1. Einleitung

Die Amplidutenquantisierung erzeugt in vielen Anwendungen vernachlässigbare Fehler. Die Diskretisierung der Zeichtachse können wir nicht vernachlässigen, da sich in ihr die fundamentalen Unterschiede zwischen zeitdiskreter und zeitkontinuierlicher Signalverarbeitung manifestieren.

Vorteile:

- Exakte Reproduzierbarkeit ,(einfache Massenproduktion)
- Vernachlässigbare Bauteiltoleranzen, Temperatureinflüsse und Alterungseffekte
- Verlustfreie Speicherung und Übertragung von Signalen
- Komprimierte Speicherung und Übertragung von Signalen
- Verschlüsselte Speicherung und Übertragung von Signalen
- Effektivere Reduktion von Störungen bzw. Korrektur von Übertragungsfehlern
- Hochempfindliche und präzise Messmöglichkeiten mit verschiedenartigen Sensoren
- Präzise Regelung und Steuerung von Maschinen und Anlagen
- Populäre Anwendungen, geringer Leistungsverbrauch

Anwendungsbeispiele:

- Verarbeitung seismischer Signale
- Digitales Audio, digitale Kameras, Multimediaanwendungen im Internet
- Sonar (Sound Navigation and Ranging)
- Digitaler Rundfunk und digitales Fernsehen
- Digitale, mobile Kommunkation und Funknetzwerke
- Radar (Radio Detection and Ranging)

Systembeschreibung (Spezifikation) → Algorithmus ← Simulation (theoretische Methoden)
Toleranzprobleme: Einflüsse der endlichen Rechengenauigkeit (finite Precision Arithmetic)
High-Level Simulation. Simulationssprache: MATLAB, OCTAVE

2. Zeitdiskrete Signale

Nur zu diskreten Zeitwerten definiert.
Zeitindex n Є Z
Signalamplitude x Є R
Zeitdiskretes Signal: Folge x_n von Amplitudenwerten – reel, komplex, skalar oder vektoriell. Funktion x[n]. Es wird nicht zwischen Funktion und Funktionswert unterschieden.

Signalarten: deterministische, stochastische Signale, endlicher und unendlicher Länge. Unendliche Signale können aperiodisch und periodisch sein.

Aperiodische Signale:

- **Einsimpuls**: x[n] = δ[n] = 1 für n=0; 0 für n≠0
  Exakt realisierbar!
- **Sprungfunktion**: x[n] = σ[n] = 1 für n ≥0; 0 für <0
  Zusammenhang: δ[n] = σ[n] - σ[n-1]
- **einseitige Exponentialfunktion**: x[n] = a^n für n ≥ 0; 0 für n<0
  entspricht einer Sprungfunktion für a = 1
- **zweiseitige Exponentialfunktion**: x[n] = $a^{|n|}$
- **Gaußförmiger Impuls**: x[n] = $e^{-\alpha n^2}$; α>0

Periodische Signale: zeitliche Verschiebung des Signals ist mit dem Signal deckungsgleich. Periodendauer ist ganzzahlig: N Є N
x[n + mN] = x[n]

- **zeitdiskreter δ-Puls**: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n+kN]$ = 1 für n = 0, ±N, ±2N, ±3N,… ; 0 sonst
  zeitdiskrete äquidistante Verschiebungen eines Einsimpulses
- **komplexe Exponentialschwingung**: x[n] = $e^{j\Theta n}$ = cos Θ_0n + j sin Θ_0n
  Ist nur periodisch, wenn ein Θ_0 rationales Vielfaches von 2π ist.
  Vergrößerung von Θ_0 ergibt eine Zunahme der Oszillation, maximal Θ_0 = π. Darüber hinaus wird die Frequenz verringert, bis sie bei Θ_0 = 2π wieder 0 ist.
- **Harmonische Exponentialschwingungen**: x[n] = $e^{j2\pi/N\, kn}$; k= 0, 1, …., N-1
  Ex gibt **maximal N Harmonische**

Signalenergie: $E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$
Kann bei unendlich langen Signalen einen endlichen und unendlichen Wert haben
Mittlere Signalleistung ist als Grenzwert definiert und ist für Signale mit endlicher Energie Null.
Für Periodische Signale erfolgt die Bestimmung der Energie und Leistung über die Periodenlänge N:
$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$
$P_x = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$

Reelwertige, gerade Signale sind symmetrisch bezüglich n = 0: x[-n] = x[n]
Reelwertige, ungerade Signale sind antisymmetrisch zum Nullpunkt n = 0: x[-n] = -x[n]
Es kann jedes reelwertige unendlich lange Signal in einen geraden und ungeraden Anteil aufgespalten werden. Bei komplexwertigen unendlich langen Signalen erfolgt die Aufspaltung in einen konjugiert – symmetrischen und einen konjugiert antisymmetrischen Anteil.

2.2 Zeitachsentransformationen

Zeitverschiebung: Signalverzögerung (Zeitverschiebung des Signales nach rechts) x[n – k] oder Zeitvoreilung x[n + k]
Verzögerung ohne großen Aufwand realisierbar. Voreilung ist nicht kausal. Stört in der Simulation nicht, bei Echtzeitverarbeitung werden die Signale laufend von Peripheriegeräten eingelesen und können daher nicht voreilend aus dem Speicher ausgelesen werden.

Bei periodischen Signalen bewirkt die Verschiebung immer eine Phasenverschiebung, kann aber auf eine Periodendauer N beschränkt werden

Zeitinversion: x[-n]
Realisierbar durch Auslesen des Speichers in umgekehrter Reihenfolge. Zeitumkehr kann nur dann realisiert werden, wenn die Signale eine endliche Länge besitzen. Periodische Signale können jedoch ohne Einschränkung zeitinvertiert werden.

2.3 Fourierreihendarstellung periodischer zeitdiskreter Signale

- Fourierreihendarstellung hat nur endlich viele Harmonische, daher exakt berechenbar
- Keine Integrale
- Grundlage der DFT, die auf Signale endlicher Länge angewandt wird.
- Fourierreihen zeitdiskreter Signale können sehr effizient mit der FFT nummerisch berechnet werden.

Fourierreihendarstellung: allgemeines periodisches Signal mit Periodendauer N als Linearkombination von elementaren periodischen Funktionen (Basisfunktionen) beschrieben. Basisfunktionen sind die harmonischen Exponentialfunktionen.

$$x[n] = x[n+N] \sum_{k=0}^{N-1} c_k \, e^{j2\pi/N\, kn}; \; n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Vorteil: Koeffizienten können mit einer einfachen Formel berechnet werden. Bei anderen Basisfunktionen wäre der Rechenaufwand proportional zu N^3 statt N^2. Mit FFT sogar nur N $\log_2$ N.

$c_k = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} x[n] \, e^{j2\pi/N\, kn}; \; k = 0, 1, \ldots, N-1$

Fourierkoeffizienten c_k stellen das Linienspektrum des Signals x[n] dar. Der Index k wird als Frequenzindex bezeichnet, da k die diskreten Frequenzen als Vielfache der Grundfrequenz 2π/N durchnummeriert. Beim δ-Impuls erhalten wir ein konstantes Linienspektrum. Bei der Cosinusschwingung treten 2 Linien auf. Bei zeitdiskreten Signalen tritt das Gibbsche Phänomen bei der Aproximation von Sprungstellen auf wenn nicht alle N Glieder der Fourierreihe verwendet werden. Will man das Phänomen beobachten darf man nicht einfach alle Koeffizienten ab einem bestimmten k Null setzen, da bei reelwertigen Signalen die Werte von c_k eine Symmetrie aufweisen. Daher muss man die c_k-Werte symmetrisch im Bereich um N/2 Null setzen.

Symmetrieeigenschaften der Fourierreichendarstellung

Die Linienspektren weisen eine Symmetrie auf, sodass nur N/2 + 1 ($\frac{N+1}{2}$für N ungerade) Reihenkoeffizienten c_k benötigt werden.
Als vereinfachte **Fourierreihendarstellung für reelwertige Signale** x[n] erhalten wir

$$x[n] = c_0 + c_{N/2} \, (-1)^n + 2 \, \mathrm{Re}\{ \sum_{k=1}^{N/2-1} c_k \, e^{j2\pi/N\, kn} \}$$

Ungerade Periodendauer N:

$$x[n] = c_0 + 2 \, \mathrm{Re}\{ \sum_{k=1}^{N/2-1} c_k \, e^{j2\pi/N\, kn} \}$$

Parsevalsche Beziehung für periodische Signale

Die mittlere Signalleistung kann auch durch Summation der Betragsquadrate der Reihenkoeffizienten berechnet warden.

$P_x = 1/N \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$

Diese Beziehung wird als Parsevalsche Beziehung bezeichnet. Besteht ein Signal nur aus wenigen Spektrallinien, dann ist diese Berechnung wesentlich einfacher als die Summierung im Zeitbereich.

3. Zeitdiskrete Systeme

Wir betrachten auch schematisierte (idealisierte) Systeme: z.B. ein idealisiertes Tiefpassfilter, das spektrale Anteile eines Signals bis zur Grenzfrequenz unverändert lässt, obere Anteile jedoch eliminiert. Mit idealisierten Systemen können wir allgemein Aussagen über Signalverarbeitungssysteme machen, ohne die genaue Implementierung der Systeme zu kennen. In vielen Fällen bilden sie die Entwufsgrundlage für reale Systeme.

