

Halbleiterphysik

Lösungen zu den Übungsaufgaben

von
René Repp

Wien, 15. September 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Beugung und Unschärferelation	1
2	Interferenz	2
3	Laufende und stehende Wellen	3
4	Welle-Teilchen Dualismus der Materie (De-Broglie Beziehung)	4
5	Normierung von Wellenfunktionen	4
6	Potentialtopf II	5
7	Deltapotential I	6
8	Deltapotential II	7
9	Kronig Penney Modell	9
10	Num. Lösung von 1-dim. Schrödingergleichungen	10
11	Harmonischer Oszillator	11
12	Die Schrödingergleichung in anderen Koordinaten	11
13	Tunneleffekt und Feldemission	11
14	Freies Elektronengas	12
15	Phononen I	13
16	Phononen II	14
17	Blochoszillation	14
18	Bragg-Bedingung	16
19	Bragg-Bedingung 2	17
20	Ferminiveau	18
21	Ferminiveau	19
22	Flache Störstellen in Halbleitern	19

23 Ladungsträgerkonzentration	20
24 Temperatursensor	21
25 Shockley-Haynes-Experiment	22
26 Photoleitung	23
27 Diffusion	24
28 Halleffekt	25
29 Interbandabsorption in GaAs	27
30 Leuchtdiode, Laser	28
31 pn-Übergang	29
32 CV-Methode	30

1 Beugung und Unschärferelation

(a)

$$\Delta = d \sin \theta$$

Die Strahlen löschen sich gegenseitig aus (destruktive Interferenz), wenn für den Gangunterschied gilt:

$$\Delta = \lambda$$

Woraus für die Beugungsminima folgt

$$\theta = \arcsin \frac{\lambda}{d}$$

(b) Der Gesamtimpuls des Teilchen ist $p = h/\lambda$. Aus der Abbildung in der Angabe folgt unmittelbar:

$$\Delta p_x = p \sin \alpha = \frac{h}{\lambda} \sin \alpha$$

Aus (a) wissen wir bereits

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{\Delta x}$$

Dies eingesetzt in die erste Gleichung für die Impulsunschärfe ergibt

$$\Delta p_x \Delta x = h$$

(c)

$$\Delta p \Delta x = \Delta p \Delta x \frac{\Delta t}{\Delta t} = F \Delta x \Delta t = \Delta E \Delta t \geq \hbar$$

(d) Die Geschwindigkeitsunschärfe ergibt sich zu

$$\Delta v = 2 \cdot 10^{-4} v = 0,06 \text{ ms}^{-1}$$

Hieraus folgt die Impulsunschärfe $\Delta p = m \Delta v$ und damit als die kleinstmögliche Ortsunschärfe

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = 1,931 \text{ mm}$$

(e) Wie (d)

$$\Delta x = \frac{\hbar}{m \Delta v} = 3,515 \cdot 10^{-32} \text{ m}$$

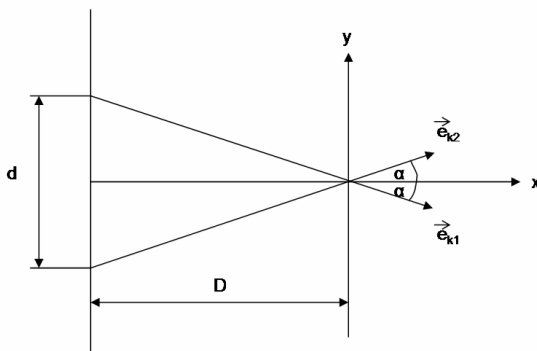
(f) Die Unschärferelation spielt bei der Betrachtung von Elektronen eine wesentliche Rolle. Im anderen Fall resultiert wie man sieht eine absurd winzige Größe, welche weit davon entfernt ist messtechnisch überhaupt erfassbar zu sein. Prinzipiell ist das Verhältnis der Größenordnungen von der Unschärfe und der jeweils betrachteten Eigenschaft maßgebend. Ein Elektron besitzt in etwa einen Durchmesser von 10^{-19} m also um 16 Zehnerpotenzen kleiner als die Ortsunschärfe in Beispiel (d)!

