Signale und Systeme 1

Prüfung vom 3. März 2004

1. Aufstellen der Zustandsgleichungen

Angabe

$y'' + y' = 4u' - 10u$

Stellen Sie zur gegebenen Differentialgleichung die Zustandsgleichungen auf. Gesucht sind die Matrizen $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ und $\underline{D}$.

Lösung

$$\underline{x}' = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \underline{x} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u$$

$$y = \begin{vmatrix} -10 & 1 \end{vmatrix} \underline{x}$$

nach (9.19), (9.20).

$$\underline{\underline{\underline{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}}, \quad \underline{\underline{\underline{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}}}, \quad \underline{\underline{\underline{C} = \begin{vmatrix} -10 & 4 \end{vmatrix}}} \text{ und } \underline{\underline{\underline{D} = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}}}$$

2. Spannungsimpuls

Angabe

Wie in A1.2. Ein Spannungsimpuls $u(t)$ soll modellhaft als Dirac-Stoß mit dem Gewicht k dargestellt werden.

$u(t) = k\delta(\tau)$

Lösung

Aus der grundlegenden Normierungseigenschaft des Dirac-Stoßes folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,\mathrm{d}\left(\frac{t}{T_B}\right) = \frac{1}{kT_B}\int_{-t_0}^{t_0} u(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$$

Und damit:

$$\underline{\underline{k = \frac{1}{T_B}\int_{-t_0}^{t_0} u(t)\,\mathrm{d}\,t}}$$

3. Übergangsfunktion (Sprungantwort)

Angabe

$$G(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

Ermitteln Sie zur gegebenen Übertragungsfunktion die Sprungantwort.

Lösung

Aus

$$H(s)=\frac{G(s)}{s}=\frac{s-1}{s(s+1)}=\frac{r_1}{s}+\frac{r_2}{s+1}$$

folgt mit den Koeffizienten

$$r_1=\left[sH(s)\right]_{s=0}=\frac{0-1}{0+1}=-1 \text{ und } r_2=\left[(s+1)H(s)\right]_{s=-1}=\frac{-1-1}{-1}=2$$

der Partialbruchzerlegung die Übergangsfunktion

$$H(s)=\frac{-1}{s}+\frac{2}{s+1}=(-1)\frac{1}{s}+2\frac{1}{s+1}\,.$$

Nach Laplace-Rücktransformation folgt für die Sprungantwort:

$$\underline{\underline{h(\tau)=(-1)\varepsilon(t)+2\,\mathrm{e}^{-\tau}\,\varepsilon(\tau)=\left(2\,\mathrm{e}^{-\tau}-1\right)\varepsilon(\tau)}}$$

4. Zerlegung in gerade und ungerade Teile

Angabe

$$x(\tau)=A\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\,\varepsilon(\tau),\ \ \sigma>0$$

Berechnen und skizzieren Sie den geraden und den ungeraden Anteil der gegebenen Funktion.

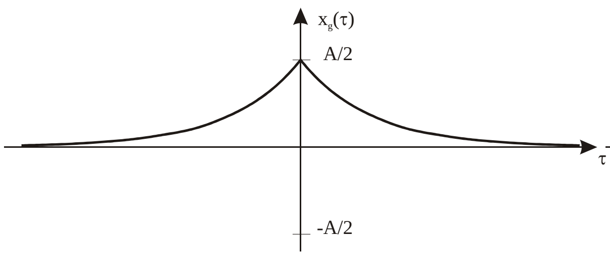
Lösung

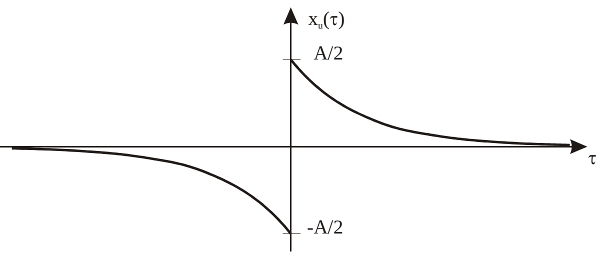
$$x_g(\tau)=\frac{1}{2}\left[x(\tau)+x(-\tau)\right]=\frac{1}{2}\left[A\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\,\varepsilon(\tau)+A\mathrm{e}^{\sigma\tau}\,\varepsilon(-\tau)\right]$$

$$\underline{\underline{x_g(\tau)=\frac{A}{2}\left[\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\,\varepsilon(\tau)+\mathrm{e}^{\sigma\tau}\,\varepsilon(-\tau)\right]}}$$

$$x_u(\tau)=\frac{1}{2}\left[x(\tau)-x(-\tau)\right]=\frac{1}{2}\left[A\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\,\varepsilon(\tau)-A\mathrm{e}^{\sigma\tau}\,\varepsilon(-\tau)\right]$$