Einteilung nach Eigenschaften:

- Lineare Systeme wie z.B. linearer Mittelwertbilder,frequenzselektive Filter
- Nichtlineare Systeme (Minimum/Maximumdetekor, Einweggleichrichter, Betragsbilder, Quadratbilder)
- Zeitinvariante Systeme (mit zeitlich konstanten Systemparametern)
- Zeitvariante Systeme, wie z.B. Systeme mit Modulatoren, Systeme mit mehreren Taktraten (Multiratensysteme)
- Adaptive Systeme (automatische, zeitabhängige Anpassung von Systemparametern)

3.1 Beschreibung linearer, zeitinvarianter, zeitdiskreter Systeme im Zeitbereich

Ein zeitdiskretes System verarbeitet das Eingangssignal x[n] durch Anwendung eines zeitdiskret arbeitenden Algorithmus *T* {.} zu einem Ausgangssignal y[n]
y[n] = *T* {x[n]}
T… Systemoperator oder Transformation.
Voraussetzung: System ausschließlich durch das Eingangssignal angeregt. Realisierung: Löschung des Speichers des Systems vor Einschalten des Eingangssignals.
Bei **linearen Systemen** ist die Antwort auf eine Summe von Eingangssignalen gleich der Summe der Einzelantworten. (**Superpositionsprinzip**)
Für lineare Systeme lässt sich der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal unmittelbar herleiten, wenn wir das Eingangssignal als Summe zeitverschobener und gewichteter Einsimpulse nach der Beziehung x[n] = $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$ darstellen. Mit dem Superpositionsprinzip kommen wir auf y[n] = $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n,k]$ mit der Impulsantwort h[n,k] = *T*{δ[n-k]}
Das Eingangs/Ausgangsverhalten wird durch die Impulsantwort komplett charakterisiert. Im Normalfall hängt diese vom Zeitindex und Summationsindex ab, bei **zeitinvarianten Systemen** genügt die Beschreibung durch eine eindimensionale Funktion h[n], da = *T* { δ[n-k]} = h[n-k]. Bei zeitinvarianten Systemen ändert sich die Form des Ausgangssignales nicht, wenn das Eingangssignal zu verschiedenen Zeitpunkten angelegt wird. Es tritt lediglich eine Zeitverschiebung auf. Damit erhält man für **lineare, zeitinvariante Systeme** die grundlegende Eingangs/Ausgangsrelation, die **Faltungssumme** oder **Faltungsoperation**
y[n] = $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ = $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$
Systeme mit einer Impulsantwort endlicher Dauer werden als **F**inite **I**mpulse **R**esponse Duration Filter bezeichnet. Im Gegensatz dazu gibt es die **I**nfinite **I**mpulse **R**esponse Duration Filter mit unendlich langer Impulsantwort.
Die Systemantwort erhält man durch Verschiebung der zeitinvertierten Impulsantwort über das Signal. Die Impulsantwort wirkt daher als Fensterfunktion, die alle Eingangswerte innerhalb dieses Zeitfensters gewichtet. Die Dauer der Impulsantwort bestimmt das Gedächtnis des Systems. Lineare zeitinvariante Systeme ohne Gedächtnis sind statische Systeme und müssen daher eine Impulsantwort der Form h[n] = aδ[n] haben. Speicherlose Systeme reagieren verzögerungsfrei auf Eingangssignale. Für die Berechnung der Faltungssumme ist die Auswertung via **Summenformeln von Reihen** möglich, meist jene der geometrischen Reihen.
Die Faltung zweier Signale endlicher Dauer ergibt ein Signal, das länger als die gefalteten Signale ist.

.

.

.

Vorteil gegenüber nichtlinearen Systemen: bei linearen zeitinvarianten Systemen ist im Zeitbereich eine einzige Funktion h[n] ausreichend um die Systemantwort auf alle möglichen Eingangssignale zu bestimmen. Ein weiterer Vorteil ergibt sich bei der Zusammenschaltung linearer zeitinvarianter Systeme.

Parallelschaltung: Die Impulsantwort ist die Summe der Impulsantworten der Teilsysteme.

Kettenschaltung: Stabile Systeme sind vertauschbar.

$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]h_2[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[n-k]h_2[k]$

Für das Vertauschen der unendlichen Summen müssen diese Summen für Eingangssignale mit beschränkter Amplitude absolut konvergieren.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h\,[k]| < \infty$$

Dann spricht man von BIBO-stabilen Systemen BIBO = Bounded Input Bounded Output. Filter mit einer Impulsantwort endlicher Dauer (FIR-Filter) sind daher immer stabil.

Bei kausalen Systemen eilt die Systemantwort der Systemanregung nicht voraus. Sie hängt nur von vergangenen Eingangssignalwerten ab, also von Signalwerten x[n] zu Zeitpunkten $n \leq n_0$.

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n_0 - k]$

h[n] = 0 für n<0

Ein kausales Systemverhalten ist immer dann notwendig wenn Echtzeitverarbeitung angestrebt wird. Im Gegensatz zu zeitkontinuierlichen Systemen können wir bei zeitdiskreten Systemen die **Faltung auch direkt zur Realisierung verwenden.**

3.2 Beschreibung linearer, zeitinvarianter, zeitdiskreter Systeme im Frequenzbereich

Zur Untersuchung im Frequenzbereich werden die Systeme mit sinusförmigen Signalen angeregt. Durch Variation der Frequenz kann schrittweise der Frequenzgang des Systems bestimmt werden. Vorerst behandeln wir den eingeschwungenen Zustand des Systems und setzen voraus, dass das System stabil ist. Zur Untersuchung setzen wir eine komplexe Exponentialschwingung anstelle von Sinus- oder Cosinussignalen: $x[n] = e^{j\Theta n}$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\Theta n} = H(e^{j\Theta})\, e^{j\Theta}$

Die zeitliche Form des Eingangssignals wird nicht verändert. Nur Amplitude und Phase werden mit $H(e^{j\Theta})$ in Abhängigkeit von der Frequenz Θ modifiziert. Das ist eine Grundlegende Eigenschaft linearer, zeitinvarianter Systeme. Somit können die Frequenzgänge einfach durch Betrags- und Phasenmessungen bestimmt werden. Der **Frequenzgang** wird durch die **Übertragungsfunktion** $H(e^{j\Theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\Theta n}$ charakterisiert. Der Zusammenhang zwischen $H(e^{j\Theta})$ und h[n] wird als **Fouriertransformation für zeitdiskrete Signale** *FT*{.} bezeichnet. $H(e^{j\Theta}) = FT\{h[n]\}$

Sie beschreibt das Frequenzverhalten von aperiodischen Signalen ist im Gegensatz zur Fourierreihendarstellung eine kontinuierliche Funktion in der Frequenzvariablen Θ.

Die Übertragungsfunktion stellen wir in üblicher Weise mit **Betragsverlauf** und **Phasenverlauf** entsprechend $H(e^{j\Theta}) = A(\Theta)e^{j\phi(\Theta)}$ dar.

Ein Vorteil der Beschreibung zeitdiskreter Systeme im Frequenzbereich ist die leichte Erkennung der Filtercharakteristik und spezieller Frequenzen. Ein weiterer Vorteil ist die Beziehung zwischen den Spektren des Eingangs- und Ausgangssignals. Wir beschränken uns auf ein aperiodisches Eingangssignal und setzen voraus, dass die Signale absolut summierbar sind

$X(e^{j\Theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Theta n} = FT\{x[n]\}$

$Y(e^{j\Theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\Theta n} = FT\{y[n]\}$

Mit der Faltungsoperation folgt $Y(e^{j\Theta}) = H(e^{j\Theta})\, X(e^{j\Theta})$. Die Faltungsoperation entspricht damit einer Multiplikation des Eingangssignalspektrums mit der Übertragungsfunktion.

Einen ähnlichen Zusammenhang können wir auch für periodische Eingangssignale herleiten.

$y[n] = \sum_{l=0}^{N-1} d_l\, e^{j2\pi/N\, ln}$; n = 0, 1, …, N-1

Die Antwort des stabilen, linearen und zeitinvarianten Systems auf ein periodisches Signal ist ebenfalls periodisch, mit der gleichen Periodendauer N und den Fourierreichenkoeffizenten

$d_l = c_l \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j2\pi/N\, lk} = H(e^{j2\pi/N\, l})c_l$; l = 0, 1, …, N-1

Das Linienspektrum am Systemausgang ist gleich dem Linienspektrum am Systemeingang multipliziert mit der Übertragungsfunktion an den harmonischen Frequenzen.

Einschwingverhalten linearer, zeitinvarianter und zeitdiskreter Systeme

Will man Amplitudenmessungen (oder bei sinusförigen Signalen Phasenmessungen) am Systemausgang vornehmen, dann muss die Einschwingzeit des Systems abgewartet werden um Messfehler zu vermeiden. Wir setzen voraus, dass das **System kausal und stabil** ist.

Sprunghafte Systemanregung x[n] = σ[n]

Der Signalteil $y_\infty[n]$ ist das Ausgangssignal im eingeschwungenen Zustand, das bei der Sprungfunktion gegen den Gleichanteil strebt. Die Amplitude ist durch die Summe der Impulsantworten gegeben und kann auch Null sein. Der zweite Signalteil $y_t[n]$ist der transiente Vorgang,der bei einem stabilen System für n → ∞ gegen Null geht.