2 Interferenz

(a) Mit der Beziehung $E = \frac{p^2}{2m}$ folgt sofort

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \approx 0,1 \text{ nm}$$

(b) Mit $\vec{k}_1 = k\vec{e}_1$ und $\vec{k}_2 = k\vec{e}_2$ (wobei \vec{e}_n , $n = 1, 2$ normierte Einheitsvektoren sind, $k = 2\pi/\lambda$) und den Bezeichnungen gemäß der Skizze folgt



$$\vec{e}_1 = \cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_2 = \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y$$

Weiters gilt $\tan \alpha = \frac{d}{2D}$. Für kleine Winkel α (entsprechend $d \ll D$) gilt $\tan \alpha \approx \sin \alpha = \frac{d}{2D}$ und $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \approx \sqrt{1 - \left(\frac{d}{2D}\right)^2} \approx 1$. Insgesamt ergibt sich für die Wellenvektoren also

$$\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\vec{e}_x - \frac{d}{2D} \vec{e}_y \right)$$

$$\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\vec{e}_x + \frac{d}{2D} \vec{e}_y \right)$$

(c) Mit den Wellenvektoren aus (b) erhält man die Wellenfunktionen

$$\Psi_1(x, y, t) = A e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x - \frac{d}{2D} y) - j\omega t}$$

$$\Psi_2(x, y, t) = A e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (x + \frac{d}{2D} y) - j\omega t}$$

und gemäß dem Superpositionsprinzip

$$\Psi_{total}(0, y, t) = \Psi_1(0, y, t) + \Psi_2(0, y, t) = A e^{-j\omega t} \left(e^{-j \frac{\pi d}{\lambda D} y} + e^{j \frac{\pi d}{\lambda D} y} \right) =$$

$$= 2Ae^{-j\omega t} \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda D}y\right)$$

$$|\Psi_{total}(0, y, t)|^2 = 4A^2 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}y\right)$$

Die Interferenz-Linien verlaufen durch die Maxima und Minima der Verteilung. Bei unser Cosinus-förmigen Verteilung ist der Abstand zwischen den einzelnen Interferenz-Linien konstant und ergibt sich aus

$$\frac{\pi d}{\lambda D}y = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\lambda D}{2d} = 250 \text{ nm}$$

(d) Wenn man einen Schlitz schließt ergibt sich eine Gleichverteilung

$$|\Psi_{total}(0, y, t)|^2 = A^2$$

3 Laufende und stehende Wellen

Eine Wellefunktion besitzt die Form $\Psi(x, t) = f(x - vt)$. Eine stehende Welle wird durch eine Funktion der Form $\Psi(x, t) = f(x)g(t)$ beschrieben. Man muss also lediglich untersuchen ob sich die jeweiligen Funktion auf eine dieser Darstellungen bringen lassen.

(a)

$$\Psi(x, t) = e^{-(x-t)^2} \quad v = 1 \text{ m/s} \quad \text{nach rechts laufende Welle}$$

(b)

$$\Psi(x, t) = \sin(x + t) \quad v = -1 \text{ m/s} \quad \text{nach links laufende Welle}$$

(c)

$$\Psi(x, t) = e^{-x^2} e^{-t^2} \quad \text{stehende Welle}$$

(d)

$$\Psi(x, t) = \sin(x) \cos(t) \quad \text{stehende Welle}$$

(e)

$$\Psi(x, t) = (x - t)^2 \quad v = 1 \text{ m/s} \quad \text{nach rechts laufende Welle}$$

4 Welle-Teilchen Dualismus der Materie (De-Broglie Beziehung)

- (a) Mit der Beziehung $E = \frac{p^2}{2m}$ folgt aus der De-Broglie Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = 181 \text{ nm}$$

- (b) Mit $p = mv$ ergibt sich

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 1,656 \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

Aus dem Beispiel 1. wissen wir, dass sich die Lage der Beugungsminima nach der Gleichung $\lambda = d \sin \theta$ bestimmen lässt. Für extrem kleine Wellenlängen $\lambda \rightarrow 0$ folgt $\theta \rightarrow 0$. Die Verteilung wird zu einem unendlich schmalen Impuls der Höhe 1 im Zentrum – es treten keine Beugungseffekte auf.

