ZUNAME: Vans

VORNAME: ....

MAT. NR.: ....

1. SuS2 TEST A

Institut für Nachrichtentechnik
und Hochfrequenztechnik
G. Doblinger 20.4.2005

Bitte beachten Sie:

- An schriftlichen Unterlagen darf nur die SuS2-Formelsammlung verwendet werden!
- Die Beispiele ausschließlich auf den Seiten dieser Angabe ausarbeiten. Zusatzblätter werden ignoriert!
- Eine lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung ist eine Voraussetzung für die positive Beurteilung Ihrer Arbeit!
- Mobiltelefone müssen während des Tests ausgeschaltet sein!

	Punkte
1	
2	
3	
Σ	

1. BEISPIEL (33 Punkte)

Das abgebildete System ist ein Multiplizierer mit periodischen, zeitdiskreten Signalen an den beiden Eingängen ($\delta[n]$ ist der Einsimpuls):

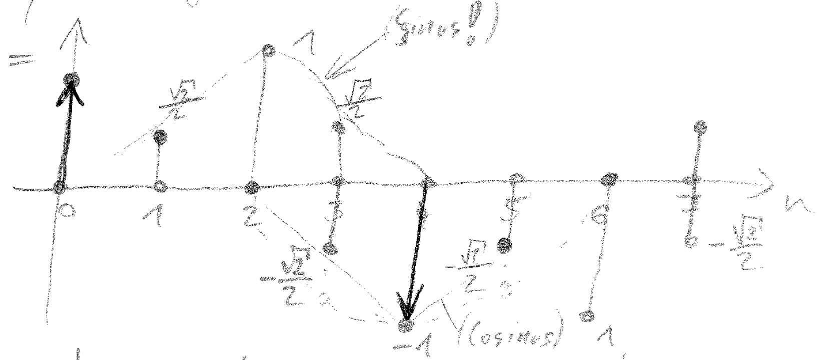
$$x[n] \longrightarrow \otimes \longrightarrow y[n]$$

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$$

Das Eingangssignal sei $x[n] = \cos\frac{\pi}{4}n + \sin\frac{\pi}{4}n$ ($\forall n$).

a) **Berechnen und skizzieren** Sie das Ausgangssignals $y[n]$.

$y[n] = p[n] \cdot x[n]$



• ... sinus
• ... cos

jeder 4te Wert wird abgetastet

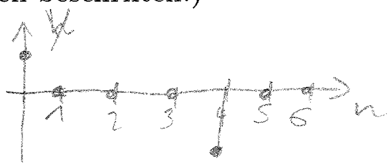
$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ bei Abtastung 0

$\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ bei Abtastung 1 $\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k \cdot \delta[n-4k]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot \delta[n-4k]$$

$y[n] = \delta[n] - \delta[n-4] \qquad n = 0 \dots 7$

Skizze: (Achsen beschriften!)



b) Bestimmen Sie die Periodendauer N_y und **berechnen** Sie die Fourierreihenkoeffizienten $c_y[k]$ von $y[n]$.

$$\frac{\pi}{4} n \mathrel{\hat{=}} \frac{2\pi}{N} \cdot n \Rightarrow N_y = 8$$

$N_y = 8$

$$c_y = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} k \cdot n}$$

$$y[n] = \delta[n] - \delta[n-4]$$

$$\left.\begin{array}{l} n=0 \\ n=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c_y = \frac{1}{8} \cdot \left(1 - (-1)^k\right)$$

weil: $c_y = \frac{1}{8} \cdot \sum_{n=0}^{7} \left(\delta[n] - \delta[n-4]\right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8} \cdot kn}$

$n=0: \quad e^{-j\frac{2\pi}{8} \cdot 0 \cdot k} = 1$ $\qquad$ $\delta[n]$ hat Gewicht von 1