Einschwingzeit: Bei FIR-Systemen ist die Einschwingzeit gleich N – 1, d.h nach der Dauer N – 1 geht das System exakt in den eingeschwungenen Zustand über. Bei IIR-Systemen ist das nicht exakt erfüllt und wird daher die Einschwingzeit durch den Zeitpunkt N_t definieren, ab dem $|y_t[n]| \leq \varepsilon$ ist, wobei ε der absolute Fehler des eingeschwungenen Ausgangssinal ist. Den Zeitpunkt N_t erhält man durch nummerische Auswertung der Impulsantwort.

Analog können wir das Systemverhalten für **eingeschaltete, sinusförmige Eingangssignale** untersuchen. Der transiente Term hängt hier von der Frequenz des Eingangssignals ab. Bei IIR-Filtern kann die Einschwingzeit insbesondere für eingeschaltete, sinusförmige Signale mit Frequenzen nahe der Grenzfrequenz zwischen Durchlass- und Sperrbereich stark ansteigen.

Inverse Fouriertransformation

Die Fouriertransformation als Superposition von Exponentialschwingungen ist eine periodische Funktion in der Frequenzvariablen Θ und kann als Fourierreihendarstellung dieser kontinuierlichen, periodischen Funktion interpretiert werden, mit x[n] als Fourierreihenkoeffizienten. Damit erhalten wir die **inverse Fouriertransformation**, also die Darstellung von x[n] durch $X(e^{j\Theta})$ direkt als Formel für die Koeffizienten einer Fourierreihe:

$X[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Theta})\, e^{j\Theta n} d\Theta = FT^{-1}\{ X(e^{j\Theta}) \}$

Wir können das Ausgangssignal eines linearen, zeitinvarianten Systems entweder im Zeitbereich durch Faltung des Eingangssignales mit der Impulsantwort oder im Frequenzbereich durch Multiplikation der FT des Eingangssignales mit der Übertragungsfunktion und anschließender invertierter FT bestimmen.

4. Fouriertransformation für zeitdiskrete Signale und Systeme

Bei Signalen endlicher Länge existiert die FT immer, da wir nur Signale mit endlicher Amplitude betrachten.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x\,[n]| < \infty$$

Die FT existiert aber auch für Signale mit endlicher Energie, für die gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x\,[n]|^2 < \infty$$

Es ist allerdings zu beachten, dass für $X(e^{j\Theta})$ die **Konvergenz im quadratischen Mittel** erfolgt, wenn nur zweitere Gleichung erfüllt wird. Das bedeutet, dass die Approximation von $X(e^{j\Theta})$ durch die endliche Reihe $X\hat{}(m, e^{j\Theta}) = \sum_{n=-m}^{m} x\,[n]\ e^{-j\Theta n}$ beim Grenzübergang nur bei absolut summierbaren Signalen für $m \rightarrow \infty$ gegen die Fouriertransformation $X(e^{j\Theta})$ strebt. Die Abweichungen zeigen sich v.A. an Unstetigkeitsstellen, an denen das **Gibbsche Phänomen** auftritt.

Es ist wichtig die FT von komplexen Exponentialschwingungen zu kennen, da mit Signalen der Form $x[n] = e^{j\Theta 0n}$ z.B. eine Verschiebung im Frequenzbereich (Modulation) auftritt. Hier konvergiert die unendliche Reihe aber sicher nicht, wir vermuten daher, dass die FT aus Stoßfunktion (**Dirac-Funktion δ(t)**) besteht. Da die zeitdiskrete, komplexe Exponentialschwingung nicht periodisch ist können wir den allgemeinen Fall nicht als Fourierreihe darstellen. Die FT $X(e^{j\Theta})$ von $x[n] = e^{j\Theta 0n}$mit beliebigem Θ_0 muss eine kontinuierliche Funktion in Θ sein, die im Frequenzintervall $\Theta \in [-\pi, \pi]$ um die Frequenz Θ_0 „stark konzentriert" ist. Wir setzen also dort die Stoßfunktion mit der Fläche 2π an.

Somit können wir die FT für periodische, zeitdiskrete Signale angehen. Wegen der Verschiebung der δ-Impulse über das Frequenzintervall hinaus müssen wir hier die periodischen Fortsetzungen der FT berücksichtigen. Da die harmonischen Frequenzen ohnehin rationale Vielfache von 2π sind, ergibt sich die periodische Fortsetzung automatisch durch Ausdehnung der Summation von $-\infty$ bis ∞. Die Flächen der Stossfunktionen ergeben sich direkt aus den Fourierreihenkoeffizienten ($2\pi c_k$). Das Linienspektrum der Fourierreihendarstellung (c_k über dem Frequenzindex k dargestellt) entspricht daher einem Spektrum mit Dirac-Funktionen an den harmonischen Frequenzen $\Theta = 2\pi/N\ k$.

4.1 Eigenschaften der FT für zeitdiskrete Signale

Die Berücksichtigung grundlegender Eigenschaften kann zu einer Vereinfachung der Rechenschritte führen.

Linearität
Die FT und deren inverse Transformationen sind lineare Operationen. Es gilt das Superpositionsgesetz. $a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$ <-FT-> $a_1X_1(e^{j\Theta}) + a_2X_2(e^{j\Theta})$

Zeitverschiebung und Zeitinversion
Die Zeitverschiebung bewirkt im Frequenzbereich eine Phasenänderung des Fourierspektrums.
$x[n-N_0]$ =<-FT-> $e^{-j\Theta N0}X(e^{j\Theta})$
Für die Zeitinversion ergibt sich $x[-n]$ <-FT-> $X(e^{-j\Theta})$

Frequenzverschiebung (Amplitudenmodulation)
Die Frequenzverschiebung entspricht im Zeitbereich der Multiplikation des Signals mit einer komplexen Exponentialschwingung. $e^{j\Theta 0n}x[n]$ <-FT-> $X(e^{-j(\Theta-\Theta 0)})$

Symmetrie der FT bei reelwertigen Signalen
Damit der Integrand reelwertig ist muss folgende Symmetrie für die Fouriertransformationsfunktion erfüllt sein: x[n] reelwertig <-FT-> $X(e^{-j\Theta}) = X^*(e^{j\Theta})$

Konsequenzen:

- Realteil und Betrag der FT sind gerade Funktionen
- Imaginärteil und Phase der FT sind ungerade Funktionen
- Es genügt die Bestimmung der FT für $\Theta \in [0, \pi]$

Differenzieren im Frequenzbereich
nx[n] <-FT-> $j\,\frac{dX(e^{j\Theta})}{d\Theta}$

Faltungseigenschaft der FT
Die Faltungsoperation im Zeitbereich entspricht der Multiplikation der Spektren und umgekehrt. Spezialfall: Amplitudenmodulation

Parsevalsche Beziehung
$E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\theta})|^2 d\Theta$

Poissonsche Summenformel
Die poissonsche Summenformel bezieht sich auf die Eigenschaft der FT für zeitkontinuierliche Signale. Sie gibt den Zusammenhang zwischen zeitdiskreten und zeitkontinuierlichen Signalen an. Die Poissonsche Summenformel besagt, dass der Zusammenhang der Fourierreihendarstellung eines zeitkontinuierlichen Signals auch dann gilt, wenn x(t) nicht auf eine Periode zeitbegrenzt ist. Es kommt daher zu einer Überlappung der periodischen Fortsetzungen.

4.2 Abtastung und Rekonstruktion zeitkontinuierlicher Signale

4.2.1 Abtastung von Tiefpassignalen

Bei der Abtastung des zeitkontinuierlichen Signals $x_a(t)$ werden zu äquidistanten Zeitpunkten im Abstand T Signalwerte entnommen. Die Folge der Abtastwerte $x_a(nT)$ bildet das zeitdiskrete Signal x[n]. Die Abtastfrequenz f_s ist so gering wie möglich zu halten.
Das Spektrum des zeitdiskreten Signals ergibt sich direkt als periodische Fortsetzung des Analogsignalspektrums. Der Zusammenhang der Frequenz Θ zeitdiskreter Signale und jener zeitkontinuierlicher Signale ist $\Theta = \omega T = 2\pi f/f_s$. Wenn die Abtastfrequenz zu niedrig gewählt wird ist das analoge Signal aus dem abgetasteten Signal nicht rekonstruierbar. Dieser Effekt wird **Aliasing im Frequenzbereich** genannt. Es treten Verzerrungen des zeitdiskreten Signals in Form zusätzlicher Spektralanteile auf. Die **Bedingung für die richtige Wahl der Abtastfrequenz** $f_s > 2f_g$ setzt daher voraus, dass das zeitkontinuierliche Signal bandbegrenzt ist. Ist dem nicht der Fall muss ein TP-Filter vor der Abtastung eingesetzt werden. Eine exakte Bandbegrenzung ist nicht möglich, sodass immer ein Aliasing auftritt, was bei geeignetem Design aber vernachlässigbar gemacht werden kann.
Bei der **Rekonstruktion zeitkontinuierlicher Signale** müssen die periodischen Fortsetzungen des Spektrums mittels einer TP-Filterung, welche nur $|\omega| \leq w_g$ durchlässt, unterdrückt werden.
$$xa(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{x}[\mathrm{n}]\,\frac{\sin(\omega gt - n\pi)}{\omega gt - n\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{x}[\mathrm{n}]\,\frac{\sin(\omega g(t - nT))}{\omega g(t - nT)}$$
Diese beiden Gleichungen bilden zusammen das **Abtasttheorem nach Shannon**, das besagt, dass jedes bandbegrenzte analoge Signal ohne Informationsverlust aus seinen Abtastwerten rekonstruiert werden kann, wenn $f_s > 2f_g$.
Die sin(x)/x-Interpolationsfunktionen haben den Vorteil, dass bei bandbegrenzten Signalen die Interpolation exakt ist.