5 Normierung von Wellenfunktionen

- (a) Die zeitunabhängige Schrödingergleichung lautet allgemein

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) + [V(x) - E] \varphi(x) = 0$$

Das Potential ist in unserem Fall $V(x) = kx$, $\forall k \in \mathbb{R}$. Aus dem Lösungsansatz ergeben sich seine Ableitungen

$$\varphi(x) = A x e^{-bx/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) = A e^{-bx/2} \left(1 - \frac{bx}{2} \right)$$

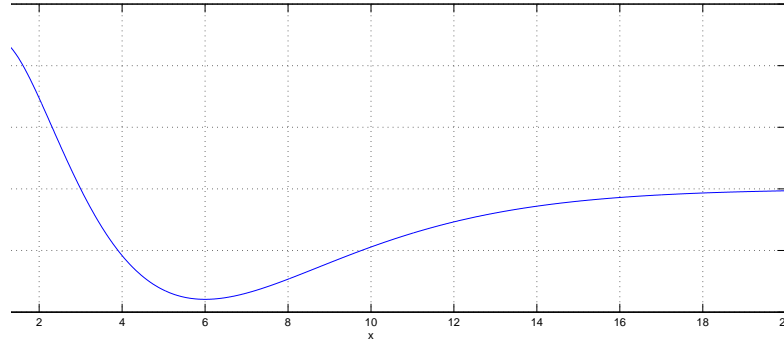
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) = A b e^{-bx/2} \left(\frac{bx}{4} - 1 \right)$$

Einsetzen in die Schrödingergleichung liefert

$$A e^{-bx/2} \left[cx^2 - \left(\frac{\hbar^2 b^2}{8m} + E \right) x + \frac{\hbar^2 b}{2m} \right] = 0$$

Diese Gleichung ist nur für $E = b = c = 0$ erfüllt, besitzt also keine Lösungen außer der trivialen Lösung. Der Ansatz genügt also *nicht* der Schrödingergleichung.

(b) Folgende Abbildung zeigt den Verlauf der Funktion $\varphi_2(x)$ für $B = 1$, $b = 1$ und $c = 3$.



Das Skalarprodukt zweier stetiger Funktionen mit dem Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ ist definiert als

$$\langle \varphi_1(x), \varphi_2(x) \rangle = \int_0^{\infty} \varphi_1^*(x) \varphi_2(x) dx$$

Ist das Skalarprodukt identisch gleich Null, nennt man die beiden Funktionen orthogonal zueinander. Einsetzen der beiden Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ ergibt

$$\langle \varphi_1(x), \varphi_2(x) \rangle = AB \left(c \int_0^{\infty} x^2 e^{-bx} dx - b \int_0^{\infty} x^3 e^{-bx} dx \right) = 0$$

Partielle Integration liefert schließlich die Gleichung

$$AB \left(\frac{6 - 2c}{3b^3} \right) = 0$$

welche nur für $c = 3$ erfüllt ist.

6 Potentialtopf II

Es gilt $\varphi(x) = 0$ für $x \leq 0$. Die zeitunabhängige Schrödingergleichung für den Bereich $I : 0 \leq x \leq a$ lautet

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

Das charakteristische Polynom dieser linearen, gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung ist

$$P(s) = s^2 + \frac{2mE}{\hbar^2}$$

mit den Nullstellen $p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \pm jk$ Die Lösung für diesen Bereich lautet damit

$$\varphi_I(x) = A_1 e^{jkx} + A_2 e^{-jkx}$$

Für den Bereich $II : a \leq x$ ergibt sich die Schrödingergleichung zu

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} = \pm \kappa$ sind für $E < V_0$ reell. Die Lösung für diesen Bereich lautet damit

$$\varphi_{II}(x) = B_1 e^{\kappa x} + B_2 e^{-\kappa x}$$

Aus der Stetigkeitsbedingung $\varphi_I(0) = 0$ erhält man $A_1 = -A_2$, also für die Lösung im Bereich I

$$\varphi_I(x) = A \sin(kx)$$

Mit der Überlegung, dass $\varphi_{II}(x)$ für $x \rightarrow \infty$ gegen Null gehen muss, da das Teilchen wegen $E < V_0$ die Barriere nicht vollständig überwinden kann, folgt $B_1 = 0$ und man erhält für die Lösung im Bereich II

$$\varphi_{II}(x) = B e^{-\kappa x}$$

Mit den Stetigkeitsbedingungen $\varphi_I(a) = \varphi_{II}(a)$ und $\varphi'_I(a) = \varphi'_{II}(a)$ erhält man folgenden zwei Gleichungen:

$$A \sin(ka) = B e^{-\kappa a} \quad (1)$$

$$Ak \cos(ka) = -B \kappa e^{-\kappa a} \quad (2)$$

Dividiert man nun Gleichung (1) durch Gleichung (2) erhält man die Gleichung

$$\kappa \tan(ka) + k = 0$$

welche der Bestimmungsgleichung in der Angabe entspricht, wenn man k und κ einsetzt.