$n=4: \quad e^{-j\frac{2\pi}{8} \cdot 4k} = e^{-jk \cdot \pi} = (-1)^k$

$$\Rightarrow c_y = \frac{1}{8} \cdot \left(e^{-j0 \cdot k} - e^{-jk \cdot \pi}\right) = \frac{1}{8} \cdot \left(1 - (-1)^k\right)$$

$c_y[k] = \frac{1}{8} \cdot \left(1 - (-1)^k\right) \qquad , k = 0, \ldots, 7$

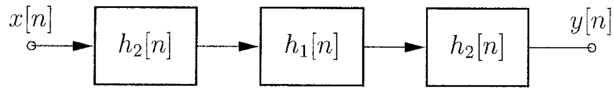
c) **Berechnen** Sie $E_y = \frac{1}{N_y} \sum_{n=0}^{N_y - 1} |y[n]|^2$

über $E_y = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \frac{1}{4}$

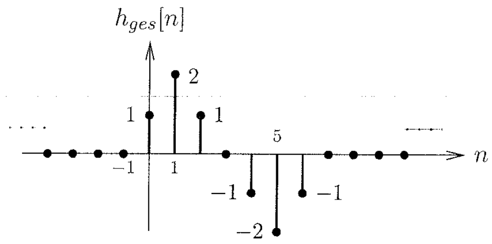
$E_y = \frac{1}{4}$

2. BEISPIEL (34 Punkte)

Das abgebildete System besteht aus linearen, zeitinvarianten und stabilen Teilsystemen.



Das **Gesamtsystem** habe folgende Impulsantwort:



Zusätzlich ist noch die Teilimpulsantwort $h_2[n]$ bekannt:

$$h_2[n] = \sigma[n] - \sigma[n-2]$$

($\sigma[n]$ ist die zeitdiskrete Sprungfunktion).

a) **Berechnen** und **skizzieren** Sie die Impulsantwort $h_1[n]$ des verbleibenden Teilsystems.

$h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$

$h_{ges}[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-4] - 2\delta[n-5] - \delta[n-6]$

$h_3[n] = (h_2 * h_2)[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$
$= \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

Faltung mit $\delta[n-m]$ führt zur Zeitverschiebung um m!

$h_{ges} = h_1 * h_3 \Rightarrow h_3$ mit h_{ges} vergleichen

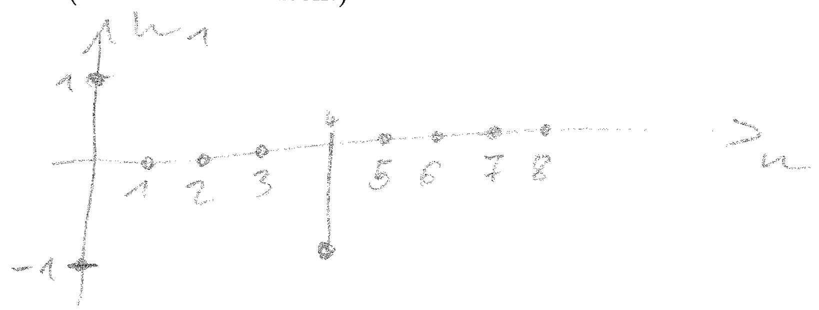
$\Rightarrow h_{ges} = h_3[n] - h_3[n-4]$

Überlegung wie h_1 aussehen muß, damit Faltung von h_1 und h_3 h_{ges} ergibt!

$\Rightarrow h_1 = \delta[n] - \delta[n-4]$

$h_1[n] =$ $\delta[n] - \delta[n-4]$

Skizze: (Achsen beschriften!)



b) **Berechnen** und **skizzieren** Sie die Antwort $y[n]$ des Gesamtsystems auf das Eingangssignal $x[n] = \delta[n] + \delta[n-4] + \delta[n+4]$ ($\delta[n]$ ist der Einsimpuls).

$y[n] = h_{ges}[n] * x[n]$

Faltung mit $\delta[n-m]$ führt zur Zeitverschiebung um m!