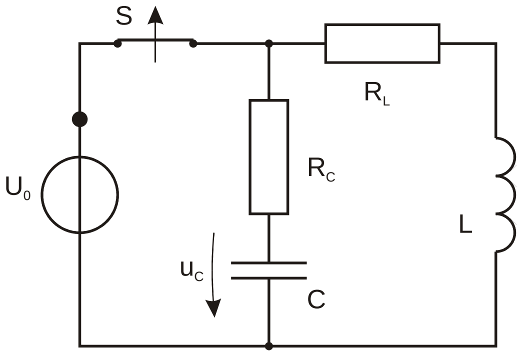
$$\underline{\underline{x_g(\tau)=\frac{A}{2}\left[\mathrm{e}^{-\sigma\tau}\,\varepsilon(\tau)-\mathrm{e}^{\sigma\tau}\,\varepsilon(-\tau)\right]}}$$





5. Systemdifferentialgleichung

Angabe



An der oben dargestellten Schaltung liegt lange Zeit die Spannung U_0. Gesucht sind die Systemdifferentialgleichung sowie die Anfangsbedingung für u_c nach dem Öffnen des Schalters S in nichtbezogener und in bezogener Form.

Lösung

Als Anfangsbedingung für u_c ergibt sich in der nichtbezogenen Form:

$$\underline{\underline{u_C(0+) = U_0}}.$$

Aus der Maschenregel

$$u_C + R_C i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_L i = 0$$

und der Beziehung

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

für den Strom am Kondensator ergibt sich:

$$\underline{\underline{u_C + R_C C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + R_L C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0}}.$$

Nach der Division durch LC ergibt sich die gesuchte Standardform.

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R_C + R_L}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = 0 .$$

Für die bezogene Form ergibt sich unter Verwendung von

$$u_C = U_0 y\,,\ \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{T_B}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,,\ \frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} = \frac{U_0}{T_B{}^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

unsere Differentialgleichung zu

$$\frac{U_0}{T_B{}^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{U_0}{T_B}\frac{R_C + R_L}{L}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{U_0}{LC}y = 0\,,$$

oder in der Standardform

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + T_B\frac{R_C + R_L}{L}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{T_B{}^2}{LC}y = 0 .$$

Mit

$$T_B = \sqrt{LC}$$

ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+\sqrt{\frac{C}{L}}\left(R_C+R_L\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0$$
,

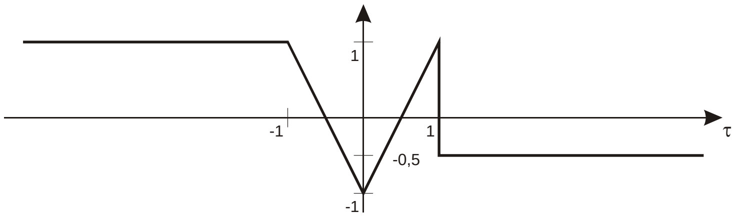
oder

$$\underline{\underline{y''+2\vartheta\upsilon_0 y'+\upsilon_0{}^2 y=0}}$$

$$\underline{\underline{\vartheta=\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{R_C+R_L}{2}}},\ \underline{\underline{\upsilon_0=1}},\ \underline{\underline{y(0+)=1}}$$

6. Signalleistung

Angabe



Berechnen Sie für das skizzierte Signal die Signalleistung.

Lösung

$$x_{eff}^2=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\left|x(\tau')\right|^2\,\mathrm{d}\tau'$$

$$x_{eff}^2=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left\{\int_{-\tau/2}^{1}|1|^2\,\mathrm{d}\tau'+\int_{-1}^{0}|-2\tau'-1|^2\,\mathrm{d}\tau'+\int_{0}^{1}|2\tau'+1|^2\,\mathrm{d}\tau'+\int_{1}^{\tau/2}\left|-\tfrac{1}{2}\right|^2\,\mathrm{d}\tau'\right\}$$

$$x_{eff}^2=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left\{\int_{-\tau/2}^{1}\mathrm{d}\tau'+\int_{-1}^{1}|2\tau'+1|^2\,\mathrm{d}\tau'+\frac{1}{4}\int_{1}^{\tau/2}\mathrm{d}\tau'\right\}$$

$$x_{eff}^2=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left\{\left[\tau'\right]_{-\tau/2}^{-1}+\left[\frac{(2\tau'+1)^3}{6}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{4}\left[\tau'\right]_{1}^{\tau/2}\right\}$$