7 Deltapotential I

- (a) Durch Integration der zeitunabhängigen Schrödingergleichung erhält man mit der Abtasteigenschaft des Diracstoßes

$$\int_{-a}^a \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi''(x) - V_0 \delta(x) \Psi(x) - E \Psi(x) \right) dx =$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} [\Psi'(a) - \Psi'(-a)] - V_0 \Psi(0) - E \int_{-a}^a \Psi(x) dx = 0$$

Bildet man nun den Grenzübergang $a \rightarrow 0$ ergibt sich

$$-\frac{\hbar^2}{2m} [\Psi'(0+) - \Psi'(0-)] - V_0 \Psi(0) = 0$$

und durch Umformung die Gleichung aus der Angabe.

(b) Für $x \neq 0$ lautet die Schrödingergleichung

$$\Psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi(x) = 0$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} = \pm k$ sind reell für $E < 0$. Für den Bereich $I : x < 0$ und $II : x > 0$ ergeben sich die Lösungen

$$\Psi_I(x) = A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx}$$

$$\Psi_{II}(x) = B_1 e^{kx} + B_2 e^{-kx}$$

Aus der Überlegung, dass $\Psi_I(x)$ für $x \rightarrow -\infty$ und $\Psi_{II}(x)$ für $x \rightarrow \infty$ nicht divergieren dürfen, folgt: $A_2 = 0$, $B_2 = 0$ und man erhält als Lösungsfunktionen

$$\Psi_I(x) = A e^{kx}$$

$$\Psi_{II}(x) = B e^{-kx}$$

Aus der Stetigkeitsbedingung $\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0)$ folgt $A = B$. Setzt man nun in die Gleichung aus (a) ein erhält man

$$\Psi'(0+) - \Psi'(0-) = \Psi'_{II}(0) - \Psi'_I(0) = -2kA = -\frac{2mV_0A}{\hbar^2}$$

woraus sich die Kreiswellenzahl zu

$$k = \frac{mV_0}{\hbar^2}$$

ergibt und damit die Energie

$$E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}$$

Für $E < 0$ gibt es also nur einen Energiezustand.

8 Deltapotential II

(a) Für die Bereiche $x \neq 0$ liegt die selbe Situation wie in Beispiel 7 vor. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms ergeben sich aber zu $p_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \pm jk$ da nun $E > 0$ gilt. Für den Bereich $I : x < 0$ und $II : x > 0$ ergeben sich die Lösungen

$$\Psi_I(x) = A_1 e^{jkx} + A_2 e^{-jkx}$$

$$\Psi_{II}(x) = B_1 e^{jkx} + B_2 e^{-jkx}$$

Die Lösungen setzen sich additiv aus nach links bzw. rechts laufenden Wellen zusammen. Der Term $A_1 e^{jkx}$ beschreibt die von links eintreffende Welle (das von links kommende Teilchen). Die Amplitude wird normiert zu $A_1 = 1$. Der Term $A_2 e^{-jkx}$ beschreibt die nach links laufende, reflektierte Welle (das reflektierte Teilchen), A_2 wird zu R umbenannt. Der Term $B_1 e^{jkx}$ beschreibt die nach rechts laufende, durchgegangene Welle nach dem Deltaimpuls (das transmittierte Teilchen), B_1 wird zu T umbenannt. Weiters folgt $B_2 = 0$, es gibt kein von rechts eintreffendes Teilchen. Damit ergeben sich die Wellenfunktionen für $x \neq 0$ zu

$$\Psi_I(x) = e^{jkx} + R e^{-jkx}$$

$$\Psi_{II}(x) = T e^{jkx}$$

- (b) Aus der Stetigkeitsbedingung $\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0)$ folgt $1 + R = T$. Weiters gilt die Gleichung aus Beispiel 7, wobei der rechte Term nun ein positives Vorzeichen aufgrund des positiven Deltaimpulses besitzt!

$$\Psi'(0+) - \Psi'(0-) = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \Psi(0)$$