[illegible]

$\Rightarrow y[n] = h_3[n+4] - h_3[n-8]$

$y[n] =$

Skizze: (Achsen beschriften!)

3. BEISPIEL (33 Punkte)

Von einem digitalen Filter ist folgende Impulsantwort gegeben:

$$h[n] = \frac{\sin[\frac{\pi}{3}(n-2)]}{\pi(n-2)}, \quad \forall n.$$

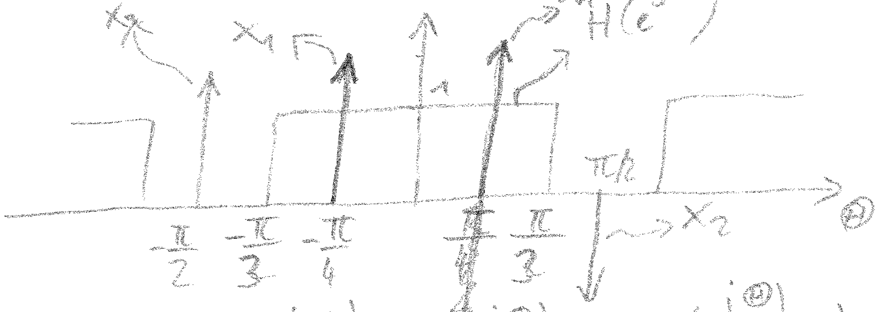
$H(e^{j\Theta}) = e^{j\Theta \cdot 2} \cdot \mathrm{rect}_{2\pi}\left(\frac{\Theta}{\frac{2\pi}{3}}\right)$

Berechnen Sie für die angegebenen Eingangssignale $x[n]$ das jeweilige Filterausgangssignal $y[n]$ und dessen Fouriertransformation $Y(e^{j\theta})$.

a) $x[n] = \underbrace{\cos\frac{\pi}{4}n}_{x_1} + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}n}_{x_2}, \quad \forall n$

$X_1(e^{j\Theta}) = \cancel{\mathrm{rect}\left(\frac{\Theta}{\pi}\right)} \pi\, \delta_{2\pi}\left(\Theta - \frac{\pi}{4}\right) + \pi\, \delta_{2\pi}\left(\Theta + \frac{\pi}{4}\right)$

$X_2(e^{j\Theta}) = \frac{\pi}{j}\, \delta_{2\pi}\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{j}\, \delta_{2\pi}\left(\Theta + \frac{\pi}{2}\right)$



$\Rightarrow X_1(e^{j\Theta}) \cdot H(e^{j\Theta}) = Y(e^{j\Theta}) \Rightarrow Y(e^{j\Theta}) = X_1(e^{j\Theta})$

$y[n] = \cos\frac{\pi}{4}(n-2)$

$Y(e^{j\theta}) = e^{j\Theta 2} \cdot \left[\pi\, \delta_{2\pi}\left(\Theta - \frac{\pi}{4}\right) + \pi\, \delta_{2\pi}\left(\Theta + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

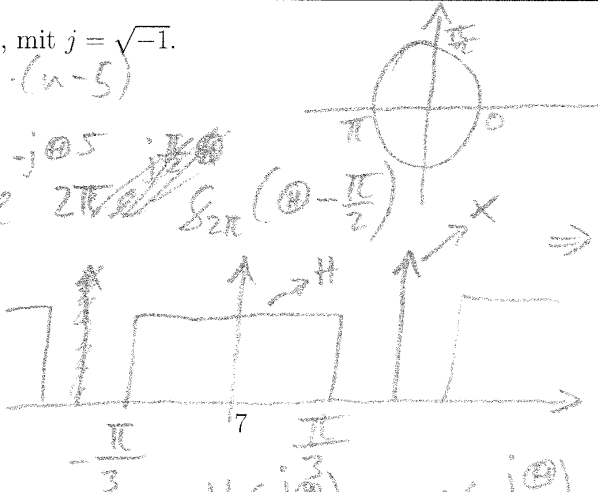
b) $x[n] = j^{n-5}, \quad \forall n$, mit $j = \sqrt{-1}$.