$$x_{eff}^2=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left\{\left[-1+\frac{\tau}{2}\right]+\left[\frac{9}{2}+\frac{1}{6}\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{\tau}{2}-1\right]\right\}$$

$$x_{eff}^2=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left[\frac{41}{12}+\frac{5\tau}{8}\right]=\lim_{\tau\to\infty}\left[\frac{41}{12\tau}+\frac{5}{8}\right]=\frac{5}{8}$$

$$\underline{\underline{x_{eff}^2=\frac{5}{8}}}$$

7. Fourier-Transformierte

Angabe

$$y(\tau)=x(\tau)\cos(\nu_0\tau)$$

Vom Signal $x(\tau)$ ist die Fourier-Transformierte $X(\mathrm{j}\nu)$ bekannt. Berechnen Sie damit die Fourier-Transformierte des gegebenen Signals $y(\tau)$.

Lösung

Die Fourier-Transformierte von $\cos(\nu_0\tau)$ ist $\pi[\delta(\upsilon-\upsilon_0)+\delta(\upsilon+\upsilon_0)]$. Somit ergibt sich für $Y(\mathrm{j}\nu)$:

$$Y(\mathrm{j}\upsilon)=\frac{1}{2\pi}X(\mathrm{j}\upsilon)*U(\mathrm{j}\upsilon)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\upsilon')U(\mathrm{j}\upsilon-\mathrm{j}\upsilon')\,\mathrm{d}\upsilon'=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\upsilon-\mathrm{j}\upsilon')U(\mathrm{j}\upsilon')\,\mathrm{d}\upsilon'$$

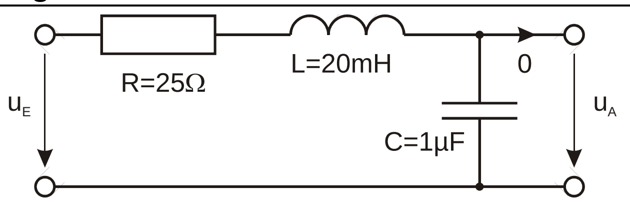
$$Y(\mathrm{j}\upsilon)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\upsilon-\mathrm{j}\upsilon')\pi[\delta(\upsilon'-\upsilon_0)+\delta(\upsilon'+\upsilon_0)]\,\mathrm{d}\upsilon'$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\upsilon-\mathrm{j}\upsilon')\pi\delta(\upsilon'-\upsilon_0)\,\mathrm{d}\upsilon'+\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\upsilon-\mathrm{j}\upsilon')\pi\delta(\upsilon'+\upsilon_0)\,\mathrm{d}\upsilon'\right]$$

$$\underline{\underline{Y(\mathrm{j}\upsilon)=\frac{1}{2\pi}[X(\mathrm{j}\upsilon-\mathrm{j}\upsilon_0)+X(\mathrm{j}\upsilon+\mathrm{j}\upsilon_0)]}}$$

8. Bode-Diagramm (Betragsteil)

Angabe



Zeichnen Sie für das angegebene Übertragungsglied den Betragsteil des Bode-Diagramms. Verwenden Sie dazu die bezogene Frequenzvariable $\nu=\omega\sqrt{LC}$.

Lösung

Aus der Maschenregel

$$u_E=Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+u_A$$

folgt mit

$$i=C\frac{\mathrm{d}u_A}{\mathrm{d}t}$$

die Differentialgleichung

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_A}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_A}{\mathrm{d}t}+u_A=u_E$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u_A}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_A}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_A=\frac{1}{LC}u_E$$

Eine Normierung durch

$u_A=U_By$, $u_E=U_Bu$, $t=T_B\tau$

führt zu

$$y''+\frac{R}{L}T_By'+\frac{T_B{}^2}{LC}y=\frac{T_B{}^2}{LC}u\,.$$

Aus $\nu=\omega\sqrt{LC}$ folgt $T_B=\sqrt{LC}$, und somit

$$y''+R\sqrt{\frac{C}{L}}y'+y=u\,.$$

Die Übertragungsfunktion ist daher

$$G(s)?\frac{1}{s^2 + R\sqrt{\frac{C}{L}}s + 1} = \frac{1}{s^2 + 2\vartheta\nu_0 + \nu_0^{\ 2}}$$