In unserem Fall also

$$\Psi'_{II}(0) - \Psi'_I(0) = jk(T - 1 + R) = \frac{2mV_0 T}{\hbar^2}$$

Mit $R = T - 1$ folgt

$$T = \frac{1}{1 + j \frac{mV_0}{\hbar^2 k}}$$

$$R = -\frac{1}{1 - j \frac{\hbar^2 k}{mV_0}}$$

- (c) Die reflektierte Welle ist $\Psi_r(x) = R e^{-jkx}$. Für die Reflexionswahrscheinlichkeit ergibt sich damit

$$|\Psi_r(x)|^2 = |R|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\hbar^4 k^2}{m^2 V_0^2}}$$

und durch Einsetzen von $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ schließlich

$$|\Psi_r(x)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{2\hbar^2 E}{mV_0^2}}$$

Wie man sieht gilt für $E \rightarrow 0$: $|\Psi_r(x)|^2 \rightarrow 1$, d.h. jedes Teilchen wird reflektiert, und für $E \rightarrow \infty$: $|\Psi_r(x)|^2 \rightarrow 0$, d.h. jedes Teilchen wird transmittiert.

9 Kronig Penney Modell

- (a) Für den Bereich $I : 0 \leq x \leq a$ erhält man die Schrödingergleichung

$$\varphi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) = 0$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind $p_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \pm j\alpha$. Die Lösung lautet damit

$$\varphi_I(x) = A_1 e^{j\alpha x} + A_2 e^{-j\alpha x}$$

- (b) Das Bloch'sche Theorem besagt, dass für periodische Potentiale $V(x) = V(x + na)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ die Lösungen der Schrödingergleichung die Form $\Psi_k(x) = u_k(x)e^{jkx}$ aufweisen, wobei u_k die gleiche Periodizität wie das Potential besitzt. Angewandt auf unseren Fall folgt

$$\varphi(x - a) = u_k(x - a)e^{jk(x-a)} = u_k(x)e^{jkx}e^{-jka} = \varphi(x)e^{-jka}$$

also

$$\varphi(x) = \varphi(x - a)e^{jka}$$

Der linke Term stellt für $x > a$ die Lösung nach dem Deltaimpuls dar, $\varphi(x - a)$ entsprechend die Lösung davor. Damit erhält man als Lösungsfunktion für den Bereich $II : a \leq x \leq 2a$

$$\varphi_{II}(x) = \varphi_I(x - a)e^{jka} = (A_1 e^{j\alpha(x-a)} + A_2 e^{-j\alpha(x-a)}) e^{jka}$$

- (c) Die zwei Stetigkeitsbedingungen sind

$$\varphi_I(a) = \varphi_{II}(a)$$

$$\varphi'_{II}(a) - \varphi'_I(a) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\varphi(a)$$

Setzt man die Lösungsfunktionen ein, erhält man ein lineares, homogenes Gleichungssystem für die Konstanten A_1 und A_2

$$\begin{aligned} A_1 (e^{-j\alpha a} - e^{jka}) + A_2 (e^{j\alpha a} - e^{jka}) &= 0 \\ A_1 \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2} e^{jka} - j\alpha e^{jka} + j\alpha e^{-j\alpha a} \right) + A_2 \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2} e^{jka} + j\alpha e^{jka} - j\alpha e^{j\alpha a} \right) &= 0 \end{aligned}$$

- (d) Wenn es nicht-triviale, d.h. physikalisch sinnvolle, Lösungen gibt, muss die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwinden, also

$$(e^{-j\alpha a} - e^{jka}) \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2} e^{jka} + j\alpha e^{jka} - j\alpha e^{j\alpha a} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& (e^{j\alpha a} - e^{jka}) \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2} e^{jka} - j\alpha e^{jka} + j\alpha e^{-j\alpha a} \right) = \\
& j\alpha e^{ja(k-\alpha)} - j\alpha + \frac{2mV_0}{\hbar^2} e^{ja(k-\alpha)} - j\alpha e^{j2ka} + j\alpha e^{ja(k+\alpha)} - \frac{2mV_0}{\hbar^2} e^{j2ka} + j\alpha e^{ja(k+\alpha)} - j\alpha \\
& - \frac{2mV_0}{\hbar^2} e^{ja(k+\alpha)} - j\alpha e^{j2ka} + j\alpha e^{ja(k-\alpha)} + \frac{2mV_0}{\hbar^2} e^{j2ka} = \\
& 2(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) - 2(e^{jka} + e^{-jka}) + \frac{2mV_0}{j\alpha\hbar^2} (e^{-j\alpha} - e^{j\alpha}) = \\
& 4\cos(\alpha a) - 4\cos(ka) - \frac{4mV_0}{\alpha\hbar^2} \sin(\alpha a) = 0
\end{aligned}$$

die Beziehung aus der Angabe.