$x[n] = e^{j\frac{\pi}{2}\cdot(n-5)}$

$\circ\!-\!\bullet\; X(e^{j\Theta}) = e^{-j\Theta 5}\, 2\pi\, \cancel{e^{j\frac{\pi}{2}\Theta}}\, \delta_{2\pi}\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right)$

Zeiger rotiert um $\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x[n] = e^{j\frac{\pi}{2}(n+5)}$



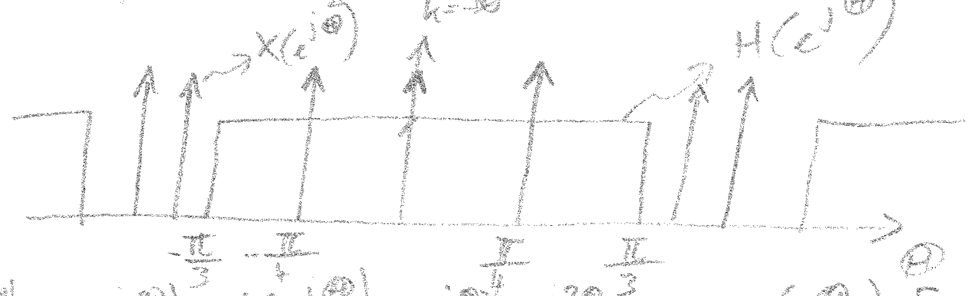
$X(e^{j\Theta})$ liegt nie in $H(e^{j\Theta}) \Rightarrow Y(e^{j\Theta}) = 0$

$y[n] = 0$

$Y(e^{j\theta}) = 0$

c) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n + 2 - 8k]$, $\quad \forall n$, ($\delta[n]$ ist der Einsimpuls). $N=8$

$X(e^{j\Theta}) = e^{-j2\Theta} \cdot \frac{2\pi}{8} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(n - \frac{2\pi k}{8}\right)$



$Y(e^{j\Theta}) = X(e^{j\Theta}) \cdot H(e^{j\Theta}) = \underbrace{e^{j\Theta 2} \cdot e^{-j2\Theta}}_{1} \cdot \mathrm{rect}_{2\pi}\left(\frac{\Theta}{\frac{2\pi}{3}}\right) \cdot \Big[\delta_{2\pi}(\Theta) + \delta_{2\pi}\left(\Theta - \frac{\pi}{4}\right) + \delta_{2\pi}\left(\Theta + \frac{\pi}{4}\right)\Big] \cdot \frac{\pi}{4}$

$y[n] = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{4} n$

$Y(e^{j\theta}) = \Big[\delta_{2\pi}(\Theta) + \delta_{2\pi}\left(\Theta - \frac{\pi}{4}\right) + \delta_{2\pi}\left(\Theta + \frac{\pi}{4}\right)\Big] \cdot \frac{\pi}{4}$

$2\pi\, \delta(\Theta) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{8} \cdot e^{j\Theta}$

ZUNAME: ....Vans....

VORNAME: ....Vans....

MAT. NR.: ....0000000....

2. SuS2 TEST A

Institut für Nachrichtentechnik

und Hochfrequenztechnik

G. Doblinger 06-2005

Bitte beachten Sie:

- An schriftlichen Unterlagen darf nur die SuS2-Formelsammlung verwendet werden!
- Die Beispiele ausschließlich auf den Seiten dieser Angabe ausarbeiten. Zusatzblätter werden ignoriert!
- Eine lesbare Schrift und übersichtliche Darstellung ist eine Voraussetzung für die positive Beurteilung Ihrer Arbeit!
- Der Lösungsweg inklusive Ansatz muss erkennbar sein. Nur die Lösung anzugeben genügt nicht.
- Mobiltelefone müssen während des Tests ausgeschaltet sein!