4.2.2 Abtastung von Bandpassignalen

Bandpassignale haben eine untere und obere Grenzfrequenz. Bei der Abtastung dieser Signale mit $f_s \geq 2f_u$ entstehen daher Lücken zwischen den periodischen Fortsetzungen im Spektrum. Es sind daher geringere Abtastfrequenzen möglich, wenn wir die Frequenz so wählen, dass die periodischen Fortsetzungen in die spektralen Lücken fallen. Im **Spezialfall** dass die untere Grenzfrequenz f_l ein ganzzahliges Vielfaches der Bandbreite $B = f_u - f_l$ ist. Hier ist die minimal mögliche Abtastfrequenz $f_s = 2B$. Das allgemeine Abtasttheorem für reelwertige Bandpassignale lautet $\frac{2fu}{k+1} \leq fs \leq \frac{2fl}{k}$

5. Differenzengleichungen und Z-Transformation

Grundlegende Elemente von zeitdiskreten Netzwerken sind Addierer, Multiplizierer (mit Konstanten) Modulator (Multiplizierer mit Signalen) und Verzögerungselemente (Speicher). Durch die Verbindung dieser Elemente entstehen Netzwerke, die entweder Rückkopplungen enthalten (**rekursive Systeme**) oder Strukturen ohne Rückkopplungen (**nichtrekursive Systeme**).
Nichtrekursive Systeme haben immer eine Impulsantwort h[n] endlicher Dauer und werden als FIR-Filter bezeichnet. Ihr Eingangs/Ausgangsverhalten wird durch eine Faltungssumme mit endlichen Summationsintervallen beschrieben.
Rekursive Systeme besitzen im Normalfall eine Impulsantwort unendlich langer Dauer (IIR-Filter) und damit ein unendliches Summationsintervall bei der Faltungsoperation.
Die Berechnung der Systemantwort erfolgt durch Aufstellung der **Differenzengleichungen**. Diese erhalten wir, indem für jeden Addierer die Gleichung für das Signal am Addierausgang angeschrieben wird. Bei mehreren Addierern erhalten wir mehrere Differenzengleichungen, wobei Zwischengrößen auftreten.

5.1 Lösung von Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wie bei Differentialgleichungen setzt sich die allgemeine Lösung aus dem Beitrag der Anfangsbedingungen und dem Einfluss des Eingangssignal zusammen. Die Systemantwort auf die Anfangsbedingungen $x[n] \equiv 0$ wird als **Nulleingangsantwort (Zero-Input Response)** $y_{zi}[n]$ bezeichnet. Die Antwort auf das Eingangssignal bei verschwindenden Anfangsbedingungen stellt die **Nullzustandsantwort (Zero-State Response)** $y_{zs}[n]$ dar. Wollen wir $y_{zi}[n]$ab dem Zeitpunkt $n_0 = 0$ und $n > 0$ eindeutig finden, dann müssen auch die N Anfangsbedingungen gegeben sein. So versuchen wir einen Ansatz mit einem exponentiellen Signal $y_{zi}[n] = \lambda^n$ mit komplexwertigem λ. Mit $y_{zi}[n-k] = \lambda^n \lambda^{-k}$ erhalten wir ein Polynom in λ^{-k}als nichttriviale Lösung, das als charakteristisches Polynom bezeichnet wird. Die Teilsignale λ_k^n werden als Eigenschwingungen des Systems bezeichnet. Dieser Lösungsweg ist recht langwierig, hat jedoch entscheidende Vorteile:

- An den Nullstellen erkennen wir sofort ob das System stabil ist, d.h. ob die Eigenschwingungen für $n \rightarrow \infty$ abklingen.
- Die sukzessive Lösung der Differenzengleichung kann wegen der Fehlerfortpflanzung nummerische Probleme aufweisen
- Das charakteristische Polynom bestimmt auch das Frequenzverhalten des Systems
- Der gewünschte Frequenzgang kann durch Polynomfunktionen appoximiert werden.
- Die Methode mit dem charakteristischen Polynom ist eng verwandt mit der Z-Transformation

Die Nullzustandsantwort folgt aus der Systemantwort, die wir aus der Faltung der Impulsantwort mit dem Eingangssignal erhalten.
Die komplette Lösung der Differenzengleichung ist die Summe von Nullzustands- und Nulleingangsantwort. Die Aufspaltung der Lösung ist der übliche Ansatz. Digitale Filter können beispielsweise durch richtiges Setzen des Anfangszustandes sofort einschwingen. In der Mathematik die Aufspaltung in die **homogene Antwort (Forced Response)** und **partikuläre Antwort (Forced Response)** üblich. Diese stimmen jedoch nicht mit Nullzustands- und Eingangsantwort überein, da die homogene Lösung alle Eigenschwingungen des Systems zusammenfasst und die partikuläre Lösung keine Eigenschwingungskomponenten besitzt, sondern nur die Form des Systems bestimmet.

5.2 Frequenzgang zeitdiskreter Netzwerke mit konstanten Koeffizienten

Wir können den Frequenzgang nicht nur als FT der Impulsantwort berechnen, sondern auch mit Hilfe von Differenzengleichungen, wenn wir verschwindende Anfangsbedingungen voraussetzen. Wir verwenden die Exponentialschwingung $x[n] = e^{j\Theta n}$ als Systemanregung und setzen die Systemantwort in die Differenzengleichung ein. Damit erhalten wir als **Übertragungsfunktion** des zeitdiskreten Netzwerkes mit konstanten Koeffizienten eine rationale Funktion. Die Nullstellen des

Zählerpolynoms vom Grad M bestimmen die Sperrstellen $z = z_{0k}$, bei denen $H(z_{0k}) = 0$ ist. Die Resonanzen (**Polstellen**) sind durch die N Nullstellen $z = z_{ook}$ des Nennerpolynoms festgelegt. Das Nennerpolynom stimmt mit dem charakteristischen Polynom überein.

5.3 Die Z-Transformation

Für die Existenz der FT muss x[n] absolut summierbar sein, wodurch wichtige Signale mit z.B. sin(x)/x-förmigem Verlauf zunächst ausgeschlossen sind.
Für die Analyse und Synthese realer Systeme bietet die Z-Transformation wichtige Vorteile. Es wird die Behandlung von Differenzengleichungen auf algebralische Methoden zurückgeführt.
$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = ZT\{x[n]\}$
$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\Theta n} = FT\{x[n]r^{-n}\}$
Die Z-transformierte des Signals x[n] entspricht der Fouriertransformierten von $x[n]r^{-n}$. Für $r > 1$ und $n > 0$ ergibt sich eine Signaldämpfung, die das Konvergenzverhalten der ZT gegenüber der FT verbessert. Jener Wertebereicht für den die ZT konvergiert wird als **Konvergenzbereich der ZT** bezeichnet.
Die ZT X(z) können wir uns als komplexwertige Funktion über der komplexen z-Ebene vorstellen. Wenn wir den Betragsverlauf der ZT entlang des Einheitskreises betrachten, dann erhalten wir den Amplitudenfrequenzgang des Signalspektrums mit Verstärkungen im Bereich von Polen und Abschwächungen in der Nähe von Nullstellen. Liegt eine Nullstelle des Zählers von X(z) am Einheitskreis, dann ist der Amplitudenfrequenzgang dort Null. Generell gilt, dass wir die ZT an einer Polstelle nicht auswerten können, da die Reihe nicht konvergiert. Der Konvergenzbereich der FT ist wesentlich stärker eingeschränkt: Liegt ein Pol am Einheitskreis, dann existiert die FT nicht, wir können aber dennoch eine FT durchführen, wenn wir Dirac-Funktionen im Spektrum vorsehen. Liegen die Pole außerhalb des Einheitskreises, dann konvergiert die Reihe nicht und die FT existiert nicht. Die ZT existiert für instabile Signale sehrwohl, wenn |z| im Konvergenzbereich liegt und eine ausreichende Dämpfung gewährleistet ist.
Das Pol/Nullstellendiagramm eines **kausalen und stabilen Signals** besitzt folgende Merkmale:

- Der Einheitskreis liegt im Konvergenzbereich $|z| > R_{min}$ (kleinster Polradius), bzw. alle Pole liegen innerhalb des Einheitskreises
- Der Konvergenzbereich enthält $z = \infty$.