- (e) Das $E(k)$ -Diagramm sieht aus wie jenes auf S. 53 im Skriptum. Der Verlauf der Funktion $\cos(\alpha a) - \frac{mV_0}{\hbar^2} \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}$ entspricht jenem aus dem Skriptum nach unten geklappt, da die \sin -Funktion hier negatives Vorzeichen besitzt. Die Energiebereiche für welche die Bestimmungsgleichung erfüllt ist bleiben jedoch die selben.

10 Num. Lösung von 1-dim. Schrödingergleichungen

- (a) Für konstante Längenintervalle $x_{i+1} - x_i = \Delta = \text{konst.}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} &= \frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{\Delta} \\
\frac{\partial \Psi_{i-1}}{\partial x} &= \frac{\Psi_i - \Psi_{i-1}}{\Delta} \\
\frac{\partial^2 \Psi_{i-1}}{\partial x^2} &= \frac{\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_{i-1}}{\partial x}}{\Delta} = \frac{\Psi_{i+1} - 2\Psi_i + \Psi_{i-1}}{\Delta^2}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen wir aus der linearen Differentialgleichung eine lineare Differenzengleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m\Delta^2} \Psi_{i+1} + \left(\frac{\hbar^2}{2m\Delta^2} + V_i \right) \Psi_i - \frac{\hbar^2}{2m\Delta^2} \Psi_{i-1} = E\Psi_i$$

- (b) Aus der diskreten Schrödingergleichung liest man die Diagonalelemente sofort ab

$$H_{i,i+1} = -\frac{\hbar^2}{2m\Delta^2} \quad H_{i,i} = \frac{\hbar^2}{2m\Delta^2} + V_i \quad H_{i,i-1} = -\frac{\hbar^2}{2m\Delta^2}$$

Aufgrund der Beziehungen für ebene Wellen $\varphi_{N+1}(x) = \varphi_1(x)e^{jkx_N}$ und $\varphi_0(x) = \varphi_N(x)e^{-jkx_N}$ folgt für die Eckelemente

$$H_{1,N} = -\frac{\hbar^2}{2m\Delta^2} e^{-jkx_N} \quad H_{N,1} = -\frac{\hbar^2}{2m\Delta^2} e^{jkx_N}$$

11 Harmonischer Oszillator

- (a) Die zeitabhängige, 1-dimensionale Schrödingergleichung lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t) = j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

Aus dem Separationsansatz ergeben sich die partiellen Ableitungen zu

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = \varphi''(x) e^{-j\omega t} \quad \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -j\omega \varphi(x) e^{-j\omega t}$$

Einsetzen in die SG liefert mit $E = \hbar\omega$ die zeitunabhängige SG

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + \left(\frac{\kappa x^2}{2} - E \right) \varphi(x) = 0$$

- (b) Um vom Zustand "n" in den Zustand "n+1" zu gelangen, muss die Energie

$$E = E_{n+1} - E_n = \hbar\omega_c$$

zugeführt werden. Dies entspricht der Bestrahlung mit Licht der Kreisfrequenz ω_c bzw. der Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_c}$$

12 Die Schrödingergleichung in anderen Koordinaten

Die Schrödingergleichung lässt sich umschreiben zu

$$\varphi''(\vartheta) + \frac{2mx_0^2 E}{\hbar^2} \varphi(\vartheta) = 0$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind $p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{2mx_0^2 E}{\hbar^2}} = \pm jn$ mit der Kreiswellenzahl n . Hieraus folgt unmittelbar

$$E = \frac{\hbar^2 n^2}{2mx_0^2}$$

13 Tunneleffekt und Feldemission

- (a)

$$\kappa d \gg 1 : \quad \sinh(\kappa d) = \frac{1}{2}(e^{\kappa d} - e^{-\kappa d}) \approx \frac{1}{2}e^{\kappa d}$$

Einsetzen in die Gleichung für die Tunnelwahrscheinlichkeit ergibt

$$T \approx \frac{1}{1 + \frac{(k^2 + \kappa^2)^2}{16k^2 \kappa^2} e^{2\kappa d}} = \frac{1}{e^{-2\kappa d} + \frac{(k^2 + \kappa^2)^2}{16k^2 \kappa^2}} e^{-2\kappa d} \approx \frac{16k^2 \kappa^2}{(k^2 + \kappa^2)^2} e^{-2\kappa d} \approx e^{-2\kappa d}$$