	Punkte
1	[illegible]
2	[illegible]
3	[illegible]
Σ	[illegible]

1. BEISPIEL (34 Punkte)

Von einem kausalen digitalen Filter ist das **Eingangssignal** $x[n]$ und die **Z-Transformation** $Y(z)$ **des Ausgangssignals** $y[n]$ gegeben:

$$x[n] = \delta[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^n \sigma[n]$$

$$Y(z) = \frac{1}{6}\,\frac{z-2}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

(Einsimpuls $\delta[n]$, zeitdiskrete Sprungfunktion $\sigma[n]$).

a) Berechnen und skizzieren Sie das **Ausgangssignal** $y[n]$.

$$Y(z) = \frac{1}{6} \cdot \frac{z-2}{z^2 - \frac{5}{6}z \frac{1}{6}} = \left[\frac{30}{3z-1} - \frac{18}{2z-1}\right] \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{3}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{2}} = z^{-1} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \cdot \frac{5}{3} - z^{-1} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2}$$

$$y[n] = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \sigma[n-1] - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \sigma[n-1]$$

~~n~~ | ~~$x[n]$~~ Skizze trivial!

0 | 0

1 | 1/6

2

3

4

$$\boxed{y[n] = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \sigma[n-1] - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \sigma[n-1]}$$

b) Berechnen Sie die **Übertragungsfunktion** $H(z)$ des digitalen Filters.

$$H(z) = \frac{\cancel{X}Y(z)}{X(z)} \qquad X(z) \bullet\!\!-\!\!\circ\, x[n]$$

$$x[n] = \delta[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \cdot \sigma[n]$$

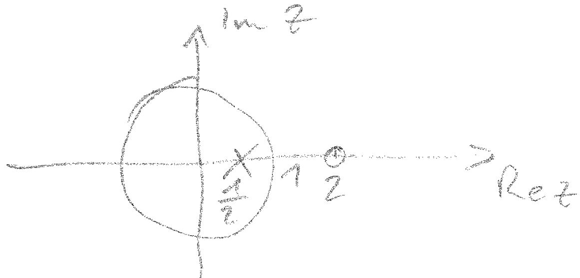
$$X(z) = 1 - \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{z-2}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}}{1 - z \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{3}}} = -\frac{z-2}{2z-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{z-2}{z-\frac{1}{2}}$$

$$H(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{z-2}{z-\frac{1}{2}}$$

c) Berechnen Sie **Pole und Nullstellen** von $H(z)$ und skizzieren Sie das Pol/Nullstellen-diagramm.

$$\left.\begin{aligned}P(z)&=z-\frac{1}{2}=0\\N(z)&=z-2=0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}z_\infty&=\frac{1}{2}\\z_0&=2\end{aligned}$$



2. BEISPIEL (33 Punkte)

Die **Impulsantwort** $h[n]$ eines digitalen Filters ist gegeben:

$$h[n] = n\sigma[n] - (n-5)\sigma[n-5]$$

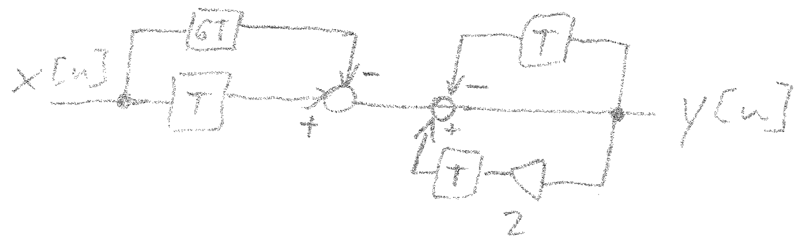
(zeitdiskrete Sprungfunktion $\sigma[n]$).

a) Geben Sie ein **Schaltbild**, bestehend aus Verzögerungselementen, Addierern und Multiplizieren, des digitalen Filters an.