Befindet sich der Einheitskreis nicht im Konvergenzbereich (z.B. für $|a| > 1$), dann liegt ein **kausales und instabiles Signal** vor. Kausale Signale werden auch als **rechtsseitige Signale** bezeichnet, die für $n < 0$ Null sind. Bei **linksseitigen Signalen** verschwindet x[n] für $n > 0$, sie sind daher nicht kausal, ebenso wie **zweiseitige Signale**, die Anteile für $n \geq 0$ und $n \leq 0$ haben.
Eigenschaften des Pol/Nullstellendiagramms eines **linksseitigen und stabilen Signals:**

- Der Einheitskreis liegt im Konvergenzbereich $|z| < R_{min}$ (kleinster Polradius), bzw. alle Pole liegen außerhalb des Einheitskreises
- Der Konvergenzbereich enthält $z = 0$.

Für den allgemeinen Fall **zweiseitiger Signale** können wir folgende Schlüsse ziehen:

- Es ergibt sich ein ringförmiger Konvergenzbereich $R_1 < |z| < R_2$
- Der Konvergenzbereich enthält weder $z = 0$, noch $z = \infty$
- Das linksseitige Signal wird durch Pole z_{oo} mit $|z_{oo}| > 1$ bestimmt
- Das rechtsseitige Signal wird durch Pole z_{oo} mit $|z_{oo}| < 1$ bestimmt

Signale endlicher Länge stellen einen wichtigen Sonderfall dar. Der **Konvergenzbereich** umfasst hier diegesamte z-Ebene mit Ausnahme des Ursprunges und $z = \infty$.

5.4 Inverse Z-Transformation

Indem wir davon ausgehen, dass die ZT die FT des Signals $x[n]r^{-n}$ ist erhalten wir die inverse ZT über die inverse FT. Das Integrationsintervall entspricht einem kreisförmigen Integrationsweg, der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Für die Auswertung des Ringintegrals verwenden wir Methoden der Funktionentheorie wie den **Residuensatz** oder bei Signalen, deren ZT rationalen Funktionen entsprechen, Tabellen aus der Formelsammlung. Bei rationalen Funktionen können wir durch **Partialbruchzerlegung** die Berechnung der inversen ZT auf elementare Terme zurückführen, die einfach in den Zeitbereich transformiert werden können.

5.5 Eigenschaften der Z-Transformation

Wir verwenden die ZT für zweiseitige Signale

Linearität
Die ZT erfüllt die Linearitätsbeziehung $a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$ <-ZT-> $a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$
Der Konergenzbereich für die Summe von 2 ZT mit ringförmigen Konvergenzbereichen ist der Überlappungsbereich der beiden Ringe.

Zeitverschiebung und Zeitinversion
$X[x-N_0]$ <-ZT-> z^{-N0} X(z)
Der Konvergenzbereich bleibt bei der Zeitverschiebung erhalten, mit Ausnahme eventueller zusätzlicher Pole bei z = 0 und z = ∞. Für die Zeitinversion ergibt sich x[-n] <-ZT-> X(1/z)

Frequenzverschiebung (Amplitudenmodulation)
Es ergibt sich wie bei der FT durch Multiplikation des Signals mit einer komplexen Exponentialschwingung eine Verschiebung im Frequenzbereich. $e^{j\Theta 0n}x[n]$ <-ZT-> $X(z\ e^{-j(\Theta-\Theta 0)})$
So ergibt sich eine Drehung von X(z) in der Z-Ebene um den Winkel Θ_0 entgegen dem Uhrzeigersinn. Dadurch wird auch die Lage der Pole und Nullstellen gedreht.

Symmetrie der ZT bei reelwertigen Signalen
x[n] reelwertig <-ZT-> X(z*) = X*(z)
Ist X(z) eine rationale Funktion, dann müssen als Konsequenz die Koeffizienten von Zähler- und Nennerpolynom reelwertig sein. Pole und Nullstellen müssen entweder reelwertig sein oder in konjugiert komplexen Paaren auftreten.

Differenzieren im Zbereich
nx[n] <-ZT-> $-z\,\frac{dX(z)}{dz}$

Faltungseigenschaft der ZT
Es gilt die Faltungseigenschaft der FT. Der Konvergenzbereich des Produkts der beiden Z-Transformierten ist der Überlappungsbereich der einzelnen Konvergenzbereiche.

5.6 Lösung von Differenzengleichungen mit der Z-Transformation

Wir erhalten durch Verwendung der ZT, mit der Zeitverzögerungen um N_0 Werte in Multiplikationen mit z^{-N0} übergeführt werden Polynome im Z-Bereich. Um die Anfangsbedingungen zu berücksichtigen wird die **einseitige oder unilaterale ZT** verwendet. Das Ergebnis besteht aus der Faltung des Eingangssignals mit der kausalen Impulsantwort (=Nullzustandsantwort) und der Nulleingangsantwort, die bei von Null verschiedenen Anfangsbedingungen vorhanden ist. In beiden Termen tritt das **charakteristische Polynom** auf.

5.7 Anfangs- und Endwerttheorem der einseitigen ZT

Soll bei **kausalen Systemen** x[0] endlich sein, dann muss auch X[z] für z → ∞ endlich sein. Daraus ergibt sich für rationale X(z), dass der Grad des Zählerpolynoms nicht größer als jener des Nennerpolynoms sein darf.

6. Digitale Filter

6.1 Idealisierte zeitdiskrete Filter

Idealisierte Filter haben einen rechteckförmigen Amplitudenfrequenzgang und einen Phasenverlauf gleich Null (Nullphasenfilter) oder linear für alle Frequenzen. Im Durchlassbereich wird das Eingangssignalspektrum nicht verändert, im Sperrbereich wird es vollständig unterdrückt. Sie sind nicht kausal und stabil und können durch die FT beschrieben werden, wobei an den Unstetigkeitsstellen das Gibbsche Phänomen auftritt. Die ZT existiert wegen den Unstetigkeitsstellen am Einheitskreis nicht.

Ideales TP-Filter
Die sin(x)/x förmige Impulsantwort ist nicht kausal, nicht absolut summierbar und weist eine gerade Symmetrie bezüglich $n = n_0$ auf. Die **äquivalente Dauer der Impulsantwort** t_h ist als jene Dauer definiert, die eine rechteckförmige Impulsantwort mit gleicher Signalsumme hat. Dieses Intervall ist gleich dem Abstand des ersten Nulldurchgangs der Impulsantwort vom Zeitpunkt des Maximums aus gemessen. Eine alternative Definition der äquivalenten Dauer der Impulsantwort kann über die Signalenergie erfolgen (Parsevalsche Beziehung). Sie ist ebenso gleich der **Einschwingzeit des Filters**. Als Einschwingzeit definieren wir bei einem TP-Filter die Übergangszeit der Sprungantwort vom niedrigen zum höheren stationären Signalwert.

Ideales HP-Filter
Der Frequenzgang ist komplementär des idealen TP-Filters. Wir erhalten ihn auch durch Verschiebung des TP-Frequenzganges. Dies entspricht einer Modulation der Impulsantwort mit $e^{j\pi n} = (-1)^n$. Die Impulsantwort zeigt ebenfalls eine gerade Symmetrie. Die Berechnung der äquivalenten Dauer der Impulsantwort müssen wir über die Signalenergie durchführen, da die Summe über alle Impulsantwortswerte Null ist. Das ideale HP-Filter eliminiert den Gleichanteil von Signalen. Die Sprungantwort ist gleich der Abweichung der Sprungantwort des TP-Filters von der Sprungfunktion.

Ideales Bandpassfilter
Ein ideales Bandpassfilter selektiert spektrale Anteile des Eingangssignals. Die Impulsantwort können wir mit der inversen FT berechnen. Sie zeigt wie die TP-Impulsantwort gerade Symmetrie und ergibt sich als cosinusförmig modulierte Tiefpassimpulsantwort. Die Modulationsfrequenz ist gleich der Mittenfrequenz des BP-Filters. Das TPF wird als **äquivalentes TPF des BPF** bezeichnet. Mit der Parsevalschen Beziehung können wir wieder die äquivalente Dauer der Impulsantwort berechnen. Die Berechung des Eingschwingverhaltens ist komplizierter. Wir berechnen erst die Sprungantwort und spezialisieren uns dann auf **Schmalbandsysteme** bei denen die Bandbreite wesentlich kleiner als die Mittenfrequenz ist. Dadurch ändert sich das Spektrum des Eingangssignales innerhalb des Durchlassbereiches nur sehr wenig und kann als konstant vorausgesetzt werden. Der Verlauf der Sprungantwort des schmalen BPF ist gleich der Impulsantwort, mit Ausnahme des phasenverschobenen Trägers. Amplitude und Phasenverschiebung der Sprungantwort hängen von der Mittenfrequenz des BPF ab.

Ideales Bandsperrfilter

Der Amplitudenfrequenzgang einer idealen Bandsperre ist komplementär zu jenem des Banspassfilters. Die Impulsantwort der BS kann nicht als Modulation der Impulsantwort eines äquivalenten HPF mit einem cos-förmigen Trägersignal interpretiert werden. Die Dauer der Impulsantwort berechnen wir mit der Parsevalschen Beziehung. Die Berechnung der Sprungantwort kann auf die Sprungantwort des BPF zurückgeführt werden. Da die Sprungantwort des BPF für $n \rightarrow \infty$ gegen unendlich geht, nimmt die Sprungantwort der BS im eingeschwungenen Zustand den Wert 1 an. Die BS verändert den Gleichanteil des Eingangssignals nicht. Der Einschwingvorgang erfolgt sprunghaft. Der Einfluss der Sprungantwort des BPF äußert sich in Form einer Welligkeit, die der Sprungfunktion überlagert ist.