und $G(\mathrm{j}\,\nu)$ ist

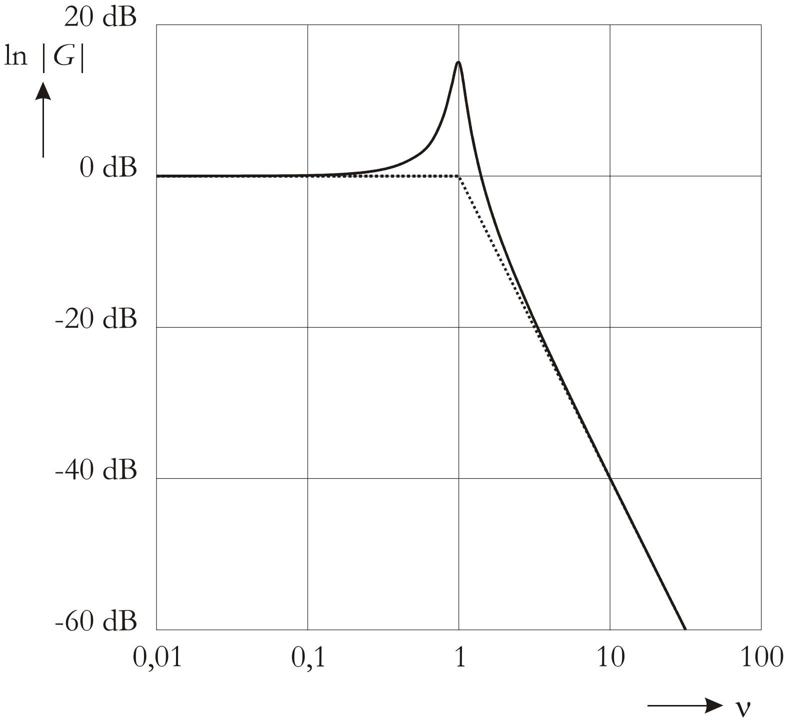
$$G(\mathrm{j}\nu) = \frac{1}{1 - \nu^2 + \mathrm{j}\nu R\sqrt{\frac{C}{L}}},$$

mit $\underline{\underline{\nu_0^{\ 2} = 1}}$, $\underline{\underline{2\vartheta = R\sqrt{C/L} = 0{,}178}}$.

Und für den Betrag

$$\underline{\underline{\left|G(\mathrm{j}\nu)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\nu^2\right)^2 + \left(2\nu\vartheta\right)^2}}}}\,.$$

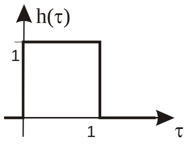
Das Überschwingen im Bode-Diagramm ergibt sich zu
$\underline{\underline{-20\lg(2\vartheta)\mathrm{dB} \approx 15{,}05\,\mathrm{dB}}}$.



9. Eingeschwungener Zustand

Angabe

$$u(\tau) = 4\cos(2\tau)$$



Berechnen Sie zu dem gegebenen Eingangssignal bei bekannter Sprungantwort den eingeschwungenen Zustand des Systems.

Lösung

1. *Möglichkeit:*

$$h(\tau) = \varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau - 1)$$

$$H(s) = \frac{1}{s} - \mathrm{e}^{-s}\frac{1}{s}$$

$$G(s) = sH(s) = 1 - \mathrm{e}^{-s}$$

$$y_p = \mathrm{Re}\left[4G(s)\mathrm{e}^{s\tau}\right]_{s=\mathrm{j}2} = \mathrm{Re}\left[4\left(1 - \mathrm{e}^{-j2}\right)\mathrm{e}^{j2\tau}\right] = \mathrm{Re}\left[4\left(\mathrm{e}^{j2\tau} - \mathrm{e}^{j2(\tau-1)}\right)\right]$$

$$\underline{\underline{y_{st} = 4\left[\cos(2\tau) - \cos(2\tau - 2)\right]}}$$

2. Möglichkeit:

$$g(t) = \delta(t) - \delta(\tau - 1)$$

$$y_{0Z} = \int_{0-}^{\infty} g(\tau - \tau')u(\tau')\,\mathrm{d}\tau' = \int_{0-}^{\infty}\left[\delta(\tau - \tau') - \delta(\tau - \tau' - 1)\right]4\cos(2\tau')\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\underline{\underline{y_{st} = 4\left[\cos(2\tau) - \cos(2\tau - 2)\right]}}$$

10. Grundschwingung

Angabe

$x(\tau) = \cos(\tau)$ für $0 < \tau < \pi$ mit der Periode 2π .

Berechnen Sie für dieses Signal die komplexe Amplitude der Grundschwingung.

Lösung

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\mathrm{d}\tau + \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\tau}\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\pi + \left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\tau}}{-\mathrm{j}2}\right|_0^{\pi}\right]$$

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2\pi}\left[\pi + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi}}{-\mathrm{j}2} - \frac{1}{-\mathrm{j}2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{j}4\pi}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi}\right)$$

$$\underline{\underline{\hat{X}_1 = \frac{1}{2}}}$$