Schaltbild aus Diffgl. sollte trivial sein

%

$$y[n] = x[n-1] - x[n-6] + 2y[n-1] - y[n-1]$$



b) Geben Sie eine **Differenzengleichung** für das digitale Filter an.

$$h[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\, H(z) \qquad h[n] = n\,\sigma[n] - (n-5)\,\sigma[n-5]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \qquad H(z) = \frac{z}{(z-1)^2} - z^{-5} \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$$

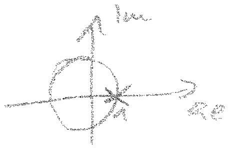
$$H(z) = \frac{z - z^{-4}}{(z-1)^2} = \frac{z^{1} - z^{-4}}{z^2 - 2z + 1} \Big/ z^2 = \frac{z^{-1} - z^{-6}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

$$\Rightarrow \quad X(z) = z^{-1} - z^{-6} \qquad Y(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = x[n-1] - x[n-6]$$

c) Ist das digitale Filter **stabil?** Geben Sie bei der Begründung das verwendete **Stabilitätskriterium** an!

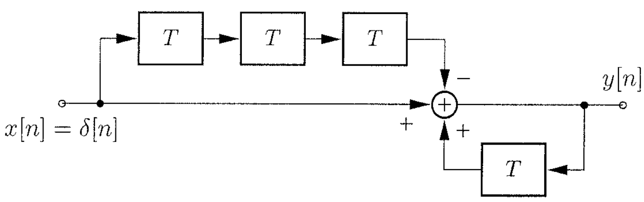
$$H(z)=\frac{z-z^{-4}}{z^2-2z+1} \Rightarrow z_{\infty_1}=1$$
$$z_{\infty_2}=1$$



$\Rightarrow$ nicht stabil, da Pole am Einheitskreis liegt

3. BEISPIEL (33 Punkte)

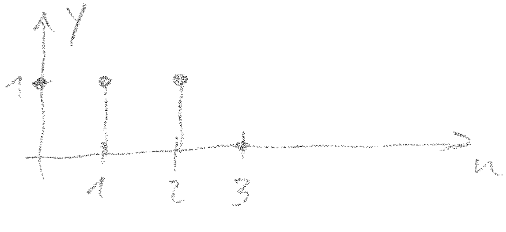
Ein digitales Filter ist durch das folgende Schaltbild gegeben:



a) Berechnen und skizzieren Sie für $x[n]=\delta[n]$ das **Ausgangssignal** $y[n]$ (Einsimpuls $\delta[n]$).

allg: $y[n]=x[n]-x[n-3]+y[n-1]$
$$y[n]-y[n-1]=x[n]-x[n-3]$$
$$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(z)\cdot(1-z^{-1})=X(z)\cdot(1-z^{-3}) \Rightarrow Y(z)=\frac{1-z^{-3}}{1-z^{-1}}\cdot X(z)$$
$$Y(z)=H(z)\cdot X(z)$$

$$Y(z)=z^{-2}+z^{-1}+1$$
$$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad y[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]$$



$y[n] =$

b) Berechnen Sie die **Z-Transformation** $Y(z)$ von $y[n]$.

Dfgl. lösen $\Rightarrow$ $Y(z) = \frac{1-z^{-3}}{1-z^{-1}} \cdot X(z)$

$x[n] = \delta[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ X(z) = 1$

$Y(z) = \frac{1-z^{-3}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 1$

$= \underbrace{z^{-1} + z^{-2} + 1}$

$\Downarrow$

$y[n]$

$$Y(z) = z^{-2} + z^{-1} + 1$$

c) Berechnen Sie die **diskrete 6-Punkte Fouriertransformation (DFT)** $Y_1[k]$, $k = 0, 1, \ldots 5$ des Signals $y_1[n] = y[n]$, $n = 0, 1, \ldots 5$.

$$Y[\boxed{k}] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N} \cdot n}$$

$$Y_1[k] =$$