(b) Mit

$$\kappa_i = \frac{\sqrt{2m(V_i - E)}}{\hbar}$$

folgt für die Tunnelwahrscheinlichkeit

$$T = \prod_i T_i \approx \prod_i e^{-2\kappa_i d_i} = \exp\left(-2 \sum_i \kappa_i d_i\right) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sum_i \sqrt{2m(V_i - E)} d_i\right)$$

und mit dem Grenzübergang $d \rightarrow 0$ das Integral

$$T = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V(x) - E)} dx\right)$$

14 Freies Elektronengas

(a) Die zeitunabhängige Schrödingergleichung für den 3-dimensionalen Fall unter Berücksichtigung der effektiven Masse m^* und mit $V(x) = 0$ lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta \Psi_k(\vec{x}) = E \Psi_k(\vec{x})$$

wobei mit unserem Lösungsansatz gilt

$$\Delta \Psi_k(\vec{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_k(\vec{x}) = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \Psi_k(\vec{x})$$

Einsetzen in die Schrödingergleichung und Herauskürzen von $\Psi_k(\vec{x})$ liefert unmittelbar die Dispersionsrelation

$$E(k_x, k_y, k_z) = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

(b) Nimmt man die erste Randbedingung $\Psi(x + L_x, y, z) = \Psi(x, y, z)$ und setzt unsere Lösungsfunktion ein erhält man

$$\exp[j(k_x(x + L_x) + k_y y + k_z z)] = \exp[j(k_x x + k_y y + k_z z)]$$

Aufgrund der 2π -Periodizität der komplexen Exponentialfunktion ist diese Gleichung erfüllt, wenn

$$k_x(x + L_x) = k_x x + 2\pi n_x \quad , n_x \in \mathbb{Z}$$

Damit erhält man für die x -Komponente des Wellenvektors

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L_x}$$

Analoges ergibt sich für die y und z Komponenten unter Verwendung der beiden anderen Randbedingungen

$$k_y = \frac{2\pi n_y}{L_y} \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L_z} \quad n_y, n_z \in \mathbb{Z}$$

- (c) Alle k -Werte sind kleiner als k_F . Jeder Vektor \vec{k} liegt damit innerhalb der Kugel im Ursprung mit dem Radius k_F . Das ausgefüllte Volumen im k -Raum ergibt sich als das Volumen dieser so genannten "Fermikugel"

$$V = \frac{4\pi k_F^3}{3}$$

15 Phononen I

Die Lösung dieses Beispiels findet man im Skriptum auf S. 55.

- (a) Die Bewegungsgleichung lautet

$$M \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -K(u_n - u_{n+1}) - K(u_n - u_{n-1})$$

- (b) Mit dem gegebenen Ansatz ergibt sich

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = -\omega^2 u_n \quad u_{n+1} = u_n e^{jka} \quad u_{n-1} = u_n e^{-jka}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert

$$\omega^2 = \frac{K}{M}(1 - e^{jka} + 1 - e^{-jka}) = 2\frac{K}{M}(1 - \cos(ka)) = 4\frac{K}{M} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

- (c) Für kleine k lässt sich die Dispersionsrelation durch das Taylorpolynom 1. Ordnung annähern

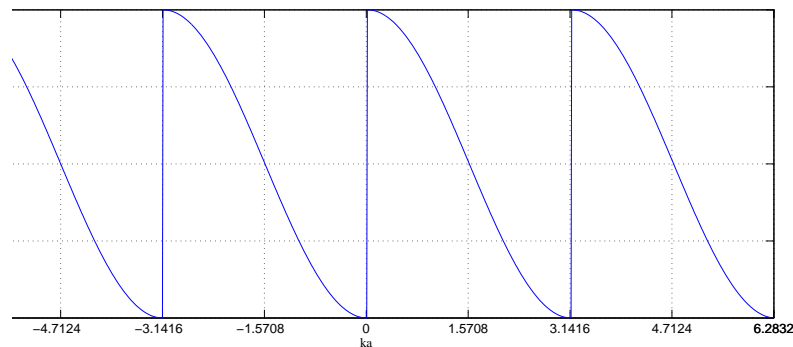
$$\tilde{\omega}(k) = \omega(0) + \omega'(0)k = a\sqrt{\frac{K}{M}}|k|$$

Die Proportionalitätskonstante ist die Schallgeschwindigkeit $v_s = a\sqrt{\frac{K}{M}}$.