Idaler Hilberttransformator

Breitbandiger 90°-Phasenschieber mit konstantem Betragsverlauf. Die Impulsantwort kann mit der inversen FT berechnet werden oder als Modulation der Impulsantwort eines idealen TPF interpretiert werden. Die Impulsantwort des Hilberttransformators ist unsymmetrisch gegenüber n_0. Die äquivalente Dauer der Impulsantwort wird auch über die Signalenergie berechnet.

6.2 FIR-Filterentwurf

FIR-Filter werden durch Differenzengleichungen ohne Rückkopplungen beschrieben. Die Filterkoeffizienten b_k sind gleich den Werten der Impulsantwort h[k]. Aus der Differenzengleichung ergibt sich direkt die Realisierung des **digitalen Transversalfilters** (Abb. 6.2). Die Pole eines FIR-Filters liegen alle bei z = 0. Diese Filter sind daher immer stabil. Die Approximation von Frequenzgängen erfolgt nur durch Verändern der Nullstellenlagen. Die Nullstellen liegen in der komplexen z-Ebene entweder direkt am Einheitskreis oder gespiegelt am Einheitskreis (im Sperrbereich). Diese Lage ergibt sich aus der Symmetrie der Impulsantwort.
Wir unterscheiden bei linearphasigen FIR-Filtern 4 Fälle:

1. N gerade, h[n] gerade symmetrisch, d.h. h[n] = h[N – 1 – n]
2. N ungerade, h[n] gerade symmetrisch
3. N gerade, h[n] ungerade symmetrisch, d.h. h[n] = -h[N – 1 – n]
4. N ungerade, h[n] ungerade symmetrisch

Da die Nullphasenkomponente eine reelwertige Funktion ist besitzen Filtertyp 1 und 2 einen linearen Phasengang.
Fall 3 und 4 benötigen nur etwa die Hälfte der Filterkoeffizienten. Das ergibt signifikante Rechenzeiteinsparungen.

6.2.1 FIR-Filterentwurf nach der Fenstermethode

Um aus den idealen Filtern realisierbare Filter zu machen verwenden wir eine **zeitliche Begrenzung der Impulsantwort**. Das erreichen wir, indem wir die Impulsantwort mit einer Zeitfunktion endlicher Dauer (**Fensterfunktion**) multiplizieren. Die Zeitverzögerung n_0 muss so gewählt werden, dass die Symmetrie gewährleistet wird. Das Zeitfenster bewirkt eine Verbreiterung der Übergangszonen zwischen Durchlass- und Sperrbereichen und oftmals eine Welligkeit als Abweichung vom rechteckförmigen Amplitudenfrequenzgang.
Die einfachste Form ist ein **Rechteckfenster** der Dauer N. Hier tritt leider das Gibbsche Phänomen auf, welches durch Wahl anderer Fensterfunktionen vermieden werden kann, allerdings auf Kosten der Breite der Übergangszonen. Eine der wichtigsten Fensterfunktionen ist das **allgemeine Cosinusfenster**. Das **Kaiser-Fenster** stellt einen empirischen Kompromiss zwischen Breite der FT des Fensters und der erzielbaren Sperrdämpfung dar.

6.2.2 Optimaler FIR-Filterentwurf mit dem Remenz-Algorithmus

Bei der Fenstermethode wird keine konstante Welligkeit im Durchlass- und Sperrbereich erzielt. In der Nähe der Sperrfrequenz ist die Dämpfung am kleinsten und nimmt bei einem TPF in Richtung halber Abtastfrequenz zu. Mit der **Tschebyscheff-Aproximation** erhalten wir approximierte rechteckförmige Frequenzgänge mit konstanter Welligkeit im Durchlassbereich und Sperrbereich.
Der Ausgangspunkt für das **Equi-Ripple Design** ist das Toleranzschema, dessen optimale Lösung sich ohne Spielraum innerhalb der schraffierten Grenzen bewegt (Abb 6.4). Ein Verfahren für den Entwurf ist der **Remenz-Algorithmus**. Hier wird die Nullphasenkomponente als Cosinuspolynom dargestellt. Die maximale Anzahl der Nullstellen ist 2 + N/2 -2. Mit den Extremwerten an den Bandkanten

ergeben sich maximal N/2 + 2 Extrempunkte. Der **Alternantensatz** besagt, dass ein Entwurf dann optimal ist, wenn insgesamt mindestens N/2 + 1 Extrema mit gleich großer Amplitude, jedoch alternierendem Vorzeichen auftreten. Der Remenz-Algorithmus ist robust und sehr schnell, kann jedoch wie alle Optimierungsverfahren unerwünschte Ergebnisse liefern („lokale Minima"),sodass das Ergebnis immer kontrolliert werden sollte.

6.3 IIR-Filterentwurf

Beim Standardentwurf gehen wir von analogen Referenzfiltern aus, wobei wir das 2π-Periodische Frequenzverhalten berücksichtigen müssen. Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt darin, dass wir für die gängigen Filtertypen optimale Lösungen in Form der **elliptischen Filter (Cauer-Filter) haben**.

6.3.1 Approximation der Impulsantwort

$h[n] = Th_a(nT)$. Die Skalierung der Impulsantwort mit T ist zweckmäßig. Damit der Frequenzgang möglichst gut übereinstimmt müssen wir entweder die f_a genügend groß wählen oder die $h_a(t)$ muss **hinreichend bandbegrenzt sein**, sonst tritt Aliasing auf. Bei der **Impulsinvarianzmethode** gehen wir von der Partialbruchzerlegung der Analogfilterübertragungsfunktion aus und beschränken uns auf den Fall einfacher Postellen. $H_a(s) \rightarrow h_a(t) \rightarrow h[n] \rightarrow H(z)$. Die Summe ergibt eine Parallelschaltung von Filterblöcken maximal zweiten Grades.

6.3.2 Bilineare Z-Transformation

Mit bandbegrenzter Impulsantwort lassen sich breitbandige Filter nicht optimal realisieren. Daher benötigen wir eine Transformation s → z, bei der die gesamte analoge Frequenzachse auf dem Einheitskreis abgebildet wird. Dies wird in Form der **bilinearen ZT** ermöglicht. Es wird die gesamte jω-Achse auf dem Einheitskreis der z-Ebene abgebildet, zusätzlich wird die linke s-Ebene auf das Innere des Einheitskreises abgebildet. Durch die Stauchung stimmen die Grenzfrequenzen des Analogfilters nicht mit denen der Digitalfilter überein. Die Amplitudenachse des Frequenzgangs bleibt unverzerrt. Das Design des Digitalfilters besteht im Auffinden einer geeigneten Analogfilterübertragungsfunktion. Analogfilter werden mit Filtertabellen oder –programmen im Normalfall als **normierte Analogfilter** bestimmt. **Tschebyscheff-Filter** liefern eine bessere Approximation von rechteckförmigen Frequenzgängen als **Butterworth-Filter**. Sie besitzen eine konstante Welligkeit im Durchlassbereich (Tschebyscheff I-Filter) oder im Sperrbereich (Tschebyscheff II-Filter).
Die Approximation eines rechteckförmigen Betragsfrequenzgangs mit konstanter Welligkeit (**Equi-Ripple Design**) kann mit **elliptischen Filtern** erreicht werden.
Bei der biliniaren ZT haben wir einen nichtlinearen Phasenverlauf, daher weist die Impulsantwort dieser Filter keine Symmetrie auf. Die Signalverzögerung ist stets kleiner als jene von kausalen, linearphasigen FIR-Filtern. Nullstellen **minimalphasiger Digitalfilter** müssen innerhalb des Einheitskreises oder am Einheitskreis liegen. **Streng minimalphasiger Digitalfilter** haben alle Nullstellen innerhalb des Einheitskreises und sind **invertierbar**.
Phasenverlauf und Betragsverlauf sind nicht unabhängig, sondern mit der Hilberttransformation verknüpft.

6.4 Realisierung von IIR-Filtern

Eie einfachste Realisierung von IIR-Filtern N-ter Ordnung ist die Verwendung der Differenzengleichungen. Wird eine geringe Genauigkeit, z.B. bei Festkommasignalprozessoren angestrebt ist die direkte Realisierung ungeeignet, da die Empfindlichkeit der Pol- und Nullstellen bei Filterkoeffizienten N > 10 eine hohe Genauigkeit erfordern.

Zusätzlich können durch die Quantisierung der Multiplikationen in den Rückkopplungsschleifen Schwingungen entfacht werden (**Grenzzyklen**). Daher setzt man bei reduzierter Rechengenauigkeit Verzögerungselemente ein, um die **Wortlängeneffekte** zu unterdrücken.
Eine Realisierung von IIR-Filtern höherer Ordnung durch Filterblöcke maximal 2. Ordnung wird durch die **Faktorisierung der Polynome** der Übertragungsfunktion erreicht. Jeder Block der Kaskadenschaltung kann mit einem Filterblock 2. Ordnung realisiert weden.
Bei der **Kaskadenform digitaler Filter** spielt die Reihenfolge der Filterblöcke und die Zusammenfassung konjugiert komplexer Pole und Nullstellen zu Filterblöcken 2. Ordnung keine Rolle. Eine übliche Regel ist die Kombination benachbarter Pole und Nullstellen, sodass die Signalverstärkung der Pole durch die Abschwächung der Nullstellen kompensiert wird.
Alternativ können wir die Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion verwenden. Diese führt auf die **Parallelform digitaler Filter**, wobei wieder konjugiert komplexe Polstellen zu Filterblöcken 2. Grades kombiniert werden. Bezüglich der Zusammenfassung der Pole und Nullstellen hat die Parallelform wesentlich weniger Freiheitsgrade, als die Kaskadenform. Die Sperrstellen kommen dadurch zustande, dass sich alle Ausgangssignale der Parallelpfade zu Null ergänzen. Diese Kombination ist sehr empfindlich gegenüber den Toleranzen der Filterkoeffizienten. Daher ergibt sich eine erhöhte Empfindlichkeit im Sperrbereich.

