter gewichteten Dirac-Impulsen. (Bild 5.17)

Im Gegensatz zur reinen PAM kann die qPAM nicht mehr durch einfache Filterung auf das Ursprungssignal zurückgeführt werden, da die Werte des qPAM Signals nicht mehr mit denen des ursprünglichen Signals übereinstimmen. Dies kann modelliert werden über ein Fehlersignal, das so genannte Quantisierungsrauschen. $\epsilon_q(t) = s(t) - s_q(t)$

Das Quantisierungsrauschen ist zwar (nichtlinear) von dem Ausgangssignal abhängig, statistisch jedoch unabhängig (Bild 5.18 S.181, die Wahrscheinlichkeitsdichte ist hier mit Rechtecken anstatt Dirac-Nadeln gezeichnet, keine Ahnung wieso).

Für lineare Quantisierung eines Signals mit konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte (alle Signalwerte gleich wahrscheinlich) kann die Stärke des Quantisierungsrauschens abgeschätzt werden.

Angenommen die Quantisierungsstufen haben die Höhe q . Das Quantisierungsrauschen hat dann

eine rechteckige Wahrscheinlichkeitsdichte der Form $p(\epsilon_q) = \begin{cases} 1/q & |\epsilon_q| \leq q/2 \\ 0 & |\epsilon_q| > q/2 \end{cases}$.

Das zweite Moment (als Maß für die Signalleistung) des Quantisierungsrauschens ist dann:

$$\overline{\epsilon_q^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_q^2 \cdot p(\epsilon_q) d\epsilon_q = \int_{-q/2}^{q/2} \epsilon_q^2 \cdot \frac{1}{q} d\epsilon_q = \frac{1}{q} \left(\frac{(q/2)^3}{3} - \frac{(-q/2)^3}{3} \right) = \frac{q^2}{12}$$

Eine ähnliche Integration (die, da sie die Lösung einer Reihe benötigt, die sich sowieso keiner merkt, hier nicht behandelt wird (siehe Buch Seite 182) führt für das zweite Moment des Signales auf:

$$\overline{v^2} = \frac{M^2 - 1}{12} q^2 \quad (M \text{ ist die Anzahl der Quantisierungsstufen}).$$

Für die Signal to Noise Ratio (SN_qR) liefert das $SN_qR = M^2 - 1 \approx 20 \log M \text{ (dB)}$.

Genau betrachtet gilt der Ansatz für die Signalleistung und daher auch das Ergebnis für den Rauschabstand hier für eine spezielle Quantisierung (symmetrisch, ohne echte Null).

6. Was wissen Sie über PCM?

Wie bereits erwähnt kann ein quantisiertes PAM Signal nur noch eine endliche Anzahl diskreter Werte annehmen. Für eine einfachere Weiterverarbeitung oder Übertragung ist es durchaus zweckmäßig, jedem dieser diskreten Werte ein Symbol zuzuordnen, und dann mit diesen Symbolen weiter zu arbeiten. Übliche Symbole sind hier Binärzahlen. Diese können in verschiedenen 01-Folgen codiert sein, was zum Namen Puls-Code-Modulation führt.

Die Vorteile der PCM wie z.B. höhere Immunität gegen Störungen bei der Übertragung steht der Nachteil der höheren Bandbreite gegenüber (Anstatt eines Impulses werden n Pulse für einen Signalwert übertragen).

Für die PCM ist es interessant, den Rauschabstand vom Quantisierungsrauschen mit der Anzahl n der codierenden Bits in Relation zu setzen.

Über $SN_qR = \frac{3M^2}{\alpha}$, mit dem Faktor $\alpha, |\alpha| < 1$ für Signale mit nicht konstanter

Wahrscheinlichkeitsdichte, sowie $M = 2^n$ folgt

$$SN_qR \approx 10 \log 3 + 20 \log M - \alpha_{dB} = 4.8 + 20 \log 2^n - \alpha_{dB} \approx 4.8 + 6 \cdot n - \alpha_{dB}$$

Es wird also mit jedem zusätzlichen Bit der Sinal-Rausch-Abstand des Quantisierungsrauschens um etwa 6dB verbessert. Da $\alpha_{dB} \approx 10\text{dB}$ für Sprache ist, kann der Signal-Rausch Abstand eines PCM-Sprachsignals über $SN_qR \approx 4.8 + 6 \cdot (n - 1) \text{ dB}$ abgeschätzt werden.

7. Was wissen Sie über companded PCM?

Companded PCM (*Compress and Expand*) dient dazu, das Verhältnis von SN_qR zur verwendeten Bitanzahl zu verbessern.

Angewandt wird das Verfahren bei Signalen, die keine konstante Wahrscheinlichkeitsdichte

aufweisen, bei denen also nicht alle Signalwerte gleich häufig sind. Es ist ja leicht zu verstehen, dass es bei Signalwerten, die häufig vorkommen störender ist, wenn sie einen Quantisierungsfehler erzeugen als bei solchen die sehr selten sind. Es ist also durchaus praktisch, einen Bereich mit hoher Wahrscheinlichkeitsdichte besser aufzulösen (sprich, ihm mehr mögliche Signalwerte zuzuweisen), als anderen bzw. umgekehrt (Bild 5.21, S.188). Trägt man die Ausgangsamplitude der Kompressionsstufe über der Eingangsamplitude auf, dann resultiert die Kompressionscharakteristik. Die dazu reziproke Expansionscharakteristik wird zum Wiederherstellen des Signals benötigt (Bild 5.22 a, b S.189). Es geht bei dem Companding also darum, ein Signal mit möglichst konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte zu erzeugen.

Bei Sprach- und vielen anderen Signalen kommen niedrige Signalleveles öfter vor als hohe. Das Problem mit der Sprache ist, dass unterschiedliche Sprecher mit unterschiedlicher Lautstärke sprechen und daher eine perfekte Anpassung auf maximales SN_qR unmöglich ist. Es wird daher danach getrachtet, ein für alle Signalleveles konstantes SN_qR zu erreichen.

Diese Voraussetzung verlangt, dass die Quantisierungsbreite proportional zum Signallevele ist. Umgesetzt auf die Kompressionscharakteristik bedeutet das, dass eine Erhöhung des Eingangssignals um einen bestimmten Faktor das Ausgangssignal um einen bestimmten Summanden hebt (lt Buch). Die Kompressionscharakteristik muss also eine logarithmische Form haben.

Es gibt hier mehrere Ansätze (A-law, μ -law), die logarithmische Charakteristiken für zweiseitige (also nicht nur positive) Signale bieten. Ich glaube nicht, dass die Formeln gewusst werden müssen, die Charakteristik qualitativ im Kopf zu haben (Bild 5.24, S.190) kann aber nicht schaden.

8. Was wissen Sie über das Multiplexen von PCM-Signalen?

Der zugehörige Abschnitt im Buch ist vollkommen frei von jeder nicht trivialen Information.

Es können die einzelnen Bits anstatt die Werte gemultiplext werden und man kann einfach Multiplexerhierarchien aufbauen.

9. Was wissen Sie über Delta PCM?

Um Bandbreite zu sparen wird bei Delta PCM nicht der Signalwert selbst, sondern nur die Änderung zum vorherigen Wert als PCM-Codewort übertragen. Dies benötigt weniger Bits, sofern sich das Signal nicht zu schnell ändert. Das Blockschaltbild eines DeltaPCM-Encoders bzw -Decoders zeigt Bild 5.28 S.193.

10. Was wissen Sie über differentielles PCM (DPCM)?

Differentielles PCM trägt dem Umstand Rechnung, dass praktisch vorkommende Signale üblicherweise sehr stark selbstkorreliert sind. Es ist also durchaus möglich, aus vergangenen Werten eines Signals abzuschätzen, wie es ungefähr weitergehen wird.

Ein DPCM-Encoder nutzt dies aus. Zunächst wird das Signal durch einen Predictor (Vorhersager) geschickt, der aus einem vorgegebenen Algorithmus für den nächsten Sample einen möglichen Wert berechnet. Dieser wird dann vom tatsächlichen Signalwert abgezogen, und die Differenz (sozusagen der „unvorhersagbare“ Teil des Signals) wird übertragen.

Am anderen Ende, im Decoder, sitzt auch ein Predictor, der aus den vergangenen empfangenen Werten eine Vermutung für den nächsten Abgibt, zu der dann der empfangene Wert dazugezählt wird.

Ein schematischer Aufbau eines solchen Systems ist in Bild 5.29 S.194 gezeigt, eine mögliche Realisierung eines Predictors als gewichtete Summe zeigt Bild 5.30 S.195.

11. Was wissen Sie über adaptives PCM (ADPCM)?

Hier werden zusätzlich zum DPCM die Koeffizienten des Predictors laufend an die sich ändernde Signalstatistik angepasst, die Koeffizienten müssen dann natürlich auch übertragen werden. Bild 5.31 S.195 soll angeblich so ein System zeigen.

12. Was wissen Sie über die Deltamodulation?

Bei Deltamodulation wird der Wert des Signals mit dem gespeicherten Wert über einen Komparator verglichen. Es wird dann nur ein Bit übertragen, das anzeigt, ob das Signal größer oder kleiner als der gespeicherte Wert ist (dieser wird dann auch entsprechend um q erhöht oder verkleinert). Der Aufbau (Bild 5.32 S.196) ist denkbar einfach.

Zum normalen Quantisierungsrauschen kommen hier noch zwei neue Rauschsignale dazu (Bild 5.33 S.197). Das *Idling Noise* tritt bei konstanten Signalanteilen auf. Es handelt sich hier um ein Rechtecksignal mit der halben Samplingfrequenz, das durch den Rekonstruktionsfilter recht gut unterdrückt werden sollte. Das *Slope Overload Noise* tritt auf, wenn sich das Signal zu schnell ändert, die Deltamodulation hinkt dann hinterher.

Bei gegebener Sampling-Rate muss hier über die Quantisierungsbreite ein Trade-Off zwischen SN_{qR} und Slope-Overload-Rauschen gemacht werden. Je größer die Quantisierungsbreite, desto höher das Quantisierungsrauschen, desto schneller kann sich das Signal aber an schnelle Signaländerungen anpassen, was das Slope-Overload Rauschen verkleinert. Das umgekehrte gilt für kleinere Quantisierungsbreite. Umgangen werden kann dieses Problem durch starkes Oversampling.

Bitfehler bei der Übertragung wirken sich fatal auf die Deltamodulation aus, da ein falsch interpretiertes Bit so lange eine konstante Abweichung vom ursprünglichen Signal verursacht, bis der Fehler durch einen anderen Fehler zufällig rückgängig gemacht wird. Natürlich können sich die Fehler auch akkumulieren. (Bild 5.35 S.199)

13. Was wissen Sie über adaptive Deltamodulation?

Bei adaptiver Deltamodulation wird versucht, das Problem des Tradeoffs zwischen Slope-Overload und Quantisierungsrauschen zu entschärfen. Es wird hier einfach die Quantisierungsbreite laufend an das Signal angepasst. Wenn zum Beispiel das Signal über mehrere Samples hinweg größer ist als der laufend aufsummierte gespeicherte Wert, ist anzunehmen, dass sich das Signal schneller ändert als die Deltamodulation nachkommt, und die Schrittweite wird erhöht. Alterniert das Ausgangssignal des Komparators hingegen, dann kann man davon ausgehen, dass das Signal sich kaum ändert und die Quantisierungsbreite kann verkleinert werden. Ein möglicher Algorithmus ist

$$Q[n] = \begin{cases} C \cdot Q[n-1] & \text{für } e_q[n] = e_q[-n] \\ 1/C \cdot Q[n-1] & \text{für } e_q[n] \neq e_q[-n] \end{cases}, C > 1$$

mit $e_q[n]$ als Ausgang des Komparators und $Q[n]$ als aktuelle Quantisierungsbreite.

Dass Bitfehler hier noch fataler sind muss wohl nicht extra erwähnt werden.

6. Basisbandübertragung und Basisbandmodulation

1. Was wissen Sie über Center-Point Detection

Center Point Detection ist ein sehr einfaches Verfahren, um ein Basisband-übertragenes Symbol zu decodieren.

Angenommen, ein digitales Signal soll übertragen werden. Der Empfänger führt grob betrachtet zwei Operationen aus:

1. Analyse des einkommenden Spannungspulses und Zuordnung einer Zahl
2. Zuordnung eines Symbols (z.B. 0 oder 1, es können aber auch mehrere Symbole sein) zu dieser Zahl.

Bei Center-Point Detection wird Punkt 1 durch Sampling des Analogsignals ungefähr (genau geht es ja nicht) in der Mitte des Zeitschlitzes realisiert. Daher der Name. Punkt 2 wird dann durch Vergleich der Ausgangsspannung des Samplers mit einer oder mehreren Referenzspannungen umgesetzt.

2. Leiten Sie die Bitfehlerwahrscheinlichkeit einer binären Basisbandübertragung in einem Gauß-gestörten Kanal her. Hinweis: Legen Sie besondere Sorgfalt auf die von Ihnen gemachten Annahmen.

Gut, also zunächst die Voraussetzungen:

- Es handelt sich um einen Kanal, in dem ein Gauss-Rauschen u_n auftritt. Dieses ist Mittelwertsfrei (sonst hätte es eine DC-Komponente, was für Rauschen unüblich ist) und hat den Effektivwert σ . Die Wahrscheinlichkeitsdichte dieses Rauschsignals ist

$$p_{u_n}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}.$$

- Das binäre Signal u_s wird durch ein Rechtecksignal mit zwei Signallevels, U_1 für 0 und U_2 für 1, dargestellt. Die beiden Symbole sind gleich wahrscheinlich.
- Wegen der gleichen Wahrscheinlichkeit der Symbole wird die Referenzspannung des Komparators genau zwischen die beiden Spannungen gelegt $U_{ref} = (U_1 + U_2)/2$. Die Entscheidung des Komparators ordnet der Kanalspannung ein Symbol zu $u < U_{ref} \rightarrow 0, u > U_{ref} \rightarrow 1$.

Ein Bitfehler tritt dann auf, wenn eine 0 übertragen und eine 1 erkannt wurde und umgekehrt. Zunächst wird der Fall untersucht, in dem eine 0 übertragen wurde.

Die Signalspannung u_{s0} ist in diesem Fall U_1 , die Wahrscheinlichkeitsdichte dieses „Signals“ ist $p_{u_{s0}}(u) = \delta(u - U_1)$. Da das Nutzsignal und das Rauschen statistisch unabhängige Zufallssignale sind, ist die Wahrscheinlichkeitsdichte ihrer Summe gleich der Faltung der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichten. Mit der Faltungseigenschaft des Dirac-Impulses im Hinterkopf ergibt das

$$p_{u_0}(u) = (p_{u_n} * p_{u_{s0}})(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-U_1)^2}{2\sigma^2}}$$

Ein Fehler tritt jetzt in allen Fällen auf, in denen $u > U_{ref}$ ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies eintritt ist

$$P_0 = \int_{U_{ref}}^{\infty} p_{u_0}(u) du = \int_{U_{ref}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-U_1)^2}{2\sigma^2}} du$$

Bei der Lösung dieses Integrals hilft uns die Fehlerfunktion $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2} dx$ bzw. die komplementäre Fehlerfunktion $erfc(z) = 1 - erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Schreiben wir unser Integral um auf $P_0 = \int_{U_{ref}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-U_1)^2}{2\sigma^2}} du$ und substituieren

$$x = \frac{u-U_1}{\sqrt{2}\sigma} \rightarrow du = \sqrt{2}\sigma dx, u = U_{ref} = \sqrt{2}\sigma x + U_1 \rightarrow x = \frac{U_{ref}-U_1}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{U_2-U_1}{2\sqrt{2}\sigma} = \frac{\Delta U}{2\sqrt{2}\sigma} \text{ dann führt}$$

das zu
$$P_0 = \int_{\frac{\Delta U}{2\sqrt{2}\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} du = 1/2 \operatorname{erfc}\left(\frac{\Delta U}{2\sqrt{2}\sigma}\right) = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\Delta U}{2\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$$
.

Wendet man die selbe Argumentation auf den umgekehrten Fall an (1 übertragen, 0 erkannt) ergibt sich genau der selbe Fehler, die Bitfehlerwahrscheinlichkeit ist also

$$P_e = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\Delta U}{2\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$$

3. Bestimmen Sie die Bitfehlerrate einer Basisbandübertragung in AWGN, wenn ein unipolares NRZ Rechteckformat verwendet wird.

AWGN = Additive White Gaussian Noise.

Für ein unipolares NRZ Rechtecksignal (Bild 6.4 S.208), das die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_{umi} = 1/2 \cdot (\delta(0) + \delta(\Delta U))$ besitzt, kann der RMS-Wert (=Effektivwert, entspricht der Wurzel aus dem zweiten Moment) berechnet werden durch

$$U_{eff} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot p_{umi}(u) du} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot \left(\frac{\delta(0)}{2} + \frac{\delta(\Delta U)}{2}\right) du} = \sqrt{\frac{\Delta U^2}{2}} = \frac{\Delta U}{\sqrt{2}}$$

Die effektive Signalleistung ist dann $S = U_{eff}^2 = \frac{(\Delta U)^2}{2}$. Die Leistung des Rauschsignals ergibt

sich zu $N = \sigma^2$, da σ auch der RMS-Wert des Rauschens ist. Es ist also $\frac{S}{N} = 1/2 \left(\frac{\Delta U}{\sigma}\right)^2$

Aus der in der vorigen Frage hergeleiteten Fehlerwahrscheinlichkeit wird dann

$$P_e = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\Delta U}{2\sqrt{2}\sigma}\right)\right) = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{N}}\right)\right)$$

Dies ist immer noch die Wahrscheinlichkeit, dass EIN Symbol falsch detektiert wird. Um die Bitfehlerrate zu erhalten muss nun noch mit der Bitrate multipliziert werden.

$$BER = P_e \cdot R_b$$

4. Bestimmen Sie die Bitfehlerrate einer Basisbandübertragung in AWGN, wenn ein bipolares NRZ Rechteckformat verwendet wird.

AWGN = Additive White Gaussian Noise.

Für ein bipolares NRZ Rechtecksignal (Bild 6.4 S.208), das die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_{umi} = 1/2 \cdot (\delta(-\Delta U/2) + \delta(\Delta U/2))$ besitzt, kann der RMS-Wert (=Effektivwert, entspricht der Wurzel aus dem zweiten Moment) berechnet werden durch

$$U_{eff} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot p_{uni}(u) du} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot \left(\frac{\delta(-\Delta U/2)}{2} + \frac{\delta(\Delta U/2)}{2} \right) du} = \sqrt{2 \cdot \frac{\Delta U/2^2}{2}} = \frac{\Delta U}{2}$$

Die effektive Signalleistung ist dann $S = U_{eff}^2 = \left(\frac{\Delta U}{2} \right)^2$. Die Leistung des Rauschsignals ergibt

sich zu $N = \sigma^2$, da σ auch der RMS-Wert des Rauschens ist. Es ist also $\frac{S}{N} = \left(\frac{\Delta U/2}{\sigma} \right)^2$

Aus der in der vorigen Frage hergeleiteten Fehlerwahrscheinlichkeit wird dann

$$P_e = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\Delta U}{2\sqrt{2}\sigma} \right) \right) = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{S}{N}} \right) \right)$$

Dies ist immer noch die Wahrscheinlichkeit, dass EIN Symbol falsch detektiert wird. Um die Bitfehlerrate zu erhalten muss nun noch mit der Bitrate multipliziert werden.

$$BER = P_e \cdot R_b$$

5. Beschreiben Sie die unipolare Signalisierung (RZ und NRZ) und geben Sie deren Eigenschaften an.

Bei der unipolaren Signalisierung handelt es sich um eine binäre Signalisierung. Es sind zwei Symbole darstellbar und es kann nur eines auf einmal übertragen werden. Ein Symbol (z.B. 1) wird durch einen Spannungspuls dargestellt, das andere eben durch die Abwesenheit eines solchen Pulses. Es handelt sich also grob gesprochen um das Ein- und Ausschalten einer physikalischen Größe als Signal, woraus sich der Name „On-Off-Keying“ ableitet.

Zwei grundsätzliche Typen von unipolarer Signalisierung sind möglich, nämlich Return to Zero (RZ) und Non-Return to Zero (NRZ). Bei NRZ nimmt der Spannungspuls den kompletten Raum des Zeitschlitzes ein, wenn T die Periodendauer (also die Dauer eines Symbols) und τ die Dauer des Pulses ist, dann ist für NRZ also $T = \tau$. Bei RZ kehrt das Signal in jedem Zeitschlitz zu Null zurück, es ist also $\tau < T$, üblicherweise ist $\tau = T/2$.

Beide Typen von unipolarer Signalisierung haben ein *sinc*-artiges Leistungsdichtespektrum (also von der Form $\frac{\sin(x)}{x}$, Siehe Bild 6.11 S.215). RZ-Signalisierung hat im Vergleich zu NRZ bei

$\tau = T/2$ den Nachteil eines doppelt so breiten Spektrums, dafür aber den Vorteil einer Dirac-Linie bei der Übertragungsfrequenz. Diese Linie kann zur Taktrückgewinnung verwendet werden.