(d) Die Gruppengeschwindigkeit ist definiert als

$$c_{gr} = \frac{d\omega(k)}{dk} = a\sqrt{\frac{K}{M}} \cos\left(\frac{ka}{2}\right), \quad 0 < k < 2\pi/a$$

Sie setzt sich periodisch mit $2\pi/a$ fort (siehe Abbildung)



Für $k \rightarrow \pm\pi/a$ gilt $c_{gr} = 0$.

16 Phononen II

(a) Die Bewegungsgleichung lautet

$$M \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -K(u_n - u_{n+1}) - K(u_n - u_{n-1}) - K'(u_n - u_{n+2}) - K'(u_n - u_{n-2})$$

(b)

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{K}{M}(1 - e^{jka} + 1 - e^{-jka}) + \frac{K'}{M}(1 - e^{j2ka} + 1 - e^{-j2ka}) = \\ &= 4\frac{K}{M}(1 - \cos(ka)) + 4\frac{K'}{M}(1 - \cos(2ka)) = 4\frac{K}{M}\sin^2(ka/2) + 4\frac{K'}{M}\sin^2(ka) \\ \omega(k) &= 2\sqrt{\frac{K}{M}\sin^2(ka/2) + \frac{K'}{M}\sin^2(ka)} \end{aligned}$$

17 Blochoszillation

(a) Aufgrund des elektrischen Feldes wirkt eine Kraft $F = -e\xi$ auf das Elektron. Für den Impuls des Teilchens folgt

$$p = \hbar k = \int_0^t F dt' = -e\xi t + C$$

Mit der Anfangsbedingung $k(0) = 0$ ergibt sich für die Konstante $C = 0$ und damit für die Kreiswellenzahl

$$k(t) = -\frac{e\xi t}{\hbar}$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Energiegleichung ein erhält man die Energie des Teilchens in Abhängigkeit der Zeit

$$E(t) = \frac{E_0}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{e\xi d}{\hbar} t \right) \right]$$

Die Energie des Elektrons gilt weiters

$$E(t) = \int_0^{x(t)} F dx' = -e\xi x(t) + C$$

Mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ fällt die Konstante C wieder weg und man erhält durch Umformung die Bewegungsgleichung

$$x(t) = -\frac{E(t)}{e\xi} = \frac{E_0}{2e\xi} \left[\cos \left(\frac{e\xi d}{\hbar} t \right) - 1 \right]$$

Für $t \leq 0$ liegt kein elektrisches Feld an $\xi = 0$. Damit verschwindet der Impuls des Teilchens, woraus folgt $k = 0$. Die Energie des Teilchens wird damit ebenfalls gleich Null und damit gilt $x(t) \equiv 0$.

Für $t > 0$ ist die Kreisfrequenz gegeben durch $\omega = e\xi d/\hbar$. Für die Oszillationsfrequenz folgt damit

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{e\xi d}{h} = 96,72 \text{ GHz}$$

Die maximale Auslenkung liegt dann vor wenn der Cosinus sein Minimum -1 annimmt. Der Ausdruck in der Klammer wird damit zu -2 . Die maximale Auslenkung beträgt also

$$|x_{max}| = \left| \frac{E_0}{e\xi} \right| = 1,2 \text{ } \mu\text{m}$$

Die Elektronengeschwindigkeit errechnet sich zu

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{E_0 d}{2\hbar} \sin \left(\frac{e\xi d}{\hbar} t \right)$$

Ihr linearer zeitlicher Mittelwert ergibt sich zu $\bar{v} = 0$. Es kommt also zu keiner makroskopischen Bewegung von Ladungsträgern und damit fließt auch kein makroskopischer Strom.

- (b) Die Vorgehensweise ist ähnlich wie in Punkt (a). Man hat nun die Randbedingungen $k(n\tau) = 0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Für die einzelnen Bereiche $0 \leq t \leq \tau, \tau \leq t \leq 2\tau, \dots, n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$ erhält man wie vorher für die Kreiswellenzahlen

$$k_n(t) = -\frac{e\xi t}{\hbar} + C_n$$

Die Konstanten ergeben sich nun unter Verwendung der jeweiligen Randbedingung $k(n\tau) = 0$ zu $C_n = e\xi n\tau/\hbar$. Man erhält also für die Kreiswellenzahlen