Ab 16 Bit Wortlänge ist die direkte Realisierung unbrauchbar, wogegen die Kaskadenform sehr gute Ergebnisse liefert.

7. Diskrete Fouriertransformation

Im Gegensatz zu Fourierreihen wird die DFT nur für Signale mit endlich vielen (N) Zeitpunkte verwendet. Solche Signale werden als **N-Punkte Signale** bezeichnet. Das Integral und die Summe der Fourierreihen werden durch je eine endliche Summe ersetzt, wenn wir nur diskrete Frequenzen zulassen, also eine **Abtastung im Frequenzbereich** vornehmen. Wenn das Signal zeitbegrenzt ist und die Anzahl der Frequenzpunkte groß genug gewählt wird gehen keine Informationen verloren.
Wir stellen das Signal x[n] als eine Periode von $\tilde{x}$[n] da. Die Fourierreihenkoeffizienten entsprechen bis auf den Faktor 1/N den Werten des Spektrums X[k] an diskreten Frequenzen. Durch die Abtastung im Frequenzbereich wird das Signal x[n] im Zeitbereich periodisch fortgesetzt. Nur wenn die Anzahl der Frequenzpunkte gleich oder größer der Länge N des Signals x[n] ist, ergeben sich keine Überlappungen im Zeitbereich (**Aliasing im Zeitbereich**).
Für die Analyse von Signalen mit der DFT und die Rekonstruktion mit der inversen DFT müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Das Signal muss auf N Punkte begrenzt sein
- Die Anzahl der Frequenzpunkte muss größer oder gleich N gewählt werden.

Ist das Signal nicht zeitbegrenzt, dann müssen wir das Signal vor der DFT-Anwendung mit einer Fensterfunktion multiplizieren.
Die Beziehungen der DFT stimmen abgesehen vom Faktor 1/N mit deren der FT überein, wenn wir uns x[n] periodisch mit N fortgesetzt denken.

7.1 Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation

Die Eigenschaften entsprechen größtenteils denen der FT, Unterschiede treten nur bei Verschiebungsoperationen der N-Punkte Signale auf.

Linearität
Die DFT und deren inverse sind lineare Operationen. Haben die Signale nicht die gleiche Länge muss das kürzere Signal mit Nullen auf die gleiche Länge gebracht werden.

Zeitverschiebung und Zeitinversion
Bei der Zeitverschiebung müssen wir bedenken, dass wir die Grundperiode des fortgesetzten Signales betrachtet haben. Somit erhalten wir eine zyklische Zeitverschiebung. Bei der Inversion erhalten wir wegen der Periodizität der DFT-Gleichungen: x[N-n] <-DFT-> X[N-k]

Fensterverschiebung (Amplitudenmodulation)
Die Frequenzverschiebung entspricht wie bei der FT einer Multiplikation des Signals mit einer komplexen Exponentialschwingung.

Symmetrie der DFT bei reelwertigen Signalen
Wie bei der FT wird folgende Symmetriebeziehung für reelwertige Signale erfüllt: x[n] reelwertig <-DFT-> X[N-k] = X*[k]
Konsequenzen:

- Realteil und Betrag der DFT sind gerade Funktionen
- Imaginärteil und Phase der DFT sind ungerade Funktionen
- Es genügt die Bestimmung der DFT für k = 0, 1,…, [N/2]

Zyklische Faltung mit der DFT
Es gilt ein ähnlicher Zusammenhang wie die Faltungseigenschaft der FT. Wir müssen jedoch beachten, dass bei einer Zeitverschiebung die periodische Fortsetzung des Signals zur Anwendung kommt, d.h. die Zeitindizes sind mit der Moduloperation zu verknüpfen. Bei dieser **zyklischen Faltung** haben alle Signale die gleiche Länge N. Für die Realisierung der normalen Faltung mit Hilfe der

zyklischen Faltung müssen alle Signale durch Auffüllen mit Nullen auf die Länge des Eingangssignales gebracht werden.

Parsevalsche Beziehung
Wieder gleicht die Gleichung bis auf den Faktor 1/N der FT-Gleichung:
$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$

7.2 Zusammenhang DFT und Z-Transformation

Die Beziehung zwischen DFT und ZT ergibt sich durch Abtastung der Z-Transformierten X(z) eines N-Punkte Signals x[n] am Einheitskreis. Dies wird in erster Linie für die **Realisierung schmalbandiger digitaler Filter** verwendet. Die DFT Übertragungsfunktion H[z] dieser Filter ist gleich den Abtastwerten der Übertragungsfunktion der Z-Transformation. Diese Übertragungsfunktion ist bei Schmalbandfiltern nur in einem engen Durchlassbereich von Null verschieden, daher werden weniger Rechenoperationen benötigt als bei FIR-Filtern. Eine weitere Anwendung ist die Berechnung der FT für beliebige Frequenzen Θ aus den Werten X[k] der DFT, also die **Interpolation im Frequenzbereich**.

7.3 Fenstereffekt bei der DFT

Wir können nicht zeitbegrenzte Signale nur dann mit der DFT analysieren, wenn die DFT-Länge gleich oder ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer ist. In allen Anderen Fällen treten Abweichungen (**Fenstereffekte,** z.B. **Leakage**) auf. Diese Effekte können durch Multiplikation mit einer Fensterfunktion beeinflusst werden, da diese die Amplituden am Signalanfang und –ende abschwächen und damit z.B. bei sinusförmigen Signalen die spektralen Nebenlinien reduzieren. Die Breite der Hauptlinien wird jedoch vergrößert.

7.4 Overlap-Add und Overlapp-Save Methode

Beliebig lange Signale müssen für die Faltung mit der DFT zeitbegrenzt werden. Wir unterteilen diese Signale in Blöcke und verarbeiten diese der Reihe nach. Durch die Faltungsoperation verlängern sich die Blöcke, sodass die Faltungsergebnisse überlappend zusammengesetzt werden müssen

Overlap-Add Methode
Hier wird das Eingangssignal x[n] in aufeinanderfolgende nicht überlappende Blöcke x_m der Länge L unterteilt. Damit ist die Anzahl der Blöcke $N_b = N_x/L$ ganzzahlig. Ansonsten fügen wir wieder Nullen an das Signal an. Jeder Block wird mit der Impulsantwort gefaltet und das Ausgangssignal y[n] ist die Summe über die Blockausgangssignale (Faltungsergebnisse) $y_m[n]$. y_m hat für jeden Block die Länge $N_f = L + N_h - 1$. Da $x_m[n]$ und h[n] eine kleinere Länge haben, werden beide Signale mit Nullen aufgefüllt.

Overlap-Save Methode
Hier brauchen wir keine Addition der blockweisen Faltungsergebnisse. Die Blöcke des Eingangssignals überlappen um $N_h - 1$ Zeitpunkte. Es werden daher $N_h - 1$ Zeitpunkte zwei Mal gefaltet: Einmal am Ende des aktuellen Blocks und einmal am Anfang des nächsten Blocks. Der Trick ist die Verwendung der DFT-Länge gleich der Blocklänge. Das Ergebnis der zyklischen Faltung entspricht daher nicht jenem der normalen Faltung überein. Von den Faltungsergebnissen werden daher die ersten $N_h - 1$ Werte nicht verwendet, sondern nur M Werte ohne Überlappung aneinander gereiht.

Um bei beiden Methoden die gleiche FFT-Länge N_f zu erhalten wird man den Parameter M und die Blocklänge L gleich wählen

7.5 Die schnelle Fouriertransformation (FFT)

Beim **Dezimation-in-Time FFT-Algorithmus** ist der Rechenaufwand (Komplexität O) N $\log_2$ N, im Gegensatz zu N² bei der DFT. Wir spalten das (ggfs. komplexertige) Eingangssignal x[n] auf und führen die N Punkte DFT X[k] in zwei N/2-Punkte DFTs X_1[k] und X_2[k] über - im **Signalflussgraphen** in Form eines **Butterfly.** Bei Signalflussgraphen gibt es nur Knoten und gerichtete Pfade. Zu einem Addierer führen mindestens 2 Pfade hin, bei einem Verzweigungsknoten ein Pfad hin und alle anderen weg vom Knoten. Die Multiplizierer sind in den Pfaden enthalten, wobei der Koeffizient beim Pfad angegeben wird. Pro Butterfly sind eine komplexe Multiplikation und zwei komplexe Additionen/Subtraktionen notwendig, wir sparen somit eine Multiplikation. Wir können da N eine Zweierpotenz ist die DFT so lange aufspalten, bis wir ein System aus 2-Punkte DFT-Blöcken erhalten.
Die Indizes der Eingangswerte des FFT-Signalflussgraphen treten **bit-reversed** auf und müssen daher (bei modernen Prozessoren in Hardwareausführung, damit die Adressierung keine Zeit kostet) umsortiert werden.