Eine bei unipolarer Signalisierung grundsätzlich vorhandene spektrale Eigenschaft ist eine Dirac-Nadel bei 0 Hz, die den Gleichanteil dieses Signaltyps charakterisiert. Weiters ist auch der kontinuierliche Signalverlauf bei 0 Hz nicht null, was bei Übertragung über einen Kanal mit Hochpassverhalten zu starker Verzerrung führt. (Siehe dazu Bild 6.13 S.218) Das Signal wird offensichtlich Polar, da die DC-Komponente wegfällt, das exponentielle Abklingen nach jedem Übergang wird als „Droop“ bezeichnet. Dieser Droop macht besondere Probleme bei längeren Phasen gleicher Symbole, da sich der Kanal dadurch auflädt (Im Bild ebenfalls sichtbar).

Im Vergleich mit polarer Signalisierung benötigt ein unipolares Signal mit gleicher BER (die nur vom Spannungsunterschied abhängt, siehe vorige Fragen) die doppelte durchschnittliche und die vierfache Spitzentransmitterleistung.

6. Beschreiben Sie die polare Signalisierung (RZ und NRZ) und geben Sie deren Eigenschaften an.

Polare und Unipolare Signalisierung sind einander so ähnlich, dass ich hier nur den Unterschied beschreibe (Ist auch im Buch der Fall).

Hier wird ein Symbol als positiver, das andere als negativer Spannungspuls dargestellt. RZ und NRZ ergeben sich wieder wie oben.

Polare Signalisierung hat sowohl bei RZ als auch bei NRZ die selben kontinuierlichen Spektren wie die unipolare, es fehlen jedoch bei der polaren alle Dirac-Nadeln.

Polare Signalisierung erleidet bei Übertragung über einen Hochpass genau die selben Verzerrungen wie unipolare (bis auf den Verlust der DC-Komponente, die hier ja fehlt).

Im Vergleich mit der unipolaren Methode benötigt die polare für gleiche BER nur die halbe durchschnittliche Transmitterleistung. dies lässt sich z.B. so begründen, dass in der DC-Komponente des unipolaren Signals keine Information übertragen werden kann.

Im polaren Fall ist für gleich wahrscheinliche Symbole die Referenzspannung des Empfänger-Komparators gleich Null, was den Vorteil hat, dass diese nicht an eine etwaige Signalabschwächung angepasst werden muss.

Anmerkung: Ich habe mich lange mit der Frage beschäftigt, warum bei der symmetrischen Variante die Dirac-Nadeln bei der Übertragungsfrequenz fehlen. Der Grund, der mir dann nach langem Grübeln eingefallen ist, dass das Leistungsdichtespektrum ja die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion ist. Im unsymmetrischen Fall hat die für NRZ ein Maximum bei 0 und geht dann auf $\frac{1}{2}$ herunter. Bei unsymmetrischen RZ hat sie ebenfalls bei 0 ein Maximum, fangt dann nach links und rechts aber zum Oszillieren an zwischen 0 (Überlagerung von Zero-Zeitschlitten mit Signalzeitschlitten) und $\frac{1}{4}$ (Mittelwert des Signals), daher die Nadel. Im symmetrischen Fall ist für eine Verschiebung größer als der Zeitschlitz die Autokorrelation 0, weil das Signal mittelwertfrei ist. D.h. Das Signal ist zwar auch für symmetrisches RZ periodisch, aber halt leider periodisch 0, daher keine Dirac-Nadeln.

7. Beschreiben Sie die Manchester Codierung

Bei der Manchester Codierung handelt es sich um eine Sonderform der Dipolaren Signalisierung.

Dipolare Signalisierung unterscheidet sich von der unipolaren bzw. polaren Signalisierung in so fern, dass hier in einem Symbol-Zeitschlitz sowohl ein positiver, als auch ein negativer Spannungspuls vorkommt. Dies führt dazu, dass das Leistungsdichtespektrum (Bild 6.11 S.215) im Bereich um 0 Hz Null ist, was diese Variante besonders für Kanäle mit Hochpassverhalten interessant macht.

Auch hier gibt es wieder eine OOK-Variante (ein Symbol wird durch einen positiven und darauffolgenden negativen Spannungspuls dargestellt, das andere durch eine Nulllinie) und eine entgegengesetzte (beide Symbole werden durch jeweils ein Puls-Paar entgegengesetzter Polarität dargestellt, bei einem Symbol kommt aber zuerst der positive, dann der negative und beim anderen umgekehrt).

Die letztere Variante ist eben die Manchester-Codierung. Bei ihr fehlen wieder alle Dirac-Nadeln im Spektrum.

8. Was wissen Sie über die Entzerrung von Impulsen?

In der folgenden Erklärung wird unter „Bandbreite“ die 3dB-Bandbreite verstanden.

Das Problem der Verzerrung eines Impulses tritt dann auf, wenn ein ebensolcher, der eine sehr hohe Bandbreite aufweist, über einen Kanal übertragen werden soll, dessen Übertragungsfunktion eine relativ geringe Bandbreite aufweist. Zu dieser Abschwächung bestimmter Frequenzanteile kommt normalerweise noch eine Phasenverzerrung hinzu, was in Summe den Impuls stark in seiner Höhe

verkleinert und in der Zeit ausdehnt (Bild 6.18, S.225). Dies führt zur Überlappung aufeinanderfolgender Impulse, was sich wiederum als Bitfehler niederschlägt.

Abhilfe schafft hier ein sogenanntes „Entzerrfilter“. Dieses sollte idealerweise eine genau zum Kanal reziproke Übertragungsfunktion aufweisen (Bild 6.20, S.226), damit das Gesamtsystem die Übertragungsfunktion 1 hat. Solche idealen Filter müssten eigentlich akausal sein, und eben genau die Parameter des Kanals kennen, was natürlich unmöglich ist, es wird also mit Näherungen gearbeitet.

Ein Vorgang Impuls → verzerrter Impuls → entzerrter Impuls ist in Bild 6.19 S. 226 gezeigt.

9. Was wissen Sie über die Taktrückgewinnung?

Taktrückgewinnung ist die Extraktion eines Takt Signals aus dem Verlauf des Eingangssignals. Sie wird für synchrone Übertragung benötigt, wenn keine extra Leitung für den Takt verfügbar ist.

Folgend die Beschreibung einer Taktrückgewinnung für bipolares RZ:

Zunächst wird das einkommende Signal gleichgerichtet bzw. quadriert. Dadurch werden die negativen Signalkomponenten nach oben geklappt. Das Spektrum wird auf die doppelte Bandbreite verbreitert, eine Dirac-Nadel bei der Taktfrequenz entsteht.

Herzstück der Taktrückgewinnung ist ein Filter, der die Dirac-Nadel des Taktsignals aus dem Datensignal heraus filtert. Dieses sinusförmige Signal muss nur noch mittels eines Komparators in ein Rechtecksignal übergeführt werden und schon ist das Taktsignal gewonnen.

Probleme bei der Taktrückgewinnung können einerseits durch Rauschen, andererseits durch Timing-Jitter (Verzögerungen einzelner Pulse) entstehen, da sie sich in einer Frequenzmodulation der Takt-Nadel im Spektrum niederschlagen. Diese kann dadurch aus dem Durchlassbereich des Rückgewinnungsfilters herausfallen.

7. Entscheidungstheorie

1. Welche Entscheidungsphilosophien gibt es für binäre Symbolströme?

Grundsätzlich gibt es zwei verschiedene Philosophien für die Entscheidung zwischen zwei Symbolen, nämlich Soft Decisions und Hard Decisions.

Soft- oder Multilevel-Decision Empfänger (Bild 7.1a/c S.239) gehen so vor, dass das gesampelte Signal (+Rauschen) mittels eines A/D-Wandlers (mit mehr als einem Bit) quantisiert wird. Als Beispiel nehmen wir hier die im Bild gezeigte Variante mit 8 Stufen, also 3 Bit. Je nachdem, wie nahe das Ergebnis der Quantisierung bei 000 oder 111 liegt, kann man mehr oder weniger sicher davon ausgehen, dass eine 0 bzw. 1 übertragen wurde. Das Ausgangssignal des Quantisierers wird an eine Logik weitergegeben, die dann durch die Betrachtung mehrerer Samples über einen für die Applikation maßgeschneiderten Algorithmus die Hard Decision also 0 oder 1 trifft. Dieser Algorithmus berücksichtigt die Wahrscheinlichkeit und macht auch Fehlerbehandlung.

Hard- oder Two-level Decision Empfänger (Bild 7.1b/c S.239) entscheiden sofort bei der Quantisierung für 0 bzw. 1, die Fehlererkennung läuft in einem eigenen Funktionsblock. Die Hard Decision Methode ist weiter verbreitet als die Soft Decision Methode. Die beiden meistverwendeten Entscheidungskriterien sind hier das von Bayes (haupts. für binäre Übertragung) und von Neyman-Pearson (haupts. für Radar-Anwendungen).

2. Was wissen Sie über das Entscheidungskriterium vom Bayes?

Das Entscheidungskriterium von Bayes ist das in der binären Übertragungstechnik am weitesten verbreitete. Es setzt im Gegensatz zum Neyman-Pearson Kriterium eine bekannte Übertragungsstatistik voraus, die Entscheidung wird unter Einbeziehung der Wichtigkeit der Symbole, in Form von sogenannten Kosten, getroffen. Die Argumentation wird im folgenden dargelegt.

Zunächst wird festgelegt, dass es zwei Vorgänge bei binärer Übertragung gibt, die zu einem Verlust von Information führen: eine übertragene 0, die als 1 interpretiert wird und umgekehrt. Diese beiden Varianten werden nun jeweils mit (Fehl-)Entscheidungskosten bewertet. C_0 ist die Kostenzahl für eine als 0 interpretierte 1, C_1 ist die Kostenzahl für eine als 1 interpretierte 0.

Diese Kosten werden nun für eine bestimmte Spannung bewertet. Dazu werden die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(1|v)$ (Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 übertragen wurde, für gegebene Spannung) und $P(0|v)$ (Wahrscheinlichkeit, dass eine 0 übertragen wurde, für gegebene Spannung) eingeführt. Diese bedingten Wahrscheinlichkeiten geben also dem Empfänger für ein empfangenes Spannungssample die Wahrscheinlichkeit an, dass eine 0 bzw. 1 übertragen wurde. Die bedingten Kosten sind dann $C(0|v) = C_0 \cdot P(1|v)$ (Kostenzahl für eine als 0 interpretierte 1 mal der Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 übertragen wurde bei gegebener Spannung) und $C(1|v) = C_1 \cdot P(0|v)$.

Die Entscheidung wird nun so getroffen, dass die Kosten minimiert werden. Für eine gegebene Spannung v bedeutet das $C(0|v) < C(1|v) \rightarrow 0$
 $C(1|v) < C(0|v) \rightarrow 1$.

Einsetzen der Definitionen der bedingten Kosten liefert:

$$\begin{aligned} C(1|v) &< C(0|v) \\ C_1 P(0|v) &< C_0 P(1|v) \\ \frac{P(0|v)}{P(1|v)} &< \frac{C_0}{C_1} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{P(0|v)}{P(1|v)} > \frac{C_0}{C_1} \rightarrow 0$$

Mittels einer abgewandelten Form des Bayes'schen Kriteriums

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A)$$

lassen sich die eigentlich erst a posteriori bekannte Wahrscheinlichkeiten $P(1|v)$ und $P(0|v)$ auf die als a priori bekannten Wahrscheinlichkeiten der Übertragung eines bestimmten Symbols $P(0)$ bzw. $P(1)$ sowie die Wahrscheinlichkeitsdichten für den Wert der Spannung bei der Übertragung eines bestimmten Symbols $p(v|0)$ bzw. $p(v|1)$ zurückführen. $P(0)$ und $P(1)$ werden klarerweise durch den Datenstrom festgelegt.

$$\begin{aligned} P(0|v) &= \frac{P(0)}{p(v)} \cdot p(v|0) \\ P(1|v) &= \frac{P(1)}{p(v)} \cdot p(v|1) \end{aligned}$$

$p(v)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Wert der Spannung oberflächlich betrachtet, ist

also eine Mischung aus dem Signal (das vom Datenstrom abhängt) und dem Rauschen. Zum Glück fällt sie beim Einsetzen in unser Entscheidungskriterium heraus:

$$\frac{P(0|v)}{P(1|v)} = \frac{P(0) \cdot p(v|0)}{P(1) \cdot p(v|1)}$$

Eingesetzt und umgeschrieben ergibt dies das Bayes'sche Entscheidungskriterium:

$$\frac{p(v|0)}{p(v|1)} < \frac{C_0 P(1)}{C_1 P(0)} \rightarrow 1$$

$$\frac{p(v|0)}{p(v|1)} > \frac{C_0 P(1)}{C_1 P(0)} \rightarrow 0$$

Wieso diese Form? Es ist gut ersichtlich, dass nur der linke Teil der Ungleichung von der Spannung abhängt. Dieser Teil wird als likelihood ratio (Wahrscheinlichkeitsverhältnis) bezeichnet. Der rechte Teil ist konstant, er kann also als Schwellwert bezeichnet werden.

$$L_{th} = \frac{C_0 P(1)}{C_1 P(0)}$$

Der Schwellwert der Spannung kann nun berechnet werden, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichten bekannt sind.

3. Was wissen Sie über das Neyman-Pearson Kriterium?

Dieses Kriterium wird hauptsächlich in Radar-Anwendungen benutzt. Hier ist – bedingt durch die zahlreichen, unterschiedlichen Störsignale – mit einem Gauß-Rauschen zu rechnen. Weiters sind die Kosten eines falschen Alarmes (0 interpretiert als 1) verschwindend gering verglichen mit den Kosten eines „übersehenen“ Objektes (1 interpretiert als 0).

Im Bild 7.7 S.250 sind die Wahrscheinlichkeitsdichten für nur Rauschen $p(v|n)$ und Signal + Rauschen $p(v|s+n)$ gezeichnet. Integration liefert die Wahrscheinlichkeit für das Erkennen eines Signals

$$P_D = \int_{v_{th}}^{\infty} p(v|s+n) dv$$

und die Wahrscheinlichkeit für einen Fehllarm

$$P_{FA} = \int_{v_{th}}^{\infty} p(v|n) dv$$

bei gegebenen Verteilungen und Schwellspannung.

Man geht nun weiter vor, die Threshold-Spannung so zu wählen, dass eine noch akzeptable Wahrscheinlichkeit für Fehllarme erreicht wird. Die Erkennungswahrscheinlichkeit ist dann möglichst hoch.

8. Optimale Filterung für die Übertragung und Detektion

1. Wie kommt es zur Intersymbolinterferenz und wie kann man sie bekämpfen?

Es ist binäre Übertragung mittels OOK RZ angenommen (Einfachster Fall, das gesagte gilt aber für alle Fälle, Bild 8.1 S.254). Die Symbole werden also als einzelne rechteckige Pulse dargestellt. Diese Pulse haben mathematisch betrachtet ein unendlich breites Spektrum, das natürlich nicht über einen (üblicherweise stark) bandbeschränkten Kanal übertragen werden kann. Die Beschränkung des Frequenzbereiches eines Pulses, führt zu einer Verbreiterung im Zeitbereich, sodass dem

nächsten Puls noch „Nachwirkungen“ des aktuellen Pulses überlagert sind. Dieser Effekt – also dass die Spannung zu einem Zeitpunkt des Samplings nicht nur von dem aktuellen Puls, sondern auch von den vergangenen abhängt – heißt Intersymbolinterferenz.

Bild 8.1 S.254 zeigt die Auswirkungen eines RC-Tiefpass-Kanals auf einen Impulszug, Bild 8.2 S.255 zeigt die Auswirkungen eines idealen Filters auf einen einzelnen Impuls. Bei letzterer Betrachtung zeigt sich, dass im Falle einer Übertragungscharakteristik höherer Ordnung (-> schwingfähiges System) die Überlagerung nicht nur in die positive, sondern auch in die negative Richtung stattfinden kann.

Bekämpft wird die ISI durch gezielte Vorfilterung am Sender und durch Entzerrungsfilter am Empfänger.

2. Leiten Sie die Bedingungen her, die für ISI-freie Signale notwendig sind.

Der Ansatz von dem hier für „ISI-freie Signale“ ausgegangen wird ist der folgende:

Es ist offenbar unmöglich, einen Puls zu übertragen, der in dem notwendigen Maße zeitlich beschränkt ist. Sprich: Die übertragenen Pulse werden sich immer bis hinter die nächste Sampling-Zeitpunkte ausdehnen. Für unsere Anwendung, also das Sampling zu einem bestimmten Zeitpunkt, ist es aber nur notwendig, dass die Auswirkung der vergangenen Pulse *genau zum Abtastzeitpunkt* Null ist. Es ist also ohne weiteres tolerierbar, dass der Impuls Auswirkungen auf den folgenden Spannungsverlauf hat, so lange seine bandbeschränkte Version bei den nächsten Samplingzeitpunkten einen Nulldurchgang hat.

Ausgedrückt wird dies in der folgenden Form:

$$v_N(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_0) = v_N(0) \delta(t)$$

Also die Spannungswerte des N-ten Pulses aufsummiert über alle Sampling-Zeitpunkte muss gleich der Spannung zum Zeitpunkt ebendieses Pulses (hier 0) sein. Heißt nichts anderes als jetzt da, vorher und nachher nix.

Wird die obige Bedingung für ISI-freie Signale Fourier transformiert, kann ein neues Kriterium formuliert werden. Wie bereits bekannt transformiert sich der Dirac-Impuls auf eine Konstante 1, der Dirac-Kamm auf einen Dirac-Kamm und die Multiplikation auf eine Faltung:

$$V_N(\omega) * \left(\frac{1}{T_0} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{n}{T_0}\right) = v_n(0)$$

$$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_N\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = v_n(0)$$

Wie ist dies zu Interpretieren? Wird das Spektrum unseres Pulses unendlich oft kopiert und immer um $1/T_0$ versetzt wieder eingefügt, dann muss sich das resultierende Spektrum auf eine Konstante summieren (Bild 8.7 S.259).

Für Basisband Signale bedeutet das, dass das Spektrum eine ungerade Symmetrie um $1/T_0$ haben muss, Bandpass Signale müssen ausgehend von der Zentralfrequenz f_c einen ungeraden Symmetriepunkt bei $f_c \pm 1/T_0$ haben (Bild 8.6 S.258).

3. Erklären Sie das Nyquist'sche Symmetrietheorem.

Das Nyquist'sche Symmetrietheorem folgt direkt aus dem oben ausgearbeiteten Kriterium für ISI-

freie Signale.

Es wird hier ausgegangen von einem Filter mit rechteckigem Amplitudenspektrum und linearer Phase mit der Eckfrequenz f_x (Bild 8.8 S.260). Zu diesem wird (im Spektralbereich) eine reelle Funktion dazuaddiert, die genau um f_x herum eine ungerade Symmetrie aufweist. Die *Impulsantwort* des so erhaltenen Filters wird dann genau zu den Zeitpunkten $T_0, 2T_0, \dots$ (auch in negative Zeitrichtung) einen Nulldurchgang aufweisen, d.h. ein ISI-freies Signal sein.

Filter, die diesem Theorem entspringen werden Nyquist-Filter genannt.

Anmerkung: Dies ist mehr oder weniger die Übersetzung aus dem Buch, ich finde das als Kriterium unvollständig, weil was ist, wenn das resultierende Filter über f_x nicht 0 ist, dann haut das ganze nicht mehr hin. Das englische Wikipedia liefert das letzte Kriterium von Frage 2 als Nyquist-ISI-Kriterium.

4. Erklären Sie das Raised-Cosine Filter.

Das Raised-Cosine Filter (Bild 8.10 S.261) ist eine mögliche Realisierung eines Nyquist-Filters. Es wird von einem Rechteckfilter ausgegangen, dessen Kanten mit einem Sinus „verschliffen“ werden. Der Sinus ist so platziert, dass er bei $|f|=f_x-\Delta f$ den Wert 1 hat und bei $|f|=f_x+\Delta f$ auf 0 übergeht. Es wird deswegen der Betrag der Frequenz verwendet, weil das Spektrum ja Symmetrisch um den Ursprung sein muss. (eine schöne Darstellung von f_x und Δf ist im rechten oberen Bild von Bild 8.8 S.260 zu finden)

Sein Spektrum ist:

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & |f| < f_x - \Delta f \\ \frac{1}{2} \left(1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{f_x}{\Delta f} \left(\frac{|f|}{f_x} - 1 \right) \right) \right) & f_x - \Delta f \leq |f| \leq f_x + \Delta f \\ 0 & |f| > f_x + \Delta f \end{cases}$$

Ein Sinus, der seinen Nulldurchgang bei f_x und sein Maximum bzw Minimum ($\rightarrow \pm(\text{Periode des Sinus})/4$) bei $f_x \pm \Delta f$ hat, hat die Form $\sin\left(\frac{2\pi}{4\Delta f}(f - f_x)\right)$. Dieser muss noch nach oben verschoben, gestaucht und invertiert werden, dadurch erklärt sich die obige Form.

In diesem Zusammenhang sei noch die Normalised Excess Bandwith, also die Bezogene

Überschussbandbreite $\alpha = \frac{\Delta f}{f_x}$ erwähnt. Sie gibt an, wie weit die „Verschleifung“ des Randes geht, $0 \leq \alpha \leq 1$. Bei $\alpha = 0$ ist das Raised-Cosine Filter ein reines Rechteckfilter, $\alpha = 1$ führt auf das Fully Raised Cosine Filter (siehe Bild 8.10 S.261).

Die Impulsantwort des Filters ist ein ISI-freies Signal, die Nebenhügel klingen (beim breitbandigsten Fully Raised Cosine Filter) mit $1/t^3$ ab.

5. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion für Matched-Filter Detektion.

Im Gegensatz zu den Nyquist-Filtern, die einer Filterung für optimales Senden ermöglichen, dient das Matched-Filter zur optimalen Detektion. Es wird also vor die Sampling-Einheit geschaltet.

Die Definition ist die folgende:

Ein Filter wird dann als „matched“ auf einen bestimmten Puls bezeichnet, wenn es zum Samplingzeitpunkt das SNR (Signal-Rausch-Abstand) maximiert, sofern genau so ein Puls am Eingang anliegt.

Wie aber nun den Signal-Rausch-Abstand maximieren?

Wir gehen von folgender Überlegung aus: Unser Rauschen ist (annähernd) weiß, d.h. hat ein konstantes Leistungsdichtespektrum. Der Impuls hat selbstverständlich ein nicht konstantes, aber stets charakteristisches Leistungsdichtespektrum. (Bild 8.28d S.273)

Es ist naheliegend den Filter so zu wählen, dass jene Spektralbereiche in denen die Signalleistung höher ist als die Rauschleistung höher verstärkt werden, als jene in denen das nicht gilt. Da die Rauschleistung als konstant angenommen wird, heißt das, dass die Übertragungsfunktion des Filters für das Leistungsdichtespektrum mit dem Leistungsdichtespektrum des Pulses über der Frequenz wachsen bzw. Sinken muss. Ein einfacher Ansatz ist hier, die Übertragungsfunktion für das Leistungsdichtespektrum ($|H|^2$) proportional zum Leistungsdichtespektrum des Pulses zu machen:

$$|H|^2 = k \cdot |V|^2$$

Damit ist einmal der Betrag der Übertragungsfunktion festgelegt. Nun zur Phase. Idealität für die Phase ist dann erreicht, wenn alle Sinus-Schwingungen, aus denen der Impuls besteht, sich im Abtastzeitpunkt überlagern. Angenommen, der Abtastzeitpunkt liegt bei 0, dann muss der Filter ein genau Nullphasiges Signal herstellen, denn da $e^{j0} = 1$ ist, werden sich dann alle Teilschwingungen in diesem Punkt überlagern. Man mag nun einwenden, dass ein derartig phasenverzerrtes Signal wahrscheinlich eine sehr weite zeitliche Ausdehnung hat. Das ist für den Fall der linearen Filterung auch richtig, hier wird das Filter aber höchst wahrscheinlich nach jedem Zeitschlitz zurückgesetzt.

In der Praxis ist so etwas natürlich nicht realisierbar (u.a. weil akausal, d.h. es werden auch Werte nach dem Entscheidungszeitpunkt für die Berechnung benötigt), es muss eine Zeitverzögerung berücksichtigt werden, diese wird mit dem reinen Phasenterm $e^{-j\omega T_0}$ eingebracht. T_0 ist die Symboldauer.

Die fertige Übertragungsfunktion des Matched-Filters sieht jetzt so aus:

$$H(\omega) = k \cdot V^*(\omega) \cdot e^{-j\omega T_0}$$

Diese erfüllt alle Anforderungen. Die Übertragungsfunktion ist über den Faktor k betragsmäßig proportional zu $V(\omega)$, die Phase ist durch die Konjugation genau entgegengesetzt, und die Zeitverzögerung ist auch dabei.

6. Berechnen Sie die Impulsantwort eines Matched-Filters.

Mit der bekannten Übertragungsfunktion des Matched-Filters:

$$H(\omega) = k \cdot V^*(\omega) \cdot e^{-j\omega T_0}$$

und den Identitäten $f^*(t) \Leftrightarrow F^*(-\omega)$ und $f(t-\tau) \Leftrightarrow e^{-j\omega\tau} \cdot F(\omega)$ ergibt sich die Impulsantwort des Matched-Filters als invers Fouriertransformierte zu:

$$h(t) = k \cdot v(-(t-T_0)) = k \cdot v(T_0 - t)$$

Also der mit k multiplizierte, gespiegelte, und um T_0 nach rechts verschobene Zeitverlauf des Pulses, auf den das Filter gematched ist. (Siehe Bild 8.30 S.277)

7. Berechnen Sie das Ausgangssignal eines Matched-Filters.

Ich nehme an, dass hier das Ausgangssignal im Frequenz und Zeitbereich bei Anwesenheit eines

Pulses gemeint ist.

Es ist also

$$H(\omega) = k \cdot V^*(\omega) \cdot e^{-j\omega T_0}$$

und $V(\omega)$ ist das Spektrum des Pulses. Ist dieser Puls am Eingang, dann errechnet sich das Ausgangssignal $S(\omega)$ zu

$$S(\omega) = V(\omega) \cdot H(\omega) = k \cdot |V(\omega)|^2 \cdot e^{-j\omega T_0}$$

Das Spektrum des Ausgangssignals entspricht also dem Leistungsdichtespektrum des Pulses, mit konstanter Phase und mit k multipliziert.

Lassen wir den Phasenterm einmal weg, von dem wissen wir ja, was er macht. Setzen wir also $T_0 = 0$.

Das Zeitsignal ist also dann k multipliziert mit der Faltung von $v(t)$ mit $v^*(t)$. Aus den vorigen Fragen ist schon bekannt, dass dies eine Funktion proportional zur Autokorrelationsfunktion von $v(t)$ ist. Die wichtigste Eigenschaft der Autokorrelationsfunktion ist? Na? Richtig! Im Ursprung ist sie maximal, und hat den Wert der Pulsenergie. Genau das war verlangt.

Geben wir den Phasenterm wieder dazu, dann liegt das Maximum halt nicht bei 0 sondern bei T_0 .

8. Erklären Sie das Matched-Filter mit: Übertragungsfunktion, Impulsantwort und dem Ausgangssignal.

Siehe Fragen 5, 6 und 7 (keine Ahnung, was mit dieser Frage gemeint ist)

9. Erklären Sie den Unterschied zwischen Matched-Filter Detektion und Korrelationsdetektion.

Die Korrelationsdetektion nimmt das Ergebnis der Matched-Filter Detektion (Ausgangssignal ist im Optimalfall proportional zur Korrelation mit dem Zeitsignal des gesuchten Pulses). Und denkt es weiter.

Die erste Überlegung ist, dass der eigentlich interessante Wert am Ausgang des Matched-Filters ja nur der Maximalwert ist. Dieser ist genau die Autokorrelation mit Verschiebung 0. Es ist nun einfach möglich, dies zu implementieren. Es ist bekannt, wie der Zeitverlauf des gesuchten Impulses (um bei OOK zu bleiben) aussieht. Dieses Signal kann als Referenzsignal $v(t)$ verwendet werden. Es wird mit dem Eingangssignal $v_{in}(t)$ multipliziert und das Ergebnis aufsummiert (Bild 8.32 S.278). Eine realistischere Variante zeigt Bild 8.33. Die variable Zeitverschiebung ist ja unnötig, da der Zeitpunkt des Eintreffens des Pulses bekannt ist (oder sein sollte), da der Puls nur in einem bestimmten Zeitschlitz überhaupt auftreten darf, können die Integralgrenzen auf diesen eingeschränkt werden, und zu guter Letzt interessiert uns nur der Maximalwert, daher die Abtastung.

Eine konkrete Realisierung ist in Bild 8.34 gezeigt, das Referenzsignal ist hier in die Filterparameter (=Impulsantwort für nicht rückgekoppelte Systeme) eines Transversalfilters gegossen.

Matched Filter Detektion und Autokorrelationsdetektion haben auf Grund des ähnlichen Aufbaus auch sehr ähnliche Eigenschaften zu den Samplingzeitpunkten, die Filter weisen aber im Allgemeinen einen unterschiedlichen Zeitverlauf an den Ausgangssignalen auf.

Weiters kann die Korrelationsdetektion auch einfach auf mehrere Pulstypen erweitert werden. (siehe Bild 8.37 S.280)

10. Leiten Sie das SNR zum Entscheidungszeitpunkt für einen Korrelationsdetektor her.

Unsere Ausgangssituation ist wie folgt:

- Wir verwenden einen Korrelationsdetektor, der zum Entscheidungszeitpunkt den Wert

$$X_o = \int_{n.T_0}^{(n+1).T_0} v_{in}(t) \cdot v_{ref}(t) dt \text{ mit } v_{in}(t) = v_{puls}(t) + n(t) \text{ liefert.}$$

- Es liegt der Idealfall vor, d.h. der Puls kommt genau zu dem Zeitpunkt an, an dem wir ihn erwartet haben, und seine Form ist auch genau so wie erwartet. Es ist also

$$v_{puls}(t) = v_{ref}(t) = v(t)$$

- Das Rausch-Signal $n(t)$ ist ein weißes Rauschen.

Nun lässt sich das Integral für den Ausgangswert des Detektors auf zwei Integrale aufteilen

$$X_o = \int_{n.T_0}^{(n+1).T_0} v(t)^2 dt + \int_{n.T_0}^{(n+1).T_0} n(t) \cdot v(t) dt$$

Das linke Integral ist (da der Puls ja genau auf den Zeitschlitz beschränkt ist) genau die Energie des Eingangssignals E_v . Der Teil des Ausgangssignals, der nur von dem Eingangssignal bestimmt wird ist also gleich der Energie des Eingangssignals. Die Leistung dieses Teils des Ausgangssignals ist also $S = E_v^2$.

Das rechte Integral ist nicht so einfach auswertbar, weil $n(t)$ keinen genauen Zeitverlauf hat, sondern nur statistisch beschreibbar ist. Wir werden im folgenden das Produkt der beiden Signale als Zufallssignal betrachten, und das beschränkte Integral als lineares System.

Wir wollen das Leistungsdichtespektrum am Ausgang des Integrators wissen. Um dieses zu berechnen brauchen wir einmal das Leistungsdichtespektrum am Eingang. Dieses erhalten wir nach dem Wiener-Kinchine-Theorem aus der Autokorrelationsfunktion des Signals. Mit

$$x(t) = n(t) \cdot v(t) \text{ ist}$$

$$R_{xx} = \langle x(t) \cdot x(t-\tau) \rangle = \langle n(t) \cdot v(t) \cdot n(t-\tau) \cdot v(t-\tau) \rangle = \langle n(t) \cdot n(t-\tau) \cdot v(t) \cdot v(t-\tau) \rangle$$

Da $n(t)$ und $v(t)$ statistisch unabhängige Signale sind führt dies zu

$$R_{xx} = \langle n(t) \cdot n(t-\tau) \cdot v(t) \cdot v(t-\tau) \rangle = \langle n(t) \cdot n(t-\tau) \rangle \cdot \langle v(t) \cdot v(t-\tau) \rangle = R_{nn} \cdot R_{vv}$$

Nun einmal zum weißen Rauschen. Dieses hat, was schon bekannt ist, ein konstantes Leistungsdichtespektrum, es sind also alle Frequenzen mit der selben Leistung vertreten. Wie groß ist diese Leistung aber?

Das Leistungsdichtespektrum allgemein ist bei normaler Fouriertransformation zweiseitig, es gibt also positive und negative Frequenzen. Da das LDS immer reell, positiv und die transformierte einer reellen Zeitfunktion ist, hat sie gerade Symmetrie ($G(\omega) = G(-\omega)$). Will man nun konkret die Leistung in einem bestimmten Frequenzbereich wissen, ist eine Integration über sowohl die Frequenzen im positiven, als auch im negativen Bereich notwendig. Da die Werte in diesen Bereichen gleich sind ist die Gesamtleistung genau doppelt so groß wie die Leistung, die ein so ein Integral liefert.

Dem tragen wir nun Rechnung, indem wir sagen, dass die (konstante)zweiseitige Leistungsdichte des weißen Rauschens $N_0/2$ ist, N_0 ist dann wirklich die Leistungsdichte bei einer Frequenz.

Die Autokorrelationsfunktion des als weiß angenommenen Rauschens ist also dann

$$R_{nn} = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau)$$

Die Autokorrelationsfunktion des Signals lässt sich wieder normal anschreiben, sie ist

$$R_{vv}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) \cdot v(t-\tau) dt$$

Das Produkt aus den beiden Autokorrelationsfunktionen ist nun

$$R_{xx} = R_{vv}(\tau) \cdot \frac{N_0}{2} \delta(\tau) = R_{vv}(0) \cdot \frac{N_0}{2} \delta(\tau) = \frac{E_s}{T_0} \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

Es ist also, da R_{nn} einen Dirac-Impuls enthält nur der Wert von R_{vv} bei 0 interessant, und wie jeder durch Null setzen von τ sehen kann, ist das wieder die Signalleistung. Wir nehmen hier die durchschnittliche Signalleistung gemittelt über die Symboldauer, also die Energie des Symbols durch die Symboldauer $\frac{E_s}{T_0}$. Nun kann durch Fouriertransformation das

Leistungsdichtespektrum von dem Signal berechnet werden

$$R_{xx} = \frac{E_s}{T_0} \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \Leftrightarrow G_x = \frac{E_s}{T_0} \frac{N_0}{2}$$

Ein beschränkter Integrator (wir wollen das Integral ja als LTI-System darstellen) hat nun die Impulsantwort

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right)$$

(Argumentation siehe Bild 8.38 S.282).

Die Übertragungsfunktion ist dann

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right) \Leftrightarrow H(\omega) = T_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{T_0}{2\pi} \omega\right) e^{-j\omega T_0/2}$$

Und die Übertragungsfunktion für das Leistungsdichtespektrum ist

$$|H(\omega)|^2 = T_0^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_0}{2\pi} \omega\right)$$

Das Leistungsdichtespektrum des Ausgangssignals des Integrators, und damit des rechten Integrals oben, ist dann

$$G_y(\omega) = \frac{E_s}{T_0} \frac{N_0}{2} T_0^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_0}{2\pi} \omega\right) = \frac{E_s N_0}{2} T_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_0}{2\pi} \omega\right)$$

Und die Gesamtleistung ist

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_s N_0}{2} T_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_0}{2\pi} \omega\right) d\omega = \frac{E_s N_0}{2}$$

(Das Integral kann über die Fouriertransformation ausgewertet werden)

Und endlich ist dann das (Leistungs-) SNR

$$\frac{S}{N} = \frac{E_s^2}{\frac{E_s N_0}{2}} = \frac{2 E_s}{N_0}$$

Das Effektivwert-SNR ist dann die Wurzel daraus.

Anmerkung: Die Auswertung des Integrals läuft über die Fouriertransformation, ich habe das hier nicht ausgeführt, weils einfach zu viel wäre.

11. Was wissen Sie über die Root-Raised Cosine Filterung?

Für eine optimale Übertragung sind zwei Filter nötig. Eines am Ausgang des Senders $H_T(\omega)$ zur Pulsformung, und eines am Eingang des Empfängers $H_R(\omega)$ zur Maximierung des SNR.

Als ideal für das Empfängerfilter hat sich die Form

$$H_R(\omega) = H_T(\omega)^*$$

(Korrelationsverhalten) herausgestellt (den Phasenterm lassen wir wieder weg).

Ein Optimalitätskriterium für die gesamte Strecke Transmitterfilter-Kanal-Empfängerfilter ist das Nyquist-Kriterium, das eine Gesamtübertragungsfunktion $H(\omega) = H_T(\omega) \cdot H_{\text{Kanal}}(\omega) \cdot H_R(\omega)$ mit ungeradem Verhalten bei der Eckfrequenz verlangt, um ein ISI-freies Signal zu erzeugen.

Vernachlässigen wir den Einfluss des Kanals (das Empfängerfilter ist aller Wahrscheinlichkeit nach viel dominanter, also $H_{\text{Kanal}}(\omega) \approx 1$), dann bleibt nur noch $H(\omega) = H_T(\omega) \cdot H_R(\omega)$ übrig. Es müssen also jetzt $H_T(\omega)$ und $H_R(\omega)$ so gewählt werden, dass das Nyquist-Kriterium erfüllt ist.

Ein einfacher Ansatz ist zu sagen, dass $H_T(\omega) = H_R(\omega)$ (verlangt ein reelles Filter, damit die erste Bedingung oben erfüllt ist), und dass $H(\omega)$ ein Fully Raised Cosine Filter darstellen soll.

Letzteres hat die Form:

$$H(\omega) = \begin{cases} 0 & |f| > 2 \cdot f_x \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{4f_x} f\right) & |f| \leq 2 \cdot f_x \end{cases} = H_T^2(\omega) = H_R^2(\omega)$$

Damit ist

$$H_T(\omega) = H_R(\omega) = \begin{cases} 0 & |f| > 2 \cdot f_x \\ \cos\left(\frac{\pi}{4f_x} f\right) & |f| \leq 2 \cdot f_x \end{cases}$$

Was der Wurzel aus der obigen Funktion entspricht, daher Root Raised Cosine Filter. (Bild 8.40 S.289).

9. Informationstheorie, Quellkodierung und Verschlüsselung

1. Leiten Sie den Informationsgehalt einer Nachricht her.

Der Informationsgehalt einer Nachricht ist keine naturgegebene oder direkt messbare Größe, sondern eine Konvention. Geboren wurde diese aus den folgenden Überlegungen:

- Der Informationsgehalt einer Nachricht hängt zusammen mit der Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens.
- Je höher die Wahrscheinlichkeit, dass eine Nachricht eintritt, je vorhersagbarer sie also ist, desto weniger Information enthält sie (Ich habe bei der schriftlichen EDyn-Prüfung nichts hingeschrieben und bekomme die Nachricht „durchgefallen“, da braucht man dann nix mehr dazusagen, weil ohnehin jeder weiß warum).
- Eine Nachricht mit $P(\text{message})=1$ enthält gar keine Information, weil sie sowieso sicher eintritt/immer da ist.
- Je niedriger die Wahrscheinlichkeit der Nachricht, sprich, je unvorhersehbarer sie ist, desto mehr Information trägt sie. (Ich habe bei der schriftlichen EDyn-Prüfung nichts hingeschrieben und bekomme die Nachricht „durchgekommen“, das würde wahrscheinlich einer ausführlichen Erklärung bedürfen).
- Eine Nachricht mit $P(\text{message})=0$ trägt unendlich viel Information, weil es unmöglich ist, dass sie eintritt.
- Besteht eine Nachricht aus zwei unabhängigen Einzelnachrichten, dann addiert sich deren Informationsgehalt.

Wir suchen also eine Funktion, die die Wahrscheinlichkeit mit dem Informationsgehalt verbindet, und zwar so, dass sie das Intervall $[0,1]$ auf \mathbb{R}^+ abbildet und $f(0)=\infty, f(1)=0$. Außerdem muss $f(P_1 \cdot P_2) = f(P_1) + f(P_2)$ sein.

Dieses Verhalten finden wir bei jedem Logarithmus. Es ist also der Informationsgehalt

$$I_m = -\log_x P(\text{message})$$

Es kann hier prinzipiell jede Basis für den Logarithmus verwendet werden, üblich ist die Basis 2 (führt auf den logarithmus dualis). Der Informationsgehalt hat dann die Einheit *Bit*.

$$I_m = -\log_2 P(\text{message}) [\text{Bit}]$$

2. Berechnen Sie und stellen Sie graphisch die Entropie einer binären Quelle dar.

Eine Signalquelle ist ein informationstheoretisches Objekt, das über einen bestimmten Satz von Symbolen verfügt und das diese Symbole (und NUR diese Symbole) auch in der einen oder anderen Form emittiert. Jedem dieser Symbole kann nun eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden, die angibt, wie häufig dieses Symbol auftritt. Man kann aber davon ausgehen, dass immer eines dieser

Symbole ausgegeben wird, d.h. $\sum_{i=\text{über alle Symbole}} P(S_i) = 1$ wobei S_i das i -te Symbol ist. Da jedem Symbol eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet ist, kann auch für jedes Symbol der Informationsgehalt angegeben werden zu $I(S_i) = -\log_2 P(S_i)$.

Die Entropie einer Signalquelle ist nun der durchschnittliche, von der Signalquelle emittierte Informationsgehalt.

$$H = \sum_{i=\text{über alle Symbole}} P(S_i) \cdot I(S_i) = \sum_{i=\text{über alle Symbole}} P(S_i) \cdot (-\log_2 P(S_i)) = \sum_{i=\text{über alle Symbole}} P(S_i) \cdot \log_2 \frac{1}{P(S_i)}$$

Einheit ist Bit pro Symbol.

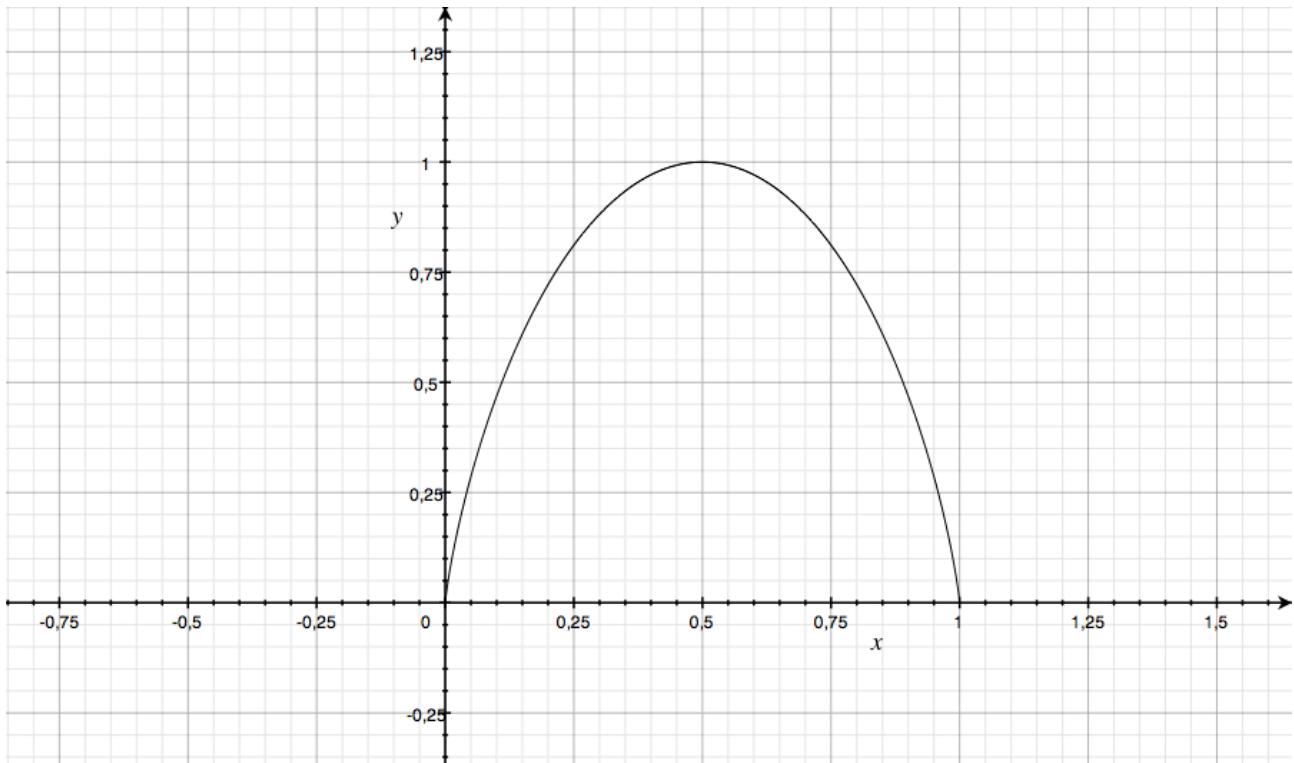
Eine binäre Quelle hat nur zwei Symbole, nämlich 0 und 1. Da $P(0) + P(1) = 1$ sein muss, kann folgende Vereinfachung gemacht werden

$$P(1) = p \rightarrow P(0) = 1 - p$$

Damit wird die Entropie der binären Quelle:

$$H = (1-p) \cdot \log_2 \frac{1}{1-p} + p \cdot \log_2 \frac{1}{p}$$

Graphische Darstellung:



Interpretation:

Für $p=0$ ist das Ausgangssymbol immer 0, es wird also keine Information getragen. Das selbe gilt für $p=1$, dann ist das Ausgangssymbol immer 1. Der Maximalwert der Entropie (also des durchschnittlichen, pro Symbol emittierten Informationsgehalts) wird erreicht, wenn $p=1/2$ ist, d.h. die beiden Symbole gleich wahrscheinlich sind.

3. Erklären Sie die Mechanismen, welche zum Informationsverlust auf Grund von Störungen führen. Hinweis: keine Gleichungen.

Werden die Symbole einer Signalquelle über einen Kanal übertragen, der störbehaftet ist, dann passiert es mit einer bestimmten, definierten Häufigkeit, dass Symbole falsch übertragen werden. Dies führt dazu, dass ein anderes Symbol am Empfänger ankommt, als am Sender gesendet wurde.

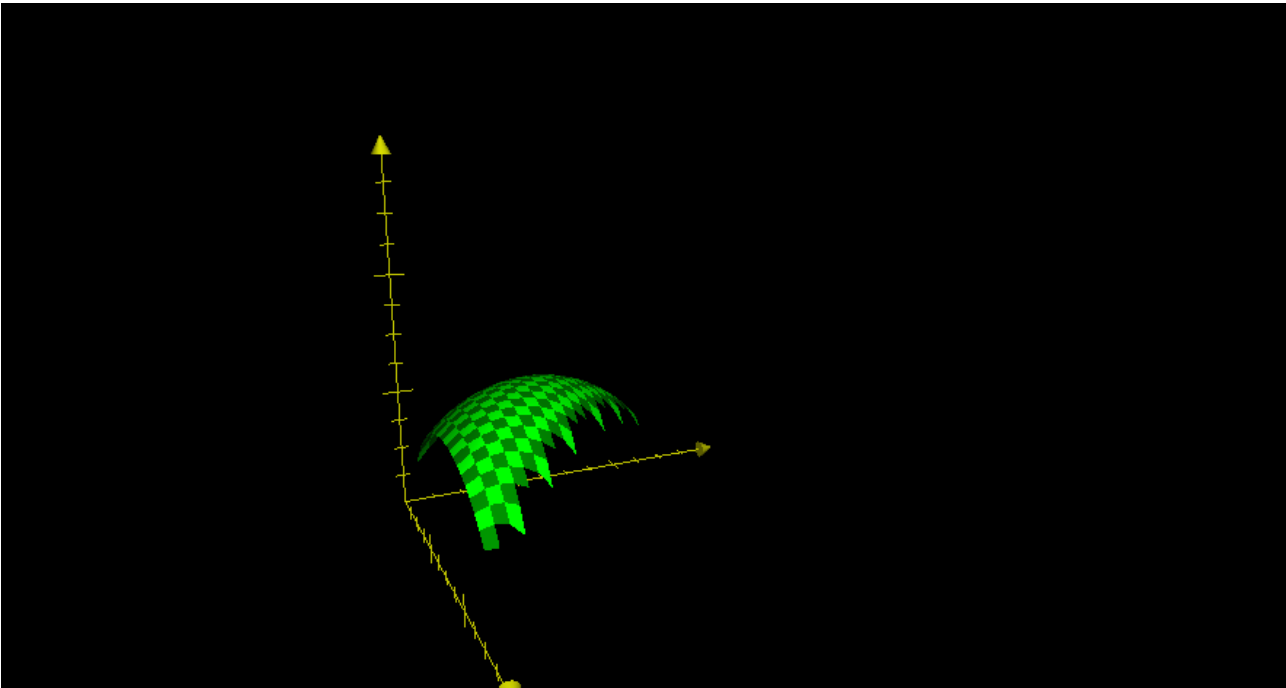
Der Informationsverlust, der damit einher geht hängt zusammen mit der bedingten Wahrscheinlichkeit, dass Symbol i gesendet wurde, falls der Empfänger Symbol j empfangen hat.

Bewertet man das für alle Symbolkombinationen mit der Wahrscheinlichkeit, dass ebendies eintritt und summiert es dann auf, dann erhält man den Betrag, um den die Entropie der Quelle gemindert wurde. Es lässt sich dann für die Übertragungstrecke eine *effektive* Entropie angeben, die natürlich kleiner ist als die Ausgangs-Entropie der Quelle.

4. Was wissen Sie über Quellkodierung?

Wir haben schon für die binäre Quelle gezeigt, dass deren Entropie einen Verlauf mit einem absoluten Maximum zeigt, das genau dort ist wo die Symbole gleich wahrscheinlich sind.

Ohne Beweis (Extremwertbestimmung kann jeder selber machen) kann man sagen, dass das auch für Quellen mit mehr als 2 Symbolen gilt (Im Bild eine Darstellung für 3 Variablen).



Es lässt sich also eine maximale Entropie $H_{max} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \cdot \log_2 N = \log_2 N$ definieren, die es zu erreichen gilt. Ist die Entropie einer Quelle maximal, dann sendet sie mit jedem Symbol die maximal mögliche Information aus. Weicht die Entropie der Quelle von diesem Idealwert ab (geht nur nach unten), dann lässt sich die Redundanz definieren als $R = H_{max} - H$ bzw. die Code-Effizienz als $\eta_{code} = \frac{H}{H_{max}} * 100[\%]$.

Für binäre Codes (Ein Code wird hier verstanden als genormter Satz von Symbolen, eine 0-1-Kombination ist in dem Fall jetzt ein eigenes Symbol) ist der Informationsgehalt eines Codewortes direkt ablesbar, nämlich dessen Länge in Bits. Es lässt sich dann H umschreiben auf

$$H = \sum_{i=1}^N P(i) \cdot l_i = L$$

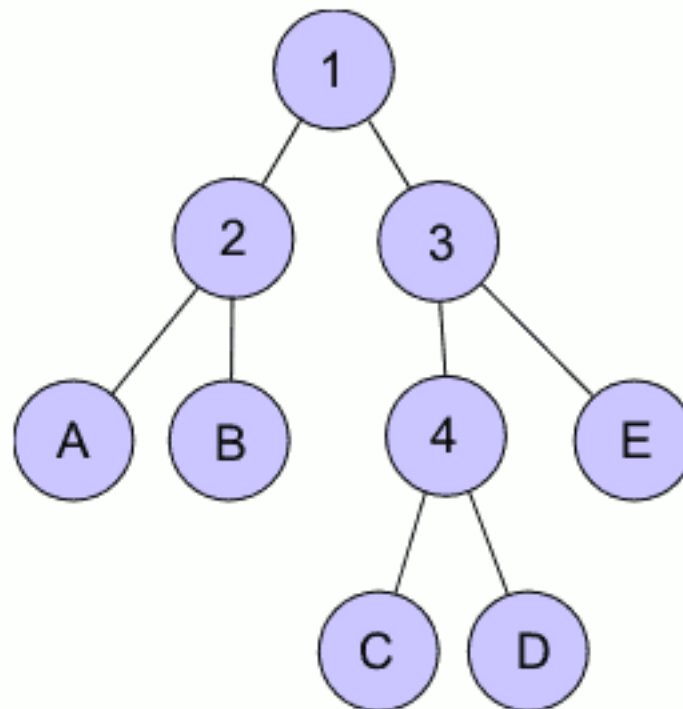
Ist also dann die „mittlere Codelänge“.

Achtung: Der letzte Teil weicht vom Buch ab, und zwar deshalb, weil ich glaube, dass das im Buch geschriebene (Gleichung 9.21) nicht stimmt.

Die Quellkodierung hat nun die Aufgabe, die Entropie (Also die Information pro Symbol/Codewort) zu maximieren. Dies wird realisiert, indem der (ineffiziente) Code der Quelle auf einen neuen, besseren Code abgebildet wird. Es wird dabei so vorgegangen, dass die Symbole des neuen Codes alle möglichst gleich wahrscheinlich sind. Bei binären Codes (die als Symbol dann nur 0 und 1 verwenden) wirkt sich das so aus, dass die Codewörter kürzer werden, je wahrscheinlicher sie sind.

5. Wie dekodiert man Codewörter variabler Länge?

Die Dekodierung von binären Codewörtern variabler Länge funktioniert über eine Entscheidungsstruktur, die als binärer Baum aufgebaut ist. (Bild Quelle Wikipedia)



Es wird von der Wurzel ausgegangen, und dann – je nachdem, ob die nächste Stelle eine 0 oder 1 ist – nach links oder nach rechts gegangen. Die Endpunkte des Baumes sind dann die Symbole. (Siehe auch Bild 9.4 S.307).

6. Welche Beispiele kennen Sie für Quellkodierung und worauf kommt es dabei an?

Als Vertreter für binäre Quellkodierung kann einmal der Huffman-Code genannt werden. Hier wird so vorgegangen:

Es wird einmal vorausgesetzt, dass ein Satz von Symbolen gegeben, und jedem Symbol eine Eintrittswahrscheinlichkeit zugeordnet ist. Diese Liste wird nun nach der Wahrscheinlichkeit sortiert aufgeschrieben. Im ersten Durchlauf geht man wie folgt vor.

1. Man nimmt die zwei unwahrscheinlichsten Symbole und vereint sie zu einem. Die Wahrscheinlichkeit der beiden addiert sich.
2. Erneutes Anschreiben der Liste mit der neuen Wahrscheinlichkeit, zurück zu 1

Dies wird so lange wiederholt bis alle symbole zusammengefasst sind, die Wahrscheinlichkeit ist dann 1. (Siehe Bild 9.5 S.309)

Nun wird in Umgekehrter Reihenfolge zurückgegangen.

1. Ausgehend von der Wurzel wird dem nicht kombinierten Symbol eine 1 und dem kombinierten eine 0 zugewiesen.
2. Das kombinierte Symbol wird jetzt als Wurzel betrachtet, zurück zu 1

Die Codewörter werden dadurch mit jedem schritt länger, bis der Vorgang wieder bei den Ausgangssymbolen angekommen ist.(Bild 9.6 S.309)

Auch der in der vorigen Frage erwähnte Binärbaum ist hier sehr schön ablesbar.

Andere Beispiele für Source-Coding sind das Fax-System. Hier werden Pixel einer Zeile in Gruppen zusammengefasst, eine bestimmte Anzahl aufeinanderfolgender weißer bzw. Pixel ist dann ein eigenes Symbol. Diese werden dann Huffman-codiert.

Source coding für Sprachsignale funktioniert meist so, dass die für die Sprachsignale charakteristischen spektralen Maxima (Formanten) in Höhe und Lage erfasst werden, und nur diese Information übertragen wird.

Bei Audio-Signalen wird das Hörverhalten des menschlichen Ohres ausgenutzt.

Und zu guter Letzt bei String-codierung, die davon ausgeht, dass in einem String sehr oft die selben Zeichenkombinationen wiederholt werden, wird zunächst eine Tabelle mit häufigen Zeichenkombinationen erstellt. Die Tabelleneinträge werden durchnummeriert und der String dann aus diesen Nummern aufgebaut.

10. Kanalkodierung

1. Welche Anforderungen richtet man an Kanalkodierung und welche Arten gibt es?

Die Anforderung, die an eine Kanalkodierung gerichtet wird ist, für gegebene Bandbreite und SNR des Übertragungskanals und begrenzte verfügbare Sendeleistung die Bitfehlerwahrscheinlichkeit zu senken. Dies geht auf Kosten von Übertragungseffizienz, da redundante Information mit übertragen wird. Es muss also ein Mittelweg zwischen BER (Bit Error Rate) auf der einen und Übertragungsgeschwindigkeit auf der anderen Seite gefunden werden.

Grundsätzlich gibt es zwei Arten von Kanalkodierung, nämlich ARQ und FECC.

ARQ (Automatic Repeat Request) baut redundante Information in den Datenstrom ein, um Fehler zu erkennen (Error Detection). Wird ein Fehler in einer Nachricht erkannt, dann wird diese vom Empfänger erneut angefordert.

Besonders auf langen Übertragungstrecken mit großer zeitlicher Verzögerung ist ARQ problematisch bis unmöglich einzusetzen. Hier kommt dann **FECC** (Forward Error Correction Coding) zum Einsatz. Bei dieser Variante wird mehr redundante Information in den Datenstrom eingebaut, es ist aber möglich, eine bestimmte Anzahl von Bit-Fehlern nicht nur zu erkennen sondern auch zu korrigieren (Error Correction).

2. Erklären Sie die Eigenschaften der wichtigsten ARQ-Verfahren

Grundsätzlich lassen sich zwei ARQ-Strategien identifizieren, die beide ihre Anwendungsgebiete haben: Stop&Wait und Continuous ARQ.

Stop&Wait ist die einfachere Variante (In der Datenkommunikation von Prof. Lindner war das die Idle-RQ Methode). Es wird ein Datenpaket gesendet, das einen sehr einfachen Code zur Fehlererkennung enthält. Dieses wird vom Empfänger überprüft, daraufhin sendet dieser eine positive bzw. negative Bestätigung an den Sender zurück. Danach erst wird das nächste Datenpaket gesendet. Bei negativer Bestätigung oder bei Timeout (keine Bestätigung innerhalb eines festgelegten Zeitraumes) wird die Nachricht wiederholt. Diese Methode hat den Vorteil, dass sie auf halb-duplex-Kanälen einsetzbar ist (In beide Richtungen betreibbar, aber nicht gleichzeitig). Der Protokollrahmen ist sehr einfach.

Continuous ARQ ist nur im Vollduplex-Betrieb einsetzbar. Hier sendet der Sender ein Datenpaket

nach dem anderen, ohne gleich auf Bestätigung zu warten. Gleichzeitig sendet der Empfänger die positiven bzw. negativen Bestätigungen für die erhaltenen Datenpakete an den Sender zurück. In der genauen Umsetzung gibt es wieder zwei verschiedene Strategien. Diese heißen go-back-N und selective Repeat.

Bei **go-back-N** trägt jedes Datenpaket eine Art Adresse, die wir hier mit N bezeichnen wollen. Eine (positive oder negative) Bestätigung für Datenpaket N, die vom Empfänger an den Sender zurückgesandt wird, bestätigt implizit auch den positiven Erhalt aller Datenpakete bis N-1 (nur falls Bestätigungen verloren gegangen sind). Bei Erhalt einer negativen Bestätigung oder bei Timeout stoppt der Sender die Übertragung der Datenpakete (die in der Zwischenzeit ja weitergelaufen ist) und fängt wieder bei dem entsprechenden Datenpaket an – daher der Name.

Einen anderen Ansatz verfolgt **selective repeat**. Hier werden nur jene Datenpakete noch einmal gesendet, die explizit vom Empfänger negativ bestätigt wurden. Dies erfordert beim Empfänger einen höheren Aufwand in Form von Bufferspeicher zur nachherigen Sortierung der empfangenen Datenblöcke.

3. Wodurch kommt der Schwelleneffekt in der Bitfehlerwahrscheinlichkeit kodierter Übertragungssysteme zustande?

Um die Problemstellung zu präzisieren: Es geht hier um das Bild 10.1 S.350. Es ist hier die Bitfehlerwahrscheinlichkeit über dem SNR aufgetragen. Der Effekt tritt nur bei FECC auf.

Von rechts kommend (wir denken uns die linke Kurve nach unten fortgesetzt) ist ersichtlich, dass bei gleichem SNR das codierte Signal eine viel niedrigere Bitfehlerwahrscheinlichkeit aufweist als das uncodierte. Bei Bewegung nach links fällt auf, dass die Bitfehlerwahrscheinlichkeit des codierten Signals viel schneller ansteigt, und ab einem gewissen Punkt dann plötzlich sogar über der des uncodierten Signals liegt. Dies liegt darin begründet, dass der Decoder – der darauf ausgelegt ist, eine gewisse Zahl von Fehlern zu *korrigieren* und eine etwas höhere zumindest zu *erkennen* – im Bemühen, die Fehler zu korrigieren nur noch mehr in den Datenblock einbaut.

4. Welche Güteparameter gibt es zur Beurteilung von Codes?

Als Ausgangspunkt sei gesagt, dass ein codiertes Wort immer mehr Bits hat als das Nutzdaten-Wort das es enthält. Im folgenden wird die Bitzahl des Codewortes mit n , die Anzahl der Nutzbits mit k bezeichnet.

Ein sehr wichtiger und grundlegender Parameter ist die sogenannte *Hamming-Distanz*. Wie schon gesagt gibt es in einem codierten Wort mehr Bits als „notwendig“. Es gibt also erlaubte 01-Kombinationen, und solche, die nur durch einen Fehler erzeugt werden. Die Hamming Distanz gibt nun an, wieviele Bits geändert werden müssen, um von einem erlaubten Codewort zu einem anderen erlaubten zu kommen. Dies ist von fundamentaler Bedeutung für die Aussage, wieviele Bitfehler erkannt bzw. korrigiert werden können.

Im Zusammenhang mit linear group codes ist auch das sogenannte Code-Gewicht interessant. Das Gewicht eines Codewortes ist einfach die Anzahl seiner 1-Bits. Schreibt man für alle Codewörter die Gewichte an, dann resultiert die Codestruktur.

Ein weiterer wichtiger Parameter ist die Rate oder Effizienz des Codes k/n .

5. Erklären Sie die Struktur und Eigenschaften von Blockcodes.

Bei Blockcodes wird für jedes Datenwort ein Codewort erzeugt. Den Gegenspieler bilden z.B. Faltungscodes, die die Daten über mehrere Codewörter „verschmieren“.

Ein (n,k) -Block-Codewort besteht aus k Informationsbits und $(n-k)$ redundanten Bits. Es gibt hier systematische und nicht systematische Codes. Systematisch bedeutet nichts anderes, als dass in einem Codewort die Informationsbits explizit, und die Paritätsbits auf Extraplätzen enthalten sind. Nicht systematische Codes würden die Informationsbits nur implizit enthalten, sie müssten erst herausgerechnet werden. Systematische Codes im engeren Sinne haben ein Feld mit Informations- und eines mit Paritätsbits, bei Systematischen Codes im weiteren Sinne sind diese gemischt.

Eine Verallgemeinerung des „Einserzählens“ um die Parität zu bestimmen von Bits auf Zahlen anderer Zahlensysteme ist die Modulo-Summe. Um diese zu bestimmen werden einfach alle Stellen aufsummiert, dann durch eine Zahl dividiert und der Rest als Ergebnis genommen. Für binäre Zahlen kommt das selbe heraus wie beim Einserzählen.

Beispiele für solche Codes sind z.B. ISBN (gewichtete Modulo-11 Summe), oder die Checksum des Internet Protocols (Modulo $2^{16}-1$).

Bei diesen Varianten, nämlich denen mit nur einer Paritätsstelle, kann ein aufgetretener Fehler nur erkannt, nicht aber korrigiert werden.

Es gibt auch Blockcodes, die die Lokalisierung und damit die Korrektur von Fehlern ermöglichen. Ein Beispiel ist der Zweidimensionale Row-Column-Array-Code (Bild 10.6 S.354). Hier werden die Daten in einem Array angeschrieben, die Paritätsbits werden dann jeweils für die Reihen und Spalten berechnet. Eine andere Variante ist die Einführung mehrerer Paritätsbits, die sich jeweils über einen eigenen Bereich des Datenwortes erstrecken (Bild 10.7 S.355). Jedes Datenbit kommt hier in zwei Paritätsbits unter.

Die Modulo-2-Summe kann für eine bessere Formalisierung auch als Symbol \oplus angeschrieben werden.

6. Leiten Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit eines Codewortes für einen Blockcode her.

Bei Verwendung eines Codes, der üblicherweise eine bestimmte Anzahl von Fehlern erkennen bzw. korrigieren kann, stellt sich oft die Frage, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass eben mehr Fehler auftreten, als der Code verkraftet.

Um dies zu berechnen benötigen wir als Eigenschaft des Kanals nur die Wahrscheinlichkeit für einen Bitfehler P_e . Nun lässt sich zunächst die Wahrscheinlichkeit angeben, dass genau j Fehler in dem n -stelligen Codewort eintreten

$$P(j \text{ errors}) = P_e^j \cdot (1 - P_e)^{n-j} \cdot {}^n C_j$$

Diese ist also gleich der Wahrscheinlichkeit, dass j Bits umfallen mal der, dass $(n-j)$ unbeschadet bleiben mal der Anzahl der Möglichkeiten, die j Fehler auf die n Bits aufzuteilen. In sofern kann der letzte Faktor als Binomialkoeffizient identifiziert werden

$${}^n C_j = \binom{n}{j} .$$

Nun brauchen nur noch die Fehler von 0 bis R aufsummiert werden, mit R als der Anzahl von Fehlern, die gerade noch erkannt wird, dann haben wir die Wahrscheinlichkeit, dass das Codewort korrekt verarbeitet werden kann. Die Wahrscheinlichkeit für das Versagen des Codes ist dann Eins minus diesem Ergebnis.

$$P(\text{fail}) = 1 - \sum_{j=0}^R P(j \text{ errors})$$

Für sehr große Wortlänge n kann das Codewort als Ensemble und die einzelnen Bits als Stichproben betrachtet werden. Es kann dann die wahrscheinliche (=durchschnittliche) Anzahl defekter Bits mit $n \cdot P_e$ angegeben werden.

7. Welche Eigenschaften haben lineare Gruppencodes und welche Codes gehören zu linearen Gruppencodes?

Lineare Gruppencodes tragen ihren Namen, weil ihre Codewörter als Menge betrachtet die Eigenschaften einer mathematischen Gruppe haben:

- Gegeben ist eine Menge, und eine Operation, die zwei Elemente dieser Menge verknüpft.
- Das Ergebnis dieser Verknüpfung ist wieder ein Element der Menge .
- Es existiert ein neutrales Element, sodass die Verknüpfung mit einem zweiten Element als Resultat eben dieses zweite Element ergibt.
- Es existiert zu jedem Element ein inverses Element, das Verknüpft mit dem Ausgangselement das neutrale Element gibt.

Im Fall der Gruppencodes sind die Mengenelemente n -Codewörter und die Verknüpfung ist die *bitweise* Modulo-2-Summe und das neutrale Element ist das 0-Codewort (alle Bits = 0). Wir haben also einen Code bestehend aus den Codewörtern C_i mit $C_i \oplus C_j = C_k$ und $C_i \oplus C_0 = C_i$. Witziger weise ist $C_i \oplus C_i = C_0$ (siehe die Eigenschaften der bitweisen Modulo-2-Addition = XOR), es ist also jedes Element gleichzeitig sein eigenes inverses Element.

Beispiele für Group-Codes sind Bose-Chaudhuri-Hocquenghem (BCH)-Codes bei Binärzahlen und deren nichtbinäres Gegenüber, die Reed Solomon-Codes.

Eine sehr wichtige Eigenschaft der linearen Group Codes ist die einfache Abschätzbarkeit der Performance des Codes. Um dies zu zeigen stellen wir die folgende Überlegung an.

Die Performance (im Sinne von Fehlererkennung) eines Codes hängt zusammen mit der minimalen Hammingdistanz der Codewörter. Bei einem linearen Gruppencode errechnet sich jedes Codewort aus der bitweisen XOR-Verknüpfung zweier anderer Codewörter. Ein XOR kann nun auch so angesehen werden, dass, wenn das eine Bit 0 ist, das andere einfach durchgeschaltet wird, und wenn das eine Bit 1 ist, das andere invertiert wird.

Die *Distanz* zwischen zwei Codewörtern (also die Anzahl der zu invertierenden Bits) muss also gleich dem *Gewicht* eines dritten Codewortes sein. Da dies für alle Codewörter gilt, brauchen wir also zur Ermittlung der minimalen Hamming-Distanz nicht jedes Codewort mit jedem anderen vergleichen, so wie bei anderen Codes, sondern wir müssen uns nur die Gewichtsstruktur des Codes anschauen und das minimale Gewicht (also die minimale Anzahl von 1en in einem Codewort) suchen.

8. Was wissen Sie über den Hamming-Bound?

Der Hamming-Bound ist eine Ungleichung, die die Anzahl der Nutzdatenbits, die Gesamtanzahl der Bits und die Anzahl der korrigierbaren Bits miteinander verknüpft. Er gibt also z.B. eine Obergrenze für die Performance eines Codes vor, oder gibt für eine bestimmte Performance und

definierte Zahl Nutzdatenbits eine Untergrenze für die Codelänge (je nachdem, was vorgegeben und was gefragt ist).

Geboren wird der Zusammenhang aus folgender Überlegung:

Es liegt ein (n,k) Code vor, es gibt also 2^n mögliche Bitkombinationen, von denen 2^k unverfälschte Codewörter sind. Alle anderen entstehen durch Fehlereinflüsse. Es existieren nun Bitkombinationen, die zu *einem* der erlaubten Codewörter eine geringere Distanz aufweisen als zu allen anderen. Die Nearest-Neighbour-Decodierung nimmt nun an, dass diese falschen Kombinationen aus ebendiesem nächsten Nachbar entstanden sind, was diese Fehler eben korrigierbar macht (es wird einfach die falsche Bitkombination auf das Codewort zurückgeführt, zu dem es den geringsten Abstand hat). Weiters gibt es aber auch noch Bitkombinationen, die zu mehreren erlaubten Codewörtern die gleiche Distanz haben, diese können nicht korrigiert werden.

Dieser Sachverhalt kann in einer Tabelle anschaulich gemacht werden, siehe Bild 10.11 S.359. Hier sind die erlaubten Codewörter in der obersten Reihe angeschrieben. Zu jedem Codewort werden dann die korrigierbaren Bitkombinationen in Spalten daruntergeschrieben. Außerhalb der Tabelle befinden sich die nicht korrigierbaren Kombinationen.

Sehen wir uns die Tabelle an, dann können wir davon ausgehen, dass die Anzahl der sich darin befindenden Bitkombinationen $N_{Tabelle} \leq 2^n$, also maximal die Gesamtanzahl der möglichen Bitkombinationen ist, je nachdem ob sich auch welche außerhalb befinden. Es ist klar, dass sich $N_{Tabelle}$ aus der Zahl der Spalten mal der Zahl der Reihen ergibt. Die Zahl der Spalten ist klar, das ist die Zahl der erlaubten Codewörter 2^k . Die Anzahl der Reihen können wir durch Überlegung ermitteln. Zunächst brauchen wir eine Reihe für die Codewörter selbst. Dann brauchen wir $\binom{n}{1} = n$ Reihen für einen Fehler, $\binom{n}{2}$ Reihen für zwei Fehler, ..., und $\binom{n}{t}$ Reihen für die maximale Anzahl von erkennbaren Fehlern.

Es ist also $N_{Tabelle} = \left(1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{t}\right) \cdot 2^k \leq 2^n$. Durchdividieren führt dann auf den Hamming bound:

$$2^k \leq \frac{2^n}{1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{t}}$$

Wer die Schreibweise im Buch bevorzugt, kann auch die nehmen. (Gleichung 10.4, S.359)

9. Geben Sie eine Möglichkeit an, wie man die Codewörter eines linearen Gruppencodes systematisch konstruiert.

Im Buch steht da leider überhaupt nichts darüber. Es wird die Generatormatrix beschrieben (siehe nächste Frage), aber die funktioniert für alle Blockcodes. Sorry.

10. Wie dekodiert man einen linearen Gruppencode mit Hilfe eines Syndroms?

Genauso wie jeden anderen. Also ich weiß nicht, wieso diese Frage extra für lineare Gruppencodes gestellt wird, die Syndrom-Decodierung funktioniert meiner Meinung nach für alle systematischen Blockcodes (?).

Zunächst zur **Matrixdarstellung**.

Die Bits des Codewortes wird aus dem Datenwort mittels Modulo-2 Summe mehrerer Bits gebildet. Ein Beispiel ist der Block-Code Aus Bild 10.8 S.355. Die ersten vier Bits sind hier die Datenbits und die letzten drei sind die Paritätsbits. Diese Vorschrift kann auch als Gleichungssystem

angeschrieben werden mit:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= D_0 \\
 C_1 &= D_1 \\
 C_2 &= D_2 \\
 C_3 &= D_3 \\
 C_4 &= D_0 \oplus D_2 \oplus D_3 \\
 C_5 &= D_0 \oplus D_1 \oplus D_3 \\
 C_6 &= D_0 \oplus D_1 \oplus D_2
 \end{aligned}$$

oder genauer

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 1.D_0 \oplus 0.D_1 \oplus 0.D_2 \oplus 0.D_3 \\
 C_1 &= 0.D_0 \oplus 1.D_1 \oplus 0.D_2 \oplus 0.D_3 \\
 C_2 &= 0.D_0 \oplus 0.D_1 \oplus 1.D_2 \oplus 0.D_3 \\
 C_3 &= 0.D_0 \oplus 0.D_1 \oplus 0.D_2 \oplus 1.D_3 \\
 C_4 &= 1.D_0 \oplus 0.D_1 \oplus 1.D_2 \oplus 1.D_3 \\
 C_5 &= 1.D_0 \oplus 1.D_1 \oplus 0.D_2 \oplus 1.D_3 \\
 C_6 &= 1.D_0 \oplus 1.D_1 \oplus 1.D_2 \oplus 0.D_3
 \end{aligned}$$

In der (uns bekannten) Matrix-Schreibweise kann dies angeschrieben werden als

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

$$c = Gd$$

(Die Schreibweise im Buch ist halt um 90° gedreht. Ich mag keine Zeilenvektoren)

Eine Parity-Check-Matrix erhalten wir aus der selben Überlegung. Es wird die Parität des Datenwortes berechnet und dann mit dem entsprechenden Parity Bit Modulo-2 Summiert. Das Ergebnis ist dann bei Multiplikation mit dem Codewort der Vektor, dessen Elemente 0 sind, sofern kein Fehler aufgetreten ist. Dies ist der Syndrom-Vektor

Für unser Beispiel:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}$$

Über eine Tabelle wird jetzt jedem Syndrom ein Fehlermuster zugeordnet, das dieses Syndrom am wahrscheinlichsten ausgelöst hat. Auf dessen Basis kann jetzt eine Korrektur durchgeführt werden.

11. Wie wird ein Informationswort durch einen zyklischen Code codiert und decodiert? Welche Eigenschaften besitzt der zyklische Code?

Für zyklische Codes wird eine Polynom-Darstellung der Binärzahlen verwendet.

Zunächst wird die Nachricht mit den Bits m_0, m_1, \dots, m_{k-1} (m_0 als LSB, $k-1$ weil die Nachricht k Bits enthalten soll) dargestellt als Polynom.

$$M(x) = m_{k-1}x^{k-1} + m_{k-2}x^{k-2} + \dots + m_2x^2 + m_1x + m_0$$

Vielleicht als Merkhilfe: Wenn alle Koeffizienten des Polynoms nur 0 oder 1 sein können (und das ist ja bei uns der Fall) und $x=2$ ist, dann ist M die Zahl, die von dem Binärwort dargestellt wird.

Nun wird ein zweites Polynom $P(x)$ – das Generatorpolynom – eingeführt. Dieses kennzeichnet den jeweiligen Code und ist vorgegeben.

$$P(x) = p_lx^l + p_{l-1}x^{l-1} + \dots + p_1x + p_0$$

Das Verfahren ist nun das folgende:

1. Wir nehmen die Ordnung des Generatorpolynoms (hier l) und erhöhen die Ordnung des Message-Polynoms um diese (also multiplizieren mit x^l)
2. Wir führen eine Polynomdivision durch indem wir das erweiterte Message-Polynom durch das Generatorpolynom dividieren
3. Wir nehmen den Rest dieser Division und hängen ihn an das erweiterte Message-Polynom an.

Das entstandene Polynom ist dann das Codewort. Gut.

Jetzt nochmal das Ganze, aber mit den Binärzahlen. M ist hierbei die Message-Bitkombination und P die Generator-Bitkombination:

1. Wir hängen an M so viele Nullen an, wie P breit ist - 1. Ich nenne das Ergebnis jetzt mal M' .
2. Wir dividieren M' durch P . Dividieren heißt hier, so oft ein XOR aus P und den höchsten Stellen von M' bilden, bis eine Zahl herauskommt, die kleiner als M' ist. Siehe Buch, Bsp. 10.5, S.365/366.
3. Wir nehmen den erhaltenen Rest und hängen ihn an die ursprüngliche Nachricht an. (Das resultierende Codewort muss genau so lang werden, wie M' , also muss der Rest genau um 1 Bit schmaler sein als P , bei Bedarf also 0en einfügen)

Die entstandene Bitkombination ist unser Codewort.

Im Buch wird bei dem Beispiel die zweite Betrachtung verwendet, ich glaube übersichtlicher und logischer ist die erste. Je nachdem, ob man Polynomdivisionen mag oder nicht.

Zur Dekodierung bzw. Fehlererkennung wird jetzt das erhaltene Codewort wieder durch das Generatorpolynom dividiert, so wie oben. Der Rest dieser Division hat die Eigenschaften eines Syndroms (0 bei keinem Übertragungsfehler, Fehler aus Tabelle ermittelbar).

12. Was wissen Sie über Interleaving?

Sowohl bei Übertragungen, als auch bei Speichermedien (z.B. CDs) können im Datenstrom länger anhaltende Fehler auftreten (Kratzer, bzw. Einstreuungen). Diese würden bei normaler Übertragung ein ganzes Datenwort, bzw. einen ganzen Datenblock wenn viele Bits in einen Prüfbereich fallen,

zerstören. Das würde natürlich zu nicht korrigierbaren Fehlern führen, da sowohl die kompletten Daten als auch die Prüfbits zerstört werden.

Eine Strategie gegen solche Fehler ist, den lange anhaltenden Fehlerzustand auf mehrere Datenblöcke aufzuteilen. Dies wird dadurch erreicht, dass die Datenblöcke zerteilt und durcheinander gesendet werden (manchmal wird auch von scrambling gesprochen). Diese Strategie heißt Interleaving.

Ein Beispiel für Interleaving ist in Bild 10.17 S.369 ersichtlich. Hier werden die einzelnen Blockteile (können einzelne Bits oder mehrere sein) spaltenweise in ein Array geschrieben und zeilenweise wieder ausgelesen.

13. Was wissen Sie über die Codierung mit Hilfe eines Faltungscodes?

Ein Faltungs-Codierer verhält sich ähnlich einem transversalen Filter in der digitalen Signalverarbeitung. Der Output des Codierers kann dargestellt werden als Faltung des Eingangssignales mit der Impulsantwort des Filters, daher der Name. Faltungscodes unterscheiden sich also grundlegend von Blockcodes.

Nun aber zum konkreten Aufbau. Ein Faltungs-Codierer besteht immer aus einem Schieberegister und mehreren XOR-Verknüpfungen, die für ein Ein-Bit-Eingangssignal ein Mehr-Bit-Ausgangssignal erzeugen. Siehe dazu Bild 10.18 S.370.

Es kann nun jeder der Ausgänge des Codierers als Polynom dargestellt werden, für das Beispiel aus dem Buch wäre das $B_0 = 1 + x^2$ und $B_1 = 1 + x$ mit x als Verzögerung. Jedes Bit wirkt sich also so lange auf den Ausgang des Codierers aus, so lange es sich in dem Schieberegister befindet.

Da der Codierer über Speicher und kombinatorische Logik verfügt (zum Glück nicht rückgekoppelt) kann er auch als State-Machine beschrieben werden. Der Status, in dem sich diese befindet, wird durch ihre Speicher (im Bild die letzten beiden Stellen des Schieberegisters, die erste Stelle ist ja kein Speicher, da sie sich sofort mit dem Eingangssignal ändert) mit $2^{\text{Anzahl Speicher}}$ festgelegt. Achtung, die States sind nicht die Ausgangsbits. Diese hängen von dem State und dem Eingangssignal ab. Die State Machine kann nun auf mehrere Arten beschrieben werden.

Das **Baum-Diagramm** entsteht, indem ausgehend von dem Anfangszustand, mit dem Eingangssignal als Parameter, ein binärer Baum aufgebaut wird (Bild 10.19 S.370). Im Anfangszustand ist nur ein Status für die State Machine möglich, im zweiten Schritt sind es zwei, im nächsten vier, dann acht, 16, ... Dies steht nicht im Widerspruch zu der Aussage, dass die State-Machine aus unserem Beispiel nur $2^{\text{Anzahl Speicher}} = 4$ States einnehmen kann. Die States kommen nur mehrfach vor.

Das **Trellis Diagramm** ist eine ähnliche Darstellung wie das Baum-Diagramm, hier werden allerdings nur die (vier) Zustände der State-Machine dargestellt. Im Bild 10.20 S.371 ist dies für die Beispiel-State-Machine getan. Die Zustände a,b,c,d repräsentieren den Speicherinhalt (a=00, b=10, c=01, d=11). Die Pfeile sind mit dem Output beschriftet, der während dieses Übergangs ausgegeben wird. (Da das Eingangssignal den Ausgang mitbestimmt hängt dieser immer von dem gegenwärtigen Zustand und auch von dem, zu dem die SM übergehen wird, ab)

Das **State Transition Diagramm** zeigt nun die vier Zustände der Maschine als Punkte, und die Übergänge, die Passieren können sowie die zugehörigen Outputs.

14. Wie decodiert man einen Faltungscode?

Ein Faltungscode kann generell am besten über das Trellis-Diagramm decodiert werden. Es wird

dabei ein Ausgangszustand angenommen, und dann der Pfad, den die Coder-State Machine wahrscheinlich genommen hat, durch Auswertung der empfangenen Daten gezeichnet. Aus diesem Pfad lässt sich dann das Eingangssignal rekonstruieren.

Von jedem Zustand ausgehend können nur zwei andere Zustände angenommen werden, es gibt also immer nur zwei erlaubte Bitkombinationen zu jedem Zeitpunkt, die sich ständig ändern. Ein Bitfehler führt dann (möglicherweise gleich, sonst in einem der nächsten Schritte) auf eine nicht erlaubte Bitkombination.

15. Was wissen Sie über den Viterbi-Algorithmus?

Der Viterbi-Algorithmus ist der beliebteste Algorithmus für die Fehlererkennung bzw. -korrektur bei Faltungscodes.

Der Ablauf ist so simpel wie genial. Zunächst wird das Eingangssignal vollständig empfangen. Dann wird jeder mögliche Pfad im Trellis-Diagramm durchfahren und sein Hamming-Abstand zum Eingangssignal berechnet. Zum Schluss wird der Pfad, der den geringsten Hamming-Abstand aufweist (und dessen zugehöriges Eingangssignal) als der Richtige bzw der Überlebende (Survivor) angenommen. Haben zwei Pfade den selben Hamming-Abstand, dann wird der Fehler zwar erkannt, kann aber nicht beseitigt werden. Bei Übertragungen, wo ein Ergebnis her muss, wird dann halt zufällig einer ausgewählt.

Noch einmal das Verfahren an einem Beispiel. Wir haben noch einmal den Encoder von Bild 10.18 S.370.

Wir empfangen (Beispiel 10.6) die Bitkombination 1010001010. Die ersten sechs Bits repräsentieren dabei die drei Datenbits, die letzten 4 Bits kommen von zwei 0-Bits, die eingefügt wurden um den Coder wieder in den Ausgangszustand zu versetzen.

Ausgehend vom Ausgangszustand gibt es zwei mögliche Wege. Eine 0 als Eingangssignal würde den State nicht verändern, er würde a (00) bleiben. Ausgangssignal wäre 00. Eine 1 als Eingangssignal würde das Ausgangssignal 11 liefern, der nächste Zustand wäre b (10). Das Eingangssignal ist aber 10, also haben beide Pfade schon einmal die Hamming-Distanz 1.

Im zweiten Schritt würde ein Eingangssignal 0 nun ausgehend von Zustand a das Ausgangssignal 00 liefern und auf Zustand a führen. Dieser Weg hat wieder Hamming Distanz 1. Mit einer 1 kämen wir auf b, das Ausgangssignal wäre 11 (ebenfalls HD=1). Wären wir vorhin in Zustand b gelandet, dann hätte eine 0 auf das Ausgangssignal 01 und den Zustand c geführt (HD=2), eine 1 auf Ausgang 10 und Zustand d (HD=0).

So geht die Sache jetzt weiter, in jedem Schritt verdoppelt sich die Anzahl der möglichen Pfade, und für jeden Pfad wird die Hamming-Distanz aufsummiert.

Am besten macht man sich das in einem Trellis-Diagramm anschaulich.

Das größte Problem des Viterbi-Algorithmus ist die schiere Anzahl von möglichen Pfaden, die entsteht. Ein Ansatz, der dieses Problem zu minimieren sucht ist das Sequential Decoding.

11. Bandpassmodulation eines Trägersignales

1. Was wissen Sie über OOK?

OOK (On-Off-Keying) ist eine Spezialform von BASK (Binary Amplitude Shift Keying) und bedeutet das ein- und ausschalten eines bestimmten Trägersignales in Abhängigkeit von dem zu übertragenden Signal. Trägersignale können Sinusschwingungen, aber auch Gleichspannung sein (Grenzfall für Frequenz Null). In Abbildung 11.1 S.392 Sind dazu alle relevanten Bilder gezeigt.

Modellierbar ist dies als Multiplikation des Nutzsignals (das dargestellt wird als 0-1-Rechtecksignal) mit dem Trägersignal (Sinusschwingung). Im Frequenzbereich bedeutet das eine

Faltung des (bereits besprochenen) Spektrums des Rechtecksignals mit dem Spektrum des Sinus-Trägers (Jeweils eine Dirac-Nadel bei der Frequenz des Sinus im positiven und im negativen Frequenzbereich). Allein aus dem Bild lässt sich schon erkennen, dass durch die Frequenzverschiebung das modulierte Signal jetzt die doppelte Bandbreite aufweist verglichen mit der Basisbandmodulation.

2. Vergleichen Sie kohärente und inkohärente Empfänger.

Kohärente Detektoren i.Gs. zu inkohärenten Detektoren heißt ja, dass erstere neben der Signalamplitude des Eingangssignals auch die Signalphase berücksichtigen. Bei kohärenten Verfahren wird also aus dem Signal mehr Information extrahiert und daher haben diese auch eine niedrigere Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei gleichem Signal-Rausch-Abstand.

Realisierungen von kohärenten Detektoren sind (Bild 11.2 S.393) der Matched Filter Detektor und der Korrelationsdetektor. Diese wurden schon eingehend Diskutiert.

Inkohärente Detektoren gehen so vor, dass sie zunächst aus dem Bandpasssignal das Basisbandsignal extrahieren und dann eine Mittelpunkts- oder integrative Detektion durchführen. Ein Beispiel ist der Hüllkurvendetektor (Teilbild d) der zunächst eine Filterung (erhöht die Carrier to Noise Ratio) und dann eine Gleichrichtung des Signals durchführt. Ein komplexeres, aber sehr Frequenzselektives Beispiel ist der inkohärente Quadratur Detektor (Teilbild e). Hier wird das Eingangssignal mit zwei orthogonalen Sinusschwingungen korreliert (sprich multipliziert und dann integriert). Das Ergebnis ist die Amplitude der Teilschwingung des Eingangssignals, die genau die Trägerfrequenz hat, projiziert auf die beiden orthogonalen Phasenlagen. Diese beiden Werte werden noch quadriert und dann addiert (also Pythagoras). Es Resultiert dann genau die Amplitude jener Teilschwingung des Eingangssignals, die die Frequenz des Trägersignals hat.

Es ist offensichtlich so, dass inkohärente Detektoren einfacher in der Realisierung sind, und das Eintreffen des Eingangspulses zum richtigen Zeitpunkt keine so große Rolle spielt wie bei kohärenten Detektoren. Erstere Aussage mag für den Quadratur-Detektor falsch erscheinen, es ist aber zu beachten, dass diese Detektoren nicht analog sondern digital ausgeführt werden, was die Realisierung sehr vereinfacht.

3. Leiten Sie eine Formel für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für OOK-Modulation her.

Im Buch wird hier die Formel für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit eines kohärenten Detektors berechnet.

Zunächst ist die Frage, wie hoch der Signal-Rausch-Abstand am Ausgang des korrelativen Detektors zum Entscheidungszeitpunkt ist. Diese Frage haben wir bereits beantwortet (Frage 10 aus

Kapitel 8). Das Ergebnis lautet $\frac{S}{N} = \frac{2 E_s}{N_0}$.

Nun wird zum Entscheidungszeitpunkt ja nichts anderes gemacht, als bei der Centerpoint-Detection einer Basisbandmodulation. Wie hierfür die Bitfehlerwahrscheinlichkeit mit dem Signal-Rausch-Abstand zusammenhängt haben wir auch schon untersucht (Kapitel 6 Frage 3). Das Ergebnis hier ist:

$$P_e = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{N}} \right) \right)$$

Setzen wir das erste Ergebnis in das zweite ein, dann resultiert:

$$P_e = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \right) \right)$$

$$P_e = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \right) \right)$$

Anmerkung: Die folgende Argumentation mit dem Mittelwert ist mir nicht sonderlich einleuchtend, ich übernehme sie mangels Zeit.

Die Argumentation setzt sich nun so fort, dass Die Signalenergie E_s als Mittelwert der Energien der beiden möglichen Symbole berechnet wird. $E_s = \langle E \rangle$. Die mittlere Leistung des Trägers ist nun diese mittlere Energie geteilt durch die Zeit, die ein Symbol zur Verfügung hat T_0 , also

$C = \langle E \rangle / T_0$. Die Rauschleistungsdichte ist konstant, das Rauschen im Spektrum auf die Bandbreite des Signals beschränkt. Die Rauschleistung ist dann $N = N_0 \cdot B$. Der in der Bitfehlerwahrscheinlichkeitsformel vorkommende Quotient wird dann zu:

$$\frac{\langle E \rangle}{N_0} = \frac{C \cdot T_0}{N/B} = T_0 B \frac{C}{N}$$

Damit lässt sich die Bitfehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Träger-Rausch-Abstand definieren:

$$P_e = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{T_0 B C}{2 N}} \right) \right)$$

4. Was wissen Sie über die BPSK?

Bei BPSK (Binary Phase-Shift Keying) wird in Abhängigkeit von dem zu übertragenden Signal die Phase des Trägersignals geändert, Amplitude und Frequenz bleiben gleich.

Die einfachste Form von BPSK ist PRK (Phase-Reversal Keying). Hier wird die Phase um 180° gedreht, was einer Inversion des Trägers entspricht.

Eine PRK-Modulation kann mathematisch modelliert werden, indem das Datensignal dargestellt wird als mittelwertfreies Rechtecksignal (Zustände -1 und +1). Das Trägersignal wird dann mit diesem Datensignal multipliziert.

Im Spektralbereich entspricht dies wieder der Faltung des (bekannten) Spektrums einer NRZ-Basisbandmodulation mit dem Spektrum eines Sinussignals. Alle wesentlichen Bilder werden in Bild 11.3 S.396 gezeigt.

Im Gegensatz zur OOK ist hier nur kohärente Dekodierung möglich.

5. Leiten Sie eine Formel für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für BPSK-Modulation her.

Hier kann wieder die selbe Argumentation verwendet werden wie in Frage 3. Wir setzen wieder den SNR für korrelative Detektoren zum Entscheidungszeitpunkt $\frac{S}{N} = \frac{2E_s}{N_0}$ ein, nur diesmal in die Formel für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei *bipolaren* NRZ-Signalen

$$P_e = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{S}{N}} \right) \right) .$$

Das Ergebnis ist:

$$P_e = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \right) \right)$$

Oder, so wie in Frage 3 zurückgeführt auf den Träger-Rausch-Abstand

$$P_e = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{T_0 B \frac{C}{N}} \right) \right)$$

Eine BPSK mit einem Winkel kleiner als 180° kann dargestellt werden als Summe aus einer konstanten Sinusschwingung und einer PRK.

Aus geometrischen Überlegungen (Zeigerdiagramm) kann abgeleitet werden, dass die Amplitude des modulierten Teils um einen Faktor $m = \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$ kleiner sein wird, als die Gesamtamplitude des Signals. In der Signalleistung schlägt sich dies natürlich mit m^2 nieder, die resultierende Bitfehlerwahrscheinlichkeit liegt dann bei

$$P_e = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf} \left(m \sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \right) \right)$$

6. Was wissen Sie über BFSK?

Bei BFSK (Binary Frequency-Shift Keying) wird die Frequenz des Trägersignals in Abhängigkeit des Übertragungssignals geändert, Amplitude und Phase bleiben gleich.

Die mathematische Modellierung ist überraschend einfach, es wird das Datensignal wieder als unipolares NRZ-Basisbandsignal dargestellt (sprich On Off Keying). Das Trägersignal 1 wird mit dem Datensignal direkt multipliziert, das Trägersignal 2 wird mit dem logisch invertierten Datensignal multipliziert. Dies hat den Effekt, dass Träger 1 bei Symbol 1 eingeschaltet und bei Symbol 0 abgeschaltet ist, und Träger 2 bei Symbol 1 abgeschaltet und bei Symbol 0 eingeschaltet ist.

Im Spektrum äußert sich dies als Faltung des Datensignals mit Träger 1 plus Faltung des Datensignals mit Träger 2. Bild 11.6 S.399 zeigt alle wesentlichen Bilder.

7. Welche Verfahren kennen Sie für die Trägerrückgewinnung?

Zunächst muss unterschieden werden zwischen Signalen, die eine Dirac-Linie bei der Trägerfrequenz im Spektrum haben – d.h. das Trägersignal praktisch mitführen – und solchen, die das nicht haben.

Sowohl bei BASK, als auch bei BFSK sind die „Modulationssignale“ unipolare NRZ-Rechtecksignale, die eine Dirac-Nadel im Ursprung aufweisen. Durch die Multiplikation mit dem Trägersignal kommt diese dann bei der Trägerfrequenz zu liegen. Auch BPSK-Signale, mit einem Winkel von kleiner 180° haben einen konstanten Trägersignanteil dabei, wie oben festgestellt. Bei diesen Signalen kann der Träger einfach mittels einer PLL oder einem Filter extrahiert werden.

Bei PRK ist dies nicht mehr so einfach möglich, da dieses Verfahren auf einer Modulation mit einem bipolaren Rechtecksignal basiert, das keine Dirac-Nadel im Ursprung hat. Hier muss zu nichtlinearen Verfahren gegriffen werden. Im Buch sind zwei Verfahren für die Trägerrückgewinnung bei PRK beschrieben.

Das erste Verfahren quadriert das PRK-Signal, was die Modulation zunächst rückgängig macht (die ist ja darstellbar als Multiplikation mit +1/-1, was bei Quadrierung das selbe Ergebnis gibt). Heraus kommt ein Sinus Signal mit der doppelten Frequenz. Dieses wird dann über eine PLL in der Frequenz halbiert, um 90° phasenverschoben (passiert durch die Quadrierung) und dem Demodulator zugeführt.

Die PLL funktioniert hier so: Es werden zwei Sinus-Signale mit gleicher Frequenz multipliziert, wodurch eine Dirac-Nadel im Ursprung und eine bei der doppelten Frequenz entsteht. Das Signal wird nun Tiefpass-gefiltert, damit der hochfrequente Teil wegfällt und effektiv nur quasi eine Gleichspannung übrigbleibt. Dieses Signal repräsentiert nun die Phasenverschiebung zwischen den Signalen. Es wird dann in einen VCO (voltage-controlled Oscillator) geschickt, der eben das Signal treibt, das mit dem Eingangssignal multipliziert wird. (Hier wird noch ein Frequenzverdoppler eingefügt, damit die PLL die halbe Eingangsfrequenz liefert).

Das zweite Verfahren für die Trägerrückgewinnung ist die Costas-Schleife. Bei dieser wird der Demodulator praktisch in die PLL hineingezogen. Es entsteht eine doppelte, in Quadratur betriebene PLL.

Im Buch ist das nicht weiters erklärt, und das Blockschaltbild lässt meiner Meinung nach noch einige Fragen offen.

8. Was wissen Sie über MPSK?

MPSK ist die Abkürzung für M-symbol Phase Shift Keying, M ist dabei die Anzahl der Symbole, sprich der Anzahl der erlaubten Phasenlagen. Aus naheliegenden Gründen ist M immer eine Potenz von 2.

Die Phasenzustände des Signals können in einer Gauß-Ebene als Komplexe Vektoren mit dem Betrag 1 dargestellt werden (Bild 11.16 S.412). Die Fehlerwahrscheinlichkeit muss dann durch die Integration über die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung, die das Rauschen darstellt, errechnet werden. Eine **einfache Näherung**, die brauchbare Resultate für $M \geq 4$ liefert ist

$$P_e \approx 1 - \operatorname{erf} \left(\sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right)$$

Dies kann wieder umgeschrieben werden auf

$$P_e \approx 1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{BT_0} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \sqrt{\frac{C}{N}} \right)$$

Nun ist die Wahrscheinlichkeit enorm hoch, dass *wenn* ein Fehler in der Erkennung passiert, dass dann ein Zustand mit einem angrenzenden Zustand verwechselt wird. Bei Verwendung eines einschrittigen Codes (z.B. Grey-Code) heißt das, dass von den $\log_2 M$ (\log = logarithmus dualis) Bits, die pro Schritt übertragen werden nur eines umfällt. Die Bitfehlerwahrscheinlichkeit kann also näherungsweise als $P_b = \frac{P_e}{\log_2 M}$, sprich als Fehlerwahrscheinlichkeit dividiert durch die Anzahl der Bits angeschrieben werden.

9. Was wissen Sie über QPSK und OQPSK?

QPSK (Quadrature Phase Shift Keying) ist nichts anderes als eine MPSK mit M=4. Es werden also 4 Phasenzustände zugelassen, was bedeutet, dass $\log_2 4 = 2$ Bits pro Schritt übertragen werden.

Die Realisierung von QPSK ist sehr einfach möglich, es werden einfach zwei orthogonale

Trägersignale PRK-moduliert und dann addiert. Entsprechend kann auch der Empfänger gestaltet werden.

Betrachten wir die beiden Bits nun wirklich als auf getrennten Leitungen transportiert (die zwei phasenorthogonalen Signale sind ja leicht trennbar) und mittels PRK moduliert. Dann ist die Bitfehlerwahrscheinlichkeit pro Bit

$$P_b = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \right) = 1/2 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{T_b B \frac{C}{N}} \right) \right)$$

(Ich bitte, auf den Index b statt e zu achten, es handelt sich auch um die Energie bzw. um die Zeitdauer eines Bits)

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass einem der beiden Bits etwas passiert, dem anderen, oder gar beiden.

$$P_e = P_b \cdot (1 - P_b) + (1 - P_b) \cdot P_b + P_b \cdot P_b = 2 \cdot P_b - P_b^2$$

Bei OQPSK (Offset QPSK) wird zwischen den beiden Bits eine Zeitverschiebung von einer halben Symboldauer eingefügt. Dies hat den Effekt, dass zwar doppelt so viele Übergänge stattfinden, diese dafür aber nur halb so weit sind. Es findet in der Gauß-Darstellung also kein Übergang mehr statt zwischen gegenüberliegenden Zuständen. Dies bringt Vorteile bei nichtlinearen Kanälen, da hier eine spektrale Aufweitung des Signals passiert, die mit der Größe der Sprünge korreliert ist.

Bild 11.23 S.422 zeigt ein Beispiel für einen (O)QPSK-Modulator Bild 11.24 für einen Demodulator.

10. Was wissen Sie über MSK und GMSK?

MSK (Minimum Shift Keying) ist eine Erweiterung zu OQPSK. Ich erinnere an die Herstellung eines OQPSK-Signals. Hier werden zwei 90° phasenverschobene Sinussignale mit zwei zueinander 90° phasenverschobenen Rechtecksignalen moduliert und dann addiert. Dies resultiert in einem Signal mit einem un stetigen Phasenwechsel zwischen den vier erlaubten Zuständen.

Verwenden wir anstatt der Rechtecksignale zwei niederfrequenter Sinussignale (Bild 11.33 und 11.34, S.428 und 429), dann führt uns das auf MSK. Das Signal kann also dargestellt werden als

$$f(t) = B_0 \sin\left(\frac{2\pi}{4T_b} t\right) \cos(2\pi f_c t) + B_1 \cos\left(\frac{2\pi}{4T_b} t\right) \sin(2\pi f_c t), \quad B_0 \wedge B_1 \in \{-1, +1\}$$

Dies führt nun dazu, dass der Phasenvektor nicht mehr un stetig springt, sondern mit einer konstanten Geschwindigkeit rotiert. Deswegen gehört diese Methode zur Gruppe der CPM (Continuous Phase Modulation) Verfahren.

Da eine konstant rotierende Phase als Frequenzverschiebung angesehen werden kann, wird MSK auch als BFSK mit differentieller Codierung angesehen.

Im Vergleich zu QPSK-Verfahren ist die Hauptschleife des Spektrums bei MSK zwar breiter, die Nebenhügel sind aber um einiges kleiner, was MSK attraktiv für Frequenzmultiplexverfahren macht.

GMSK (Gaussian MSK) wird eingesetzt um die Bandbreite des Signals noch weiter zu verringern. Angesetzt wird hier bei dem Problem, dass bei MSK die Phase zwar stetig, ihre Ableitung jedoch un stetig ist. Wird die MSK gleich durch einen VCO realisiert (Frequenzmodulation, wie oben

erwähnt) und das Basisbandsignal, das die Daten trägt durch einen Filter auf Gauss'sche Form gebracht (Schaltbild Bild 11.38 S.431), dann resultiert ein viel glatterer Verlauf der Phase, der sich in einem noch weiter reduzierten Spektrum äußert.

12. Systemrauschen und Linkbudget

1. Was wissen Sie über das thermische Rauschen als Störung?

Das thermische Rauschen entspringt der statistischen Bewegung von freien Ladungsträgern in einem ohm'schen Medium über 0K. Die vielen Einzelbewegungen können als kleine Ströme aufgefasst werden, die in einem Widerstand eine Spannung erzeugen. Üblicherweise handelt es sich bei den Ladungsträgern um ein Elektronengas in einem Festkörper.

Abgeleitet werden kann das thermische Rauschen (bis etwa 1THz) aus der klassischen statistischen Mechanik. Deren Aussage ist, dass sich in einem System im thermischen Gleichgewicht die thermische Energie gleichmäßig auf alle Freiheitsgrade aufteilt, und dass die Energie eines Systems mit der Temperatur T $\frac{1}{2} k_b T$ pro Freiheitsgrad ist. $k_b = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

Ein Partikel mit der Temperatur T , das sich in 3 Dimensionen bewegt hat also 3 Freiheitsgrade (Rotation vernachlässigt) und hat somit dann die Energie $\frac{3}{2} k_b T$.

Um das thermische Rauschen beschreiben zu können, müssen wir es zunächst „einfangen“.

Dazu wird die Schaltung aus Abbildung 12.1 S.452 verwendet. Die verlustlose Doppelleitung wird zunächst mit den zwei Widerständen angeregt, dann werden die Schalter geschlossen. Plötzlich sind nur noch jene Wellen erlaubt, die am Anfangs- und Endpunkt der Leitung den Wert 0 haben. Diese haben die Wellenlängen $\lambda_n = \frac{2l}{n}$ (die längste Welle darf die volle Periode $2l$ haben, da sie ja in der Mitte 0 ist). l ist die Länge der Leitung, n ist eine beliebige positive ganze Zahl >0 . Die Frequenz der Moden ist $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{2l} = \frac{cn}{2l}$ wenn c die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist. Der

Abstand im Frequenzbereich zwischen zwei Moden ist also konstant $\Delta f_n = \frac{c}{2l}$. In einem

Frequenzbereich B bedeutet das, dass die Anzahl der Moden ν über $\nu = \frac{B}{\Delta f_n} = \frac{2lB}{c}$

berechnet werden kann. Die Energie einer Mode muss nun, da wir annehmen, dass sich die Feldverteilung wie ein System im thermischen Gleichgewicht verhält, von der Anzahl ihrer Freiheitsgrade abhängen. Da sowohl ihre Frequenz als auch ihre Phasenlage festgelegt ist, hat sie nur die Amplitude als Freiheitsgrad, d.h. ihre Energie ist $\frac{1}{2} k_b T$. Sie kann weiters so dargestellt werden, dass sie aus zwei Teilen besteht, dem Hinlaufenden und dem Rücklaufenden. Die Energie der Welle teilt sich gleichmäßig auf den Raum auf. Die Leistung die transportiert wird ist gleich der Energie durch die Zeit, die die Welle benötigt, um von einem Ende der Leitung zum anderen zu gelangen $t = \frac{l}{c}$. Die Leistung einer Teilwelle ist also $P_w = \frac{\frac{1}{2} k_b T c}{l}$. Diese Leistung ist für alle

Teilwellen gleich, um die Gesamtleistung auf der Leitung zu erhalten müssen wir also mit der Anzahl der Wellen multiplizieren. Dummerweise gibt es jetzt unendlich viele Wellen, wir können die Leistung also nur für einen bestimmten Frequenzbereich angeben. Die Anzahl der Wellen in so einem Bereich haben wir schon berechnet, wir erhalten durch Einsetzen für die Leistung in einem abgegrenzten Frequenzbereich B $P_B = \frac{\frac{1}{2} k_b T c}{l} \frac{2lB}{c} = k_b T B$.

Dies ist die Nyquist-Formel.

Anmerkung: Ich weiß, diese Erklärung hinkt an allen Ecken und Enden. Ich habe sie aus dem Buch

übernommen, weil ich keine bessere gefunden habe.

2. Worauf bezieht sich die Ultraviolett Katastrophe?

Wäre das Leistungsdichtespektrum des Thermischen Rauschens wirklich weiß, das heißt über der Frequenz bis ins Unendliche konstant, dann würde es unendlich viel Leistung transportieren. Jeder Strahlende Körper würde sofort zerstrahlen.

Gelöst wird dieses Paradoxon von der Quantenmechanik, die einen Frequenzverlauf für das Leistungsdichtespektrum des thermischen Rauschens angibt, der einem idealen Tiefpassverhalten ähnelt und bei etwa 10^{12} Hz die Knickfrequenz hat.

3. Was wissen Sie über das Schrotrauschen und Flickerrauschen?

Das Schrotrauschen tritt überall dort auf, wo Elektronen eine Potentialbarriere überqueren müssen. Dies kann entweder ein PN-Übergang sein, aber auch die Kathode einer Vakuumröhre.

Erklärt wird der Effekt an Hand der Vakuumröhre.

Es durch die Erhitzung der Kathode können Elektronen die Potentialbarriere ins Vakuum überwinden und fliegen zur Anode, wo sie eingefangen werden. Jedes Elektron verursacht dabei einen kleinen Strompuls, der genau so lange dauert, wie das Elektron frei fliegt. Die Auslösung dieser Pulse unterliegt einem Poisson-Zufallsprozess. Es ist also $I_e = e \frac{v}{l} = \frac{e}{\tau}$ l ist die Länge der Röhre, v die Geschwindigkeit des Elektrons, τ die Flugdauer.

Die Einzelpulse sind also modellierbar als $I_e(t) = \frac{q_e}{\tau} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$, oder im Spektralbereich

$$I_e(f) = q_e \text{sinc}(\tau f)$$

Die spektrale Energiedichte so eines Pulses ist $E(f) = q_e^2 \text{sinc}^2(\tau f)$. Sie ist für Frequenzen $f \ll 1/\tau$ praktisch konstant $E(f) \approx q_e^2$. Die Gesamtleistung innerhalb einer Bandbreite B ist dann $E_B \approx 2 q_e^2 B$ (der Faktor 2 wegen dem zweiseitigen Spektrum).

Die Normleistung des Stromes für ein Elektron ist damit $I_e^2 = \frac{E_B}{T} = \frac{2 q_e^2 B}{T}$

Für m Elektronen ist das $I_n^2 = \frac{2 m q_e^2 B}{T} = 2 q_e B \frac{m q_e}{T} = 2 q_e B I$ Wobei I der Gesamtstrom ist.

Die Größe der Rausch-Stroms lässt sich also zu $I_n = \sqrt{2 q_e B I}$ abschätzen.

Anmerkung: Solche Schmerzen wie beim Abschreiben dieser Ableitung habe ich seit meiner Blinddarmpoperation nicht mehr gehabt. Es wird die Auswirkung der Poisson-Verteilung unter den Tisch fallen gelassen, die Verteilung der Flugwege, ... Aber das ist ja typisch für dieses Buch. Ich will ja nicht, dass es durchgerechnet wird, aber ERWÄHNEN kann man es wohl wenigstens.

Flicker-Rauschen oder 1/f-Rauschen hat einen Verlauf der Leistungsdichte, der ungefähr indirekt proportional zur Frequenz fällt. Dies gilt für den Bereich unter ein paar Kilohertz, darüber verläuft sie flach. Es tritt in den meisten aktiven und in ein paar passiven Bauteilen auf. Wegen der Konzentration auf niedrige Frequenzen wird es auch Pink Noise genannt.

Anmerkung: Supa, jetzt kennt sich jeder aus.

4. Bestimmen Sie die Rauschleistung eines rauschenden Verstärkers, wenn am Eingang ein rauschender Widerstand liegt.

Um es kurz zu machen, die Rauschleistung wird als eigenständige Rauschquelle modelliert und zusätzlich zu dem rauschenden Widerstand an den Eingang geschaltet (Bild 12.12 S.463). Für den betrachteten Frequenzbereich kann dann auch eine Verstärkung G des Verstärkers angegeben werden, die Rauschleistungen der beiden Rauschquellen für diesen Frequenzbereich wird addiert und mit G multipliziert, fertig.

Was bei dieser Frage wohl interessanter ist, ist die Definition der Rauschtemperatur. Diese setzt so an, dass jedes weiße Rauschen als (klassisches) thermisches Rauschen aufgefasst wird. Es lässt sich dann eine Temperatur für dieses Rauschen angeben, die nur von der Rauschleistung und der

betrachteten Bandbreite abhängt $T_n = \frac{P_n}{k_b B}$. Sowohl für den Widerstand als auch für den

Verstärker kann jetzt eine Rauschtemperatur angegeben werden (T_R bzw. T_A). T_A ist dabei die Temperatur jenes Rauschens, das am Eingang des Verstärkers anliegen muss, um sein Ausgangsrauschen zu erzeugen.

Die Leistung am Ausgang kann berechnet werden zu $P_n = (k_b T_R B + k_b T_A B) G$.

5. Wie bestimmt man die Rauschtemperatur von kaskadierten Teilsystemen?

Die Teilsysteme werden in der Betrachtung hier auf einen Verstärkungsfaktor G reduziert. Die Rauschtemperatur T_{en} des n-ten Systems ist wieder die Temperatur des Signals, das eingangsseitig anliegen muss, damit das Ausgangsrauschen des Systems erzeugt wird.

Angenommen ist eine Hintereinanderschaltung von N Systemen (Bild 12.13 S.465). Das Eingangssignal hat die Rauschtemperatur T_s .

Nach dem ersten System ist die Rauschleistung $P_1 = (T_s + T_{e1}) \cdot k_b B \cdot G_1$. Dividieren durch $k_b B$ gibt die Rauschtemperatur nach dem ersten System $T_1 = (T_s + T_{e1}) G_1$. Dies ist nun das neue Eingangssignal für das zweite System, bei dem selbiges passiert. Es ist dann

$T_2 = ((T_s + T_{e1}) G_1 + T_{e2}) G_2 = T_s G_1 G_2 + T_{e1} G_1 G_2 + T_{e2} G_2$. So geht es weiter bis zum letzten

System, dort ist die Rauschtemperatur dann

$$T_N = T_s \prod_{n=1}^N G_n + T_{e1} \prod_{n=1}^N G_n + T_{e2} \prod_{n=2}^N G_n + T_{e3} \prod_{n=3}^N G_n + \dots + T_{eN} G_N$$

Das Gesamtsystem wird durch $G = \prod_{n=1}^N G_n$ charakterisiert, die Rauschtemperatur am Eingang des

Gesamtsystems ist damit $T_{in} = \frac{T_N}{G} = T_s + T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} + \frac{T_{e3}}{G_1 G_2} + \dots + \frac{T_{eN}}{\prod_{n=1}^{N-1} G_n} = T_s + T_e$ wobei T_e

nun die Rauschspannung des kaskadierten Systems ist.

6. Wie bestimmt man die Rauschtemperatur, wenn ein System verlustbehaftet ist?

Mit der Erklärung im Buch kann ich wiedereinmal ABSOLUT NICHTS anfangen. Meiner Meinung nach sollte eine sinnvolle Argumentation etwa so klingen:

Das thermische Rauschen, da es ja an allen ohm'schen Bauteilen (also auch Leitungen) auftritt und nicht von deren Widerstand abhängt, ist *überall*. Das heißt sowohl am Eingang als auch am Ausgang eines Systems und (gleiche Temperatur angenommen) das auch noch in gleicher Stärke.

Angenommen, es liegt nun ein System ohne externe Versorgung vor, dann breitet sich über dieses ein thermisches Gleichgewicht aus. Das heißt, dass sowohl am Eingang als auch am Ausgang ein Rauschsignal mit der Rauschtemperatur T liegt. Die Ausgangsrauschtemperatur sollte nun $G \cdot T$ (also mal der Eingangsrauschtemperatur) sein, ist aber T . Die Differenz $T(1-G)$ wird nun als vom System verursacht betrachtet. Auf den Eingang bezogen ergibt sich die Rauschtemperatur des Systems $T \frac{1-G}{G}$.

7. Beschreiben Sie die Struktur eines Superheterodynempfängers. Geben Sie Größenordnungen für die Verstärkungen und die Rauschtemperaturen der einzelnen Teile an.

Ein Superheterodynempfänger geht nach einem mehrstufigen Prinzip vor, um das empfangene Signal zu demodulieren. Am Anfang steht (natürlich) das Empfangselement, die Antenne (hier durch einen Widerstand der Rauschtemperatur 100K symbolisiert). Danach kommt ein möglichst rauscharmer HF-Verstärker (Rauschtemp. 50K, $G=12\text{dB}$) (HF= High Frequency, auch RF= Radio Frequency), der das Signal auf ein weiterverarbeitbares Level verstärkt und meist auch gleich eine Vorselektion vornimmt. Danach kommt der Mischer, der eine analoge Multiplikation des eingegangenen Signals mit dem Signal des Lokalen Oszillators durchführt. Dies führt zu einem Signal bei einer niedrigeren Frequenz (der sogenannten Zwischenfrequenz, IF=Intermediate Frequency, auf die die restlichen Filter abgestimmt sind) und einem Signal bei einer sehr hohen Frequenz. Letzterer Teil muss mit einem Filter abgeschnitten werden, daher wahrscheinlich die Abschwächungswirkung ($G=-6\text{dB}$). Angeschlossen sind dann noch zwei Verstärkerstufen für die Zwischenfrequenz, die Möglicherweise Teil der Aufbereitung und Demodulation sind, das wird im Buch aber nicht näher ausgeführt. Hier ist offensichtlich die Rauschtemperatur von untergeordneter Bedeutung, sie weisen dafür eine hohe Verstärkung auf. Die Daten sind: $G=20\text{dB}/30\text{dB}$, $T=1000\text{K}$.

8. Was wissen Sie über die Formel von Friis?

Um die Formel von Friis verstehen zu können, muss zunächst eine neue Kennzahl für rauschende Verstärker eingeführt werden, diese trägt den Namen „Rauschfaktor“ f . Dieser versucht, die Rauscheigenschaften von Verstärkern, unabhängig von deren Verstärkung vergleichbar zu machen.

Definiert ist der Rauschfaktor als Eingangs-SNR zu Ausgangs-SNR, wenn das Rauschen am Eingang eine Temperatur von genau 290K hat:

$$f = \frac{(S/N)_i}{(S/N)_o} \Big|_{T_i=290\text{K}}$$

(Hier ist das LEISTUNGS-SNR gemeint)

Sind Ausgangs und Eingangsleistung über den Verstärkungsfaktor G verknüpft, und die Ausgangsrauschleistung gleich der verstärkten Eingangsrauschleistung plus dem Rauschen des Verstärkers, wie in den vorigen Fragen, dann lässt sich f anschreiben als:

$$f = \frac{\frac{S_i}{k B T_i}}{G S_i} = \frac{S_i k B G (T_i + T_e)}{k B T_i G S_i} = \frac{T_i + T_e}{T_i} = \frac{290\text{K} + T_e}{290\text{K}}$$

Umgeschrieben kann T_e über f berechnet werden zu

$$T_e = (f - 1) 290\text{K}$$

Damit kann auch der Rauschfaktor bei kaskadierten Systemen berechnet werden. Die Rauschtemperatur für kaskadierte Systeme ist:

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} + \frac{T_{e3}}{G_1 G_2} + \dots + \frac{T_{eN}}{\prod_{n=1}^{N-1} G_n}$$

$$(f - 1) 290\text{K} = (f_1 - 1) 290\text{K} + \frac{(f_2 - 1) 290\text{K}}{G_1} + \frac{(f_3 - 1) 290\text{K}}{G_1 G_2} + \dots + \frac{(f_N - 1) 290\text{K}}{\prod_{n=1}^{N-1} G_n}$$

Dividieren durch 290K und addieren von 1 führt auf die Friis-Formel:

$$f = f_1 + \frac{f_2 - 1}{G_1} + \frac{f_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots + \frac{f_N - 1}{\prod_{n=1}^{N-1} G_n}$$

9. Welche Größen gehen in das Linkbudget für Kabelübertragung und Funkübertragung ein?

Das Link-Budget wird eingesetzt um das *SNR am Empfänger* zu berechnen. Es fließen ein:

- Sendeleistung
- Alle Quellen der Abschwächung bzw. Verstärkung (Verluste bzw. Richtwirkungen als Beispiel)
- Alle Rauschquellen

Speziell bei der Kabelübertragung wären neben der Sendeleistung z.B. die Verluste in der Leitung, sowie Verstärkung und Rauschzahl des Empfängers zu berücksichtigen.

Für die Funkübertragung würden Verluste in den Antennen sowie Abstrahlverluste dazukommen.

10. Was wissen Sie über die isotrope Antenne?

Die isotrope Antenne ist ein theoretisches Modell, dass in der Praxis nicht erreicht werden kann. Es wird hier eine Antenne angenommen, die die Leistung in alle Raumrichtungen gleich abstrahlt. Die Leistungsdichte im Abstand R von der isotropen Antenne ist also

$$W_{iso} = \frac{P_{rad}}{4\pi R^2}$$

Die Flächen gleicher Leistungsdichte sind also Kugeln.

Die Strahlungsintensität in Watt pro Steradian ist also für die isotrope Antenne konstant

$$I_{iso} = \frac{P_{rad}}{4\pi}$$

11. Was wissen Sie über Antennen mit Richtwirkung?

Jede realisierbare Antenne hat in irgendeiner Form eine Richtwirkung. Das heißt, dass sie verglichen mit der isotropen Antenne in manche Richtungen mehr, dafür in andere weniger Leistung abstrahlt. Wegen der einfachen Handhabung, aber auch um die Antennen vergleichbar zu machen, wird die Richtwirkung auf die isotrope Antenne bezogen.

Zwei Werte sind hier von besonderer Bedeutung für die *sendende* Antenne. Der Antennengewinn und der Richtfaktor.

Der Antennengewinn bezieht die Intensität des Signals auf die (konstante) Intensität, die eine isotrope, verlustlose Antenne in eine gewisse Raumrichtung erzeugen würde.

$$G(\theta, \phi) = \frac{I(\theta, \phi)}{I_{\text{isotrop, verlustlos}}} = I \frac{(\theta, \phi)}{\frac{P_T}{4\pi}}$$

Der Richtfaktor macht das selbe, nur hier ist die isotrope Vergleichsantenne nicht mehr verlustlos, sondern hat den selben Verlust wie die zu vergleichende Antenne. Es wird also wirklich nur die Richtwirkung analysiert.

$$D(\theta, \phi) = \frac{I(\theta, \phi)}{I_{\text{isotrop, verlustbehaftet}}} = \frac{I(\theta, \phi)}{\frac{P_{\text{abgestrahlt}}}{4\pi}}$$

Bei Einführung des ohm'schen Antennenwirkungsgrades $\eta_\Omega = \frac{P_{\text{abgestrahlt}}}{P_T}$ findet sich auch ein Zusammenhang zwischen G und D in der Form:

$$G = \eta_\Omega D$$

Es kann nun wenn diese Kenngrößen und die entsprechende Leistung bekannt sind die Leistungsdichte in jedem Punkt im Raum berechnet werden zu

$$W(\theta, \phi, R) = \frac{P_T}{4\pi R^2} G(\theta, \phi)$$

oder

$$W(\theta, \phi, R) = \frac{P_{\text{abgestrahlt}}}{4\pi R^2} D(\theta, \phi)$$

Eine wichtige Kenngröße für die *empfangende* Antenne ist die sogenannte effektive Antennenfläche a_e .

Sie ergibt sich als Quotient der empfangenen Signalleistung durch die Leistungsdichte einer ebenen Welle

$$a_e(\theta, \phi) = \frac{C(\theta, \phi)}{W}$$

Für flächige Antennen, wie etwa Parabolantennen, kann die effektive Antennenfläche mit der Apertur der Antenne korreliert werden. Hier ist aber zunächst zu beachten, dass nicht die komplette

Apertur verwendet werden kann (Rauigkeiten, Verunreinigung, etc.), daher wird die *effektive Apertur* $A_e = \eta_{ap} A_{ph}$ eingeführt, die sich auf die effektive Antennenfläche über die ohm'schen Verluste abbildet $a_e = \eta_{\Omega} A_e$. Die effektive und physikalische Fläche der Antenne hängen also zusammen über $a_e = \eta_{\Omega} \eta_{ap} A_{ph}$

Aus dem Lorentz'schen Reziprozitätstheorem (???) ergibt sich noch der Zusammenhang zwischen Antennengewinn und effektiver Antennenfläche:

$$G(\theta, \phi) = \frac{4\pi a_e(\theta, \phi)}{\lambda^2}$$

12. Bestimmen Sie die Trägerleistung für Freiraumausbreitung am Anschluss der Empfangsantenne.

Angenommen, es stehen zwei Antennen in der Entfernung R in einem verlustfreien Medium. Die Leistungsdichte am Empfänger, wenn in die Sendeantenne die Leistung P_T geschickt wird, ist für einen verlustlosen, isotropen Strahler

$$W_{\text{verlustlos, isotrop}} = \frac{P_T}{4\pi R^2}$$

Hat die Sendeantenne Richtwirkung und Verluste, dann ist die Leistungsdichte

$$W = \frac{P_T}{4\pi R^2} G_T$$

Die Signalstärke am Ausgang der Empfangsantenne hängt von deren effektiver Fläche ab

$$C = W a_e = \frac{P_T}{4\pi R^2} G_T a_e$$

Ist der Antennengewinn der Empfängerantenne bekannt, dann wird dies zu

$$C = \frac{P_T}{4\pi R^2} G_T \frac{\lambda^2 G_R}{4\pi} = P_T G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2$$

13. Was bedeutet und gibt die Bezeichnung EIRP an? Was bedeutet und gibt die Bezeichnung FSPL an?

Nehmen wir noch einmal das Ergebnis der letzten Frage, nach der Signalleistung am Empfänger bei bekannter Sendeleistung her.

$$C = P_T G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2$$

Die Sendeleistung und der Antennengewinn der Sendeantenne werden zusammengefasst zur sogenannten *effektiven isotrop abgestrahlten Leistung* (*Effective Isotropic Radiated Power* = *EIRP*). $EIRP = P_T G_T$

Der letzte Teil der Gleichung gibt im Wesentlichen den Verlust zwischen den Antennen an, er wird zum *Freiraum-Wegverlust* (*frei übersetzt von Free Space Path Loss* = *FSPL*). $FSPL = \left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right)^2$

Die Leistung am Empfänger ergibt sich dann zu $C = \frac{EIRP}{FSPL} G_R$ bzw in dB:

$$C = EIRP - FSPL + G_R$$

14. Was wissen Sie über die Mehrwegeausbreitung?

Mehrwegeausbreitung kommt in stärkerer und schwächerer Ausbildung in jedem Übertragungsweg über Funk vor. Eine Variante mit drei Wegen (Mikrowellenstrecke, Sichtverbindung) ist in Abbildung 12.27 S.486 gezeigt. Man sieht hier den direkten Weg, die Spiegelung an der ebenen Erdoberfläche sowie Reflexion an der Troposphäre.

Problematisch hierbei ist, dass die Signale aus den unterschiedlichen Pfaden relativ zueinander Phasenverschoben sind. Hier wird nun der Fall für zwei Ausbreitungspfade besprochen.

Angenommen, es liegt eine Zusammenstellung wie in Bild 12.21 S.476 vor. Es sind hier der direkte Pfad mit der Länge d_1 und der am Erdboden reflektierte Pfad mit der Länge d_2 angegeben. Wir begeben uns jetzt in die komplexe Darstellung für sinusförmige Wechselfelder. Hier kann ein komplexer Faktor F definiert werden, mit dem wir die Feldstärke am Empfänger multiplizieren, sodass der reflektierte Pfad mitberücksichtigt wird.

$$F = 1 + \rho e^{j\phi} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(d_2-d_1)}$$

$\rho e^{j\phi}$ berücksichtigt die Eigenschaften der Reflexion, die sich üblicherweise in einer Abschwächung ($\rho < 1$) und einer Phasendrehung äußern. $e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(d_2-d_1)}$ ist der Phasenterm, der durch den Wegunterschied zu Stande kommt.

Wird perfekte Reflexion angenommen ($\rho e^{j\phi} = -1$), dann wird

$$F = 1 - e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(d_2-d_1)} = e^{-j\frac{\pi}{\lambda}(d_2-d_1)} \left(e^{j\frac{\pi}{\lambda}(d_2-d_1)} - e^{-j\frac{\pi}{\lambda}(d_2-d_1)} \right) = e^{-j\frac{\pi}{\lambda}(d_2-d_1)} 2j \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}(d_2-d_1)\right)$$

Der Betrag dieses Faktors ist laut Buch

$$|F| = 2 \sin\left(\frac{2\pi h_T h_R}{\lambda R}\right)$$

Wie dieses Ergebnis zu Stande kommt ist mir nicht einsichtig.

Um die Auswirkung auf die Signalleistung zu bestimmen muss dieser Faktor nur noch quadriert werden. Dann kann man ihn einfach in die Gleichung für die Leistung am Empfänger dazu multiplizieren.

15. Bestimmen Sie die empfangene Trägerleistung für die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen über eine ebene Fläche am Anschluss der Antenne. (Hinweis: verwenden Sie das zwei Pfade Modell)

Wir verwenden die Formel für die Trägerleistung am Anschluss der Antenne für den Reflexionsfreien Fall

$$C = \frac{EIRP}{FSPL} G_R$$

Und multiplizieren mit dem in der vorigen Frage erarbeiteten Faktor

$$C' = \frac{EIRP}{FSPL} G_R |F|^2$$

$$C' = P_T G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 4 \sin^2 \left(\frac{2\pi h_T h_R}{\lambda R} \right)$$

16. Welche Rauschquellen bestimmen die Antennentemperatur?

Die Rauschtemperatur der Antenne ergibt sich wie gehabt aus

$$T_{ant} = \frac{G_N}{k_B}$$

Folgende Quellen spielen in diese Rauschleistung hinein:

- unter 30MHz dominiert Rauschen, das von Blitzen in Gewittern erzeugt und in der Ionosphäre gefangen und reflektiert wird. Darüber hat dieses Rauschen keine Bedeutung, weil dort die Ionosphäre durchlässig ist.
- zwischen 30MHz und 1 GHz dominiert in der Galaxie erzeugtes Rauschen. Mit steigender Frequenz fällt dessen Leistung um etwa -25dB/Dekade. Es ist stark anisotrop.
- über 1GHz dominieren in der Atmosphäre erzeugtes thermisches Rauschen und Rauschen am Boden (weiß jemand was ground noise sein könnte?). Diese verlaufen relativ konstant bis etwa 10GHz und fallen, je stärker die Antenne gekippt ist. Bei Blickrichtung Himmel und wenn dieser klar ist, dann sollte hier überhaupt nur die Hintergrundstrahlung von 3K rauschen.
- Über 10GHz treten Resonanzeffekte in Erscheinung.
- Zu guter Letzt natürlich das thermische Rauschen, das in der Antenne selbst erzeugt wird.

Werden die ganzen externen Rauschquellen in der Temperatur T_A zusammengefasst und hat die Antenne die physikalische Temperatur T_{phys} , dann ist die Rauschtemperatur, die die Antenne verlässt:

$$T_{ant} = T_A \eta_\Omega + T_{ph} (1 - \eta_\Omega)$$

13. Mobile Kommunikation

1. Welche Probleme verursacht der Mobilfunkkanal?

Im Vergleich mit stationären Sichtverbindungen hat der Mobilfunkkanal die folgenden Nachteile:

- Doppler-Verschiebungen in der Trägerfrequenz durch die Bewegung der Stationen relativ zueinander
- Langsame Schwankungen der Signalstärke im Raum, verursacht von Hindernissen (Funkschatten)
- Schnelle Schwankungen der Signalstärke im Raum durch Interferenz mehrerer, auf unterschiedlichen Pfaden gereisten Signalen
- Schwankungen der Signalstärke in der Zeit wegen der Bewegung durch ein sich räumlich änderndes Feld
- Frequenzabhängige Schwankungen der Übertragungsfunktion bei Breitbandsignalen
- Dispersion in der Zeit durch Mehrwegeausbreitung
- Änderung der Kanaleigenschaften (Übertragungsfunktion) über der Zeit durch die Bewegung

2. Welche Größen bestimmen die empfangene Leistung?

Die empfangene Leistung wird bestimmt durch Sendeleistung sowie Sende- und Empfangsantennengewinn, die Reflexion der flachen Erde, die spektralen Übertragungseigenschaften des Mediums, sowie die Eigenschaften des Terrains, in dem die Übertragung stattfindet (Art der Bebauung, Höhenunterschied zwischen Sender und Empfänger, ...)

3. Wodurch unterscheiden sich langsame und schnelle Schwunderscheinungen?

Langsame und schnelle Schwunderscheinungen unterscheiden sich in mehreren Punkten.

Zunächst unterscheiden sich die beiden Effekte in ihren **Ursachen**. Die langsamen Schwunderscheinungen werden von Verschattungen durch Hindernisse erzeugt, die schnellen durch Interferenz mehrerer Signalpfade.

Natürlich ist der wesentlichste Unterschied zwischen den beiden die **räumliche Skala**, auf der sie auftreten. Während die langsamen Erscheinungen etwa im Bereich von einigen 10 Metern (urbaner Bereich) auftreten, passiert das bei den schnellen im Bereich einer halben Wellenlänge.

Auch die **Statistik** der beiden Varianten unterscheidet sich. Während die schnellen Schwunderscheinungen durch einen log-normal-verteilten Zufallsprozess beschrieben werden können, liegt den langsamen ein Rayleigh-Prozess zu Grunde.

4. Wie werden schnelle Schwunderscheinungen charakterisiert?

Schnelle Schwunderscheinungen werden durch eine Rayleigh-Verteilung charakterisiert. Man kann sich das vielleicht so merken, dass jede Phasenlage des Trägersignals aus zwei orthogonalen Schwingungen zusammengestellt werden kann. Jede Kombination dieser beiden Schwingungen kann als Punkt in einer Ebene dargestellt werden. Die vielen Verschiebungen durch die unterschiedlichen Pfade führen über den zentralen Grenzwertsatz auf eine Normalverteilung in dieser Ebene. Uns interessiert nun die resultierende Phasenlage wenig, viel interessanter ist die Amplitude, und die ist (siehe Kapitel 4 Frage 8) Rayleigh-verteilt.

$$p(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, r \geq 0$$

r ist hier jetzt die Signalamplitude, σ ist die Standardabweichung der zu Grunde liegenden Normalverteilung.

5. Was wissen Sie über die Zeitdispersion, frequenzselektiven Schwund und die Kohärenzbandbreite?

Die Mehrwegeausbreitung im Mobilfunk führt neben der Interferenz auch zu einer Zeitdispersion, die für digitale Signale ISI zur Folge haben kann.

Quantifiziert wird die Zeitdispersion durch die Mehrwegeausbreitung mit der RMS-delay-spread, also der Wurzel aus dem zweiten Moment der Zeitverschiebungen gemittelt über alle Wege. Überschreitet dieser Wert etwa 0,3 mal die Symbolperiodendauer, dann muss eine Korrektur durchgeführt werden, um die Performance des Systems zu retten.

Betrachtet man eine Interferenz eines Signals mit einer verzögerten Version von sich selbst im

Frequenzbereich (z.B. als Übertragungsfunktion, in der Verzögerungen vorkommen, Bild 12.8 S.486), dann zeigen sich hier Oszillationen, die umso enger sind, je größer die Verzögerung ist

($1 + e^{j\phi\omega} = e^{j\frac{\phi}{2}\omega} (e^{-j\frac{\phi}{2}\omega} + e^{j\frac{\phi}{2}\omega}) = e^{j\frac{\phi}{2}\omega} 2 \cos(\frac{\phi}{2}\omega)$). Diese führen natürlich dazu, dass bei einem

Signal ab einer bestimmten Bandbreite (siehe Bild) die unterschiedliche Übertragung der einzelnen Frequenzanteile nicht mehr vernachlässigt werden kann. Man spricht in diesem Zusammenhang dann von frequenzselektivem Schwund. Die Größe, die diesen frequenzselektiven Schwund charakterisiert ist die Kohärenzbandbreite. Liegen die spektralen Komponenten eines Signals weiter auseinander als der Betrag der Kohärenzbandbreite, dann tritt der frequenzselektive Schwund auf.

6. Was wissen Sie über zelluläre Strukturen und leiten Sie die Clusterformel her.

Zelluläre Strukturen werden verwendet, um die selben Frequenzbereiche räumlich verteilt mehrmals einsetzen zu können. Es wird so vorgegangen, dass mehrere Zellen zu einem Cluster zusammengefasst werden (z.B. 3, 4, 7, 12, ... siehe Abbildung 15.4 S.612). In diesem Cluster wird an jede Zelle ein Frequenzbereich vergeben. Anschließend wird ein periodisches Muster aus dem Cluster erzeugt, indem es mit der selben Frequenzaufteilung immer wieder aneinander gereiht wird (Bild 15.5 S.615). Es wird nun davon ausgegangen, dass zwei Zellen, die im gleichen Frequenzbereich arbeiten, so weit voneinander entfernt sind, dass die Interferenz akzeptabel klein ist.

Für die Abschätzung der Strörungseinwirkungen dient das Verhältnis von Träger- zu Interferenzsignal $\frac{C}{I}$. Dies ist mittels Tabellen oder empirisch gefundenen Formeln zu berechnen, hängt aber ab vom Quotienten aus Distanz zwischen zwei gleichen Zellen und dem Zelleradius $\frac{d}{r}$. Dieser lässt sich für ein n-Cluster berechnen.

Im Buch ist hier nur die Berechnung für ein 7-Cluster angegeben, ich übernehme diese.

Zunächst kann festgestellt werden, dass die Anzahl der Elemente gleich der Fläche des Clusters

durch die Fläche einer Zelle ist. $n = \frac{A_{cluster}}{A_{zelle}}$ Da die Fläche quadratisch vom Radius der Zelle bzw.

des Clusters abhängt wird dies zu $n = \frac{R^2}{r^2}$.

In der Zeichnung Bild 15.5 S.615 wird ein gleichschenkliges Dreieck aufgespannt zwischen dem Radius des Clusters R und dem Abstand gleicher Zellen d. Laut Buch ist der Winkel zwischen R und d gleich 30°. Halbieren wir das gleichschenklige Dreieck, dann erhalten wir ein rechtwinkeliges Dreieck mit der Hypotenuse R und der Kathete d/2. d errechnet sich dann zu

$\frac{d}{2} = R \cos(30^\circ) = R \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow d = R\sqrt{3}$. Durch einsetzen des Obigen Zusammenhangs in den eben erhaltenen resultiert die Clusterformel:

$$\frac{d}{r} = \sqrt{3n}$$

Sie gibt nun an, wie viele Zellen in einem Cluster sein müssen, um ein bestimmtes Verhältnis von d/r zu erhalten.

Anmerkung: Laut Buch ist diese Formel allgemein gültig. Das wird aber nirgends bewiesen.

7. Erklären Sie die wesentlichen Elemente der Architektur eines terrestrischen Mobilfunksystems.

- **Mobiltelefon** Dieses ist der Endpunkt der Kommunikation. Es nimmt die Sprachsignale auf und wandelt sie in verarbeitbare Daten.
- **Zelle** Die Mobilfunkzelle ist ein Bereich mit einem eigenen Frequenzbereich, sie ist organisiert in Clustern. Das Mobiltelefon hält sich innerhalb der Zelle auf, bei einem Zellwechsel muss das Mobiltelefon auch das Frequenzband wechseln.
- **Basisstation** Sie übernimmt die Kommunikation mit den Mobiltelefonen in der Zelle. Über ihre Leistung wird die Größe der Zelle definiert.
- **Basisstationscontroller** Verwaltet die Basisstationen, übernimmt das Handover der Mobiltelefone, die zwischen den Zellen wechseln.
- **Mobile Switching Centres** Sind die Verbindung ins restliche Telefonnetz. Sie stehen in Verbindung mit der Teilnehmer-Datenbank
- **Teilnehmer-Datenbank**

8. Was wissen Sie über Code-Division Multiplex (CDMA) und die Spread-Spectrum Technologie?

Neben den üblichen Multiplexverfahren TDMA (Time Division Multiple Access) und FDMA (Frequency Division Multiple Access) gibt es noch das Verfahren des CDMA. Hier wird jedes Datenbit, das gesendet wird, mit einem Code moduliert (z.B. wieder modulo-2-Addition). Dieser Code hat eine viel höhere Bitrate (1 Codewort hat genau die Dauer eines Nutzdaten-Bits), seine einzelnen Codeworte sind orthogonal. Jeder Teilnehmer hat sein eigenes Codewort. Auf der Übertragungsstrecke werden nun die Signale aller Teilnehmer aufsummiert, der Empfänger kann einen beliebigen Teilnehmer auswählen, indem er eine Korrelation des Eingangssignals mit dem Codewort dieses Teilnehmers durchführt. (Bild 15.11 S.623)

Wegen der starken Verbreiterung des Spektrums, zu der die Modulation des Nutzdatensignals führt, wird diese Technik auch „Spread Spectrum Technology“ genannt.

Ihre Eigenschaften sind:

- Kanalbandbreite ist vielmals die Datenbandbreite
- Die Daten werden im selben Bandbereich übertragen
- Es wird Kodierung im Sender und Dekodierung im Empfänger benötigt.

Die Verbreiterung des Spektrums ist im Bereich zwischen 100 und 10 000.

Vorteile:

- Verbessertes SNR durch die Codierung
- Übersprechen zwischen den Teilnehmern ist reduziert
- Es kann damit unkoordiniertes Multiple Access realisiert werden

14.Übertragung und Speicherung von Videosignalen

1. Beschreiben Sie den prinzipiellen Aufbau eines Fernsehbildes. Wie heißen die Standards für das Fernsehen in Österreich, USA und Frankreich? Erklären Sie den in Österreich verwendeten Standard genauer.

Das grundsätzliche Problem, das sich stellt ist, ein zweidimensionales Fernsehbild aus einem Datenstrom aufzubauen. Hierzu wird das Bild in ein Feld von Bildpunkten (Pixel) zerlegt. Jedes dieser Pixel trägt Helligkeits- und Farbinformationen. Die Pixel werden dann in Zeilen aneinander gereiht, und die Zeilen dann zu dem kompletten Bild zusammengesetzt. Die Zusammensetzung der Pixel passiert also ähnlich wie die Aneinanderreihung der Schriftzeichen bei einer Schreibmaschine.

Die Größe eines Pixels bestimmt die Auflösung des Bildes und damit dessen Qualität.

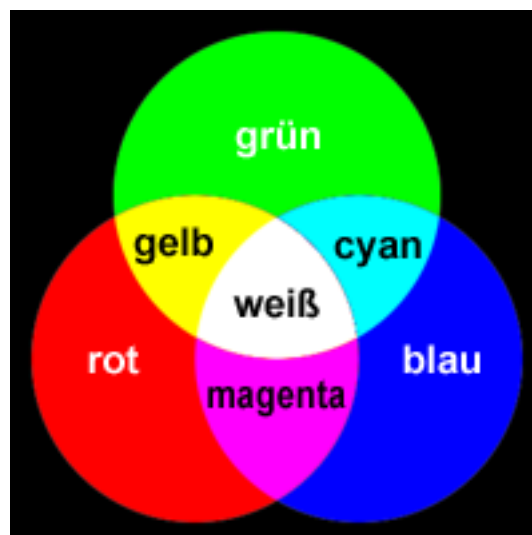
Bei analogem Fernsehen gibt es nun mehrere Standards, wie die Information der Pixel codiert wird bzw. ihre letzterer passiert. Diese sind Phase Alternate Line = PAL (Österreich, UK, Deutschland, ...), National Television Standards Committee = NTSC (USA), Sèquentiel En Couleurs Á Mèmoire = SECAM (Frankreich) (Die Übersetzungen, die ich gefunden habe divergieren etwas, ich glaub aber es heißt so viel wie „Farbfolge mit Speicher“, das erste Wort ist im Buch übrigens anscheinend falsch).

PAL wird in Frage 3 näher beleuchtet.

2. Was wissen Sie über die Farbdarstellung von Videosignalen?

Grundlage der Farbdarstellung der Videosignale ist die additive Farbmischung. Im Gegensatz zur subtraktiven Farbmischung, die beim Malen oder in der Photographie eingesetzt wird und bei der farbige Filter benutzt werden, kommen hier farbige „Lichtquellen“ zum Einsatz. Darum verhält es sich mit den Mischungen ein bisschen anders, als die meisten von uns das in der Schule gelernt haben.

Eine geometrische Darstellung für Farbmischungen ist in Abbildung 16.2 S.647 gezeigt, das folgende Bild ist etwa das selbe, nur um die Farben auch zu illustrieren. (Achtung: seitenverkehrt)



Grundsätzlich gibt es nun mehrere Darstellungsmöglichkeiten. Entweder die Farbinformation wird als Mischung von Rot, Grün und Blau dargestellt, oder – wie in Bild 16.2 gezeigt – als Sättigung und Farbton. Letztere Variante kann man sich als eine Art Polarkoordinatendarstellung vorstellen. Bei ihr muss dann aber zusätzlich noch die Helligkeit angegeben werden, es sind also immer 3 Zahlen notwendig.

In den praktischen Umsetzungen bei Fernsehbildern spielt immer die Abwärtskompatibilität zu Schwarzweiß-Fernsehern eine große Rolle. Es wird also die Helligkeitsinformation getrennt von der Farbinformation übertragen, was zum YUV-System führt. Die Realisierung sieht so aus, dass wenn R , G , B die Zahlen für Rot, Grün und Blau, und die Helligkeitszahl $Y = R + G + B$ ist, die beiden zusätzlichen, für die Farbkodierung verantwortlichen Zahlen U und V berechnet werden zu

$$U = 0.88(R - Y)$$

$$V = 0.48(B - Y)$$

Es wird dann bei der Umwandlung zurück in RGB so vorgegangen:

$$Y + U = R$$

$$Y + V = B$$

$$Y - U - V = G$$

3. Beschreiben Sie den PAL-Standard und vergleichen Sie diesen mit anderen Standards.

Der PAL-Standard arbeitet mit einer Bildfrequenz von 25 Pro Sekunde. Diese Bilder werden in zwei Felder zerlegt, wobei ein Feld nur die geraden Zeilen, und das andere nur die ungeraden Zeilen enthält. Insgesamt hat das PAL-Bild 625 Zeilen, von denen aber nur 575 sichtbar sind, der Rest besteht aus Synchronisationszeichen und Zusatzinformation wie Videotext.

Die Helligkeitsinformation wird wegen der Kompatibilität zum Schwarzweiß-Fernsehen als Spannungswert übertragen, die Farbinformation wird auf diesen aufmoduliert, mittels einer analogen Quadraturmodulation auf einem Träger von etwa $4 \frac{1}{2}$ Mhz. Auch das Audiosignal wird moduliert übertragen.

Wegen der Phasenempfindlichkeit der Quadraturmodulation kann es bei Phasenverzerrungen zu Farbfehlern kommen. Dieses Problem wird dadurch entschärft, dass aufeinanderfolgende Zeilen mit 180° gedrehter Phasenlage übertragen werden, der Fehler kann durch Mittelung also verkleinert werden. (Daher der Name Phase Alternate Line)

Um über einen Kanal mehrere PAL-Signale übertragen zu können, müssen diese natürlich moduliert werden, die Frequenzen hierfür liegen im 400-800MHz-Bereich bei terrestrischer und im 11GHz-Bereich bei Satelliten-Übertragung.

PAL ist eine Weiterentwicklung des NTSC-Verfahrens. Der Hauptunterschied der beiden ist das Verfahren der wechselnden Phasen, das in NTSC nicht vorhanden ist. Die dadurch entstehenden Farbfehler haben NTSC den Scherznamen „Never The Same Color“ eingebracht. NTSC hat eine leicht höhere Bildrate von 30 pro Sekunde, die Anzahl der Zeilen ist 525.

SECAM ist ebenfalls eine Weiterentwicklung von NTSC und entstand parallel zu PAL. Der Ansatz, das Phasenproblem zu lösen, ist hier ein anderer. Bei NTSC wird das Farbsignal nicht QAM sondern Frequenzmoduliert. Dies hat den Vorteil, dass die Übertragung Phasenunabhängig wird, jedoch den Nachteil, dass nicht zwei Signale gleichzeitig übertragen werden können. Es wird also immer nur eines der Farbdifferenzsignale pro Zeile übertragen, das andere muss aus dem Speicher übernommen werden. (Daher der Name)

4. Beschreiben Sie den Standard HDTV.

Das, was im Buch über HDTV steht, hat ja kaum etwas mit einem „Standard“ zu tun. Ich habe darum etwas recherchiert und habe folgende Informationen zu HDTV gesammelt:

- HDTV hat eine höhere Auflösung als das momentane Fernsehen, konkret etwa Faktor 2 bis 5 (Quotient aus den Bildflächen)
- HDTV hat ein Format von 16:9, da dies für das menschliche Auge besser geeignet ist.
- Für die Übertragung wurden zwar auch analoge Konzepte entwickelt, auf Grund der besseren Kompression und der einfacheren Übertragung wird es aber digital übertragen.
- Die Auflösungen, die sich scheinbar durchgesetzt haben sind 1280x720, 1920x1080 und 2048x1152.
- Die Bildwiederholraten sind 24, 30, 50, 60 pro Sekunde
- Als Bildkompression kommt MPEG2 zum Einsatz

Was wirklich ein Standard wird, hat sich meines Wissens nach noch nicht durchgesetzt. Sollte der Goiser hier einen Zettel ausgeteilt oder Zusatzinformation angegeben haben, bitte ich, mich zu benachrichtigen.