8. Multiratensignalverarbeitung

Im Gegensatz zur **Einfachtaktverarbeitung** werden bei **Mehrfachtakt- oder Multiratenverarbeitung** unterschiedliche Taktraten in Systemen verwendet. Diese Systeme sind normalerweise zeitinvariant, eine Beschreibung durch die Faltungsbeziehung mit eindeutiger Impulsantwort ist nicht mehr gegeben. Anwendungsbeispiele sind MPEG-Encoder und Decoder, digitales Radio und Fernsehen, Digitalmischpulte für Audioaufnahmen und die Signalverarbeitung in Mobilfunkgeräten.
Ein **Taktratenumsetzer (sampling-rate converter)** wäre via Rückwandlung des digitalen Eingangssignals in ein Analogsignal, gefolgt von einer Abtastung mit der Abtastrate realisierbar. Dieser Weg ist aber ineffizient und führt zur Verschlechterung des Dynamikverhaltens durch Quantisierungsfehler und durch Einflüsse der verwendeten Analogfilter.
Wir sprechen von **Interpolation**, wenn die Taktrate am Systemausgang größer als jene am Eingang ist, im umgekehrten Fall von **Dezimation**.

8.1 Beschreibung von Multiratensystemen im Zeitbereich

Bei exakt bandbegrenzten Analogsignalen hat die Interpolationsfuntkion g(t) den Verlauf g(t) = T sin(πt/Tt)/(πt) entsprechend der Impulsantwort eines idealen, analogen TPF mit $\omega_g = \pi/T$. Wenn wir $x_a(t)$ mit einem anderen Abtastintervall T_y abtasten erhalten wir mit $y[n] = x_a(nT_y)$.
$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]g(nT_y - mT_x)$
Wir haben nun weder eine Faltungsbeziehung, noch ein zeitinvariantes System. Wir müssen die Funktion g(t) sehr gut kennen da die Zeitpunkte t[n,m] beliebige Werte annehmen können. Bei rationalen Faktoren $R = T_x/T_y = L/M$ ergeben sich jedoch ganzzahlige Vielfache eines Zeitintervalls. In diesem Fall brauche wir nur äquidistante, zeitdiskrete Werte g[n] der Interpolationsfunktion g(t) und können somit den Taktratenumsetzer einfach als zeitdiskretes System realisieren.
Für die Bestimmung von h[n,m] aus g(t) müssen wir 2 Fälle unterscheiden:
Interpolation: ($T_y < T_x$, bzw. L > M)
Es wird kein Aliasing auftreten, da x[n] aus einem mit ω_g bandbegrenzten Analogsignal erzeugt wird.
Dezimation: ($T_y > T_x$, bzw. L < M)
Hier muss x[n] eine kleinere Bandbreite aufweisen, damit kein Aliasing auftritt. Wir bekommen die Grenzfrequenz $\Theta_g = \min(\pi/L, \pi/M)$

8.2 Beschreibung von Multiratensystemen im Frequenzbereich

Eine direkte Transformation in den Frequenzbereich ist nicht möglich, da die Eingangs/Ausgangsbeziehung keine Faltungsbeziehung ist und sich somit die FT des Ausgangssignals nicht durch Multiplikation des Eingangssignalspektrums mit der Übertragungsfunktion ergibt.

Interpolation mit ganzzahligen Faktoren
Für M = 1 und L ∈ N erhalten wir die Interpolation mit dem ganzzahligen Faktor L. Wir können diese durch Einfügen von L – 1 Nullen (entspricht der Erhöhung der Abtastrate) zwischen den Eingangssignalwerten und anschließender linearer, zeitinvarianter Filterung mit der Impulsantwort g[n] darstellen. Wir haben die sin(x)/x-förmige Interpolationsfunktion, welche einer TP-Filterung entspricht verwendet, das Filter kann also beispielsweise durch ein FIR-Filter approximiert werden. Das Spektrum des Zwischensignals w[n] entsteht durch Kompression des Eingangssignalspektrums. Das Spektrum am Ausgang erhalten wir durch ideale TP-Filterung, wodurch die periodischen Fortsetzungen unterdrückt werden.

Dezimation mit ganzzahligen Faktoren
Das Ausgangssignal des Dezimators ergibt sich durch Kaskadenschaltung eines linearen, zeitinvarianten Filters (Selektion des Frequenzbereichs) und einer Taktratenreduktion, bei der nur jeder M-te Wert des Filterausgangssignals verwendet wird. Das erreichen wir durch Multiplikation

mit einem δ-Puls, der zu jedem M-ten Wert 1 und sonst 0 ist. Diese Abtastratenreduktion kann als **Unterabtastung** des zeitdiskreten Signals w[n] interpretiert werden.
Wenn wir reale Filter mit endlicher Flankensteilheit und Sperrbereichsdämpfung verwenden, dann wird bei der Abtastung analoger Signale Aliasing auftreten, deren Einfluss durch geeignete Dimensionierung des Filters in den Anwendungen vernachlässigt werden kann.

Taktratenumsetzung mit rationalen Funktionen
Zur Frequenzbereichsdarstellung von Taktratenumsetzern mit rationalen Faktoren $R = Z_X/T_Y = L/M$ können wir die Interpolation mit dem Faktor L und die Dezimation mit dem Faktor M in Form einer Kettenschaltung kombinieren. Mit dem Filter mit der Impulsantwort g[n] muss eine ausreichende Bandbreitenbegrenzung vorgenommen werden, damit bei der Dezimation kein Aliasing auftritt. Wir wählen somit ein TPF mit der Grenzfrequenz $\Theta_g = \min(\pi/L, \pi/M)$

8.3 Effiziente Multiratensysteme

Systeme mit rationalen Faktoren sind aufgrund des Auffüllens mit Nullen nicht effizient.

8.3.1 Taktratenumsetzung mit digitalen Abtast-Halte-Elementen

Der Fall L < M entspricht einer Taktratenreduktion (**Abtastfunktion**), L > M einer Taktratenerhöhung (**Haltefunktion**). Es wird immer der zeitlich zuletzt aufgetretene Eingangssignalwert an den Ausgang übernommen, weswegen dieses Schaltungselement einfach durch ein Register realisiert werden kann, dass alle T_x Sekunden mit einem x[n] Wert geladen wird. Durch das Auslassen bzw. Wiederholen von Signalwerten ist das digitale S-H-Element natürlich kein idealer Dezimator oder Interpolator, da Sprünge am Ausgangssignal auftreten.
Wir erhalten einen idealen Taktratenumsetzer, wenn wir das digitale Abtast-Halte-Element in die Eingangs/Ausgangsbeziehung einbauen. Die Koeffizienten h[n,k] sind periodisch in n und ergeben sich unmittelbar aus der Interpolationsfunktion g[n] oder aus der Approximation durch eine FIR-Filterimpulsantwort. Die Eingangswerte x[n] werden mit dem Taktintervall T_x in die Kette von Verzögerungselementen gespeichert. Die Speicherinhalte werden alle T_x Sekunden weitergeschoben. Die Verarbeitung der Signalwerte an den Ausgängen erfolgt mit dem Abtastintervall T_y, wobei für jeden Ausgangszeitpunkt ein eigener Koeffizientensatz h[n,k] bei den Multiplikationen zum Einsatz kommt (zeitvariantes System!). Wegen der Periodizität von h[n,k] wiederholt sich der Koeffizientensatz alle L Ausgangsabtastintervalle.
Im Vergleich des Taktratenumsetzers mit S-H-Elementen mit den zuvor behandelten zeigt signifikante Einsparungen an Arithmetik- und Speicheroperationen: Wir brauchen für ein Signal der Dauer N_x nun N_xN_g/M Arithmetikoperationen, statt wie zuvor N_xN_gL/M mit $N_g = NL$. Wir benötigen auch nur $N = N_g/L$ Speicherelemente statt wie zuvor N_g

8.3.2 Multiratensysteme mit Polyphasenerlegung

Wir gehen von der Darstellung mit S-H-Elementen und dem Fall der **Interpolation mit einem ganzzahligen Faktor L** aus.
Wir können y[mL] mit einem linearen und zeitinvarianten Filter mit der Impulsantwort $p_0[k]$ berechnen, das gilt auch für die anderen Zeitpunkte n = mL + l am Ausgang des Interpolators. Wir erhalten damit ein System mit L parallel geschalteten zeitinvarianten und linearen Filtern $p_l[k] = g(l+nL)$, die durch einen **Kommutator** (Stufenschalter) ausgewählt werden.
Der Vorteil dieser Anordnung ist, dass alle Filter mit der niedrigen Eingangstaktrate betrieben werden, erst durch den Kommutator erfolgt die Taktratenerhöhung.
Diese Filter werden als Polyphasenfilter bezeichnet, da die Impulsantworten $p_l[n]$ unterabgetastete und zeitlich verschobene Versionen der Impulsantwort g[n] sind. Polyphasenfilter haben einen **konstanten Betragsverlauf** und unterscheiden sich im Frequenzbereich nur durch den Phasenverlauf.

Achtung! Die letzten paar Seiten des Buches fehlen, hatte keine Lust mehr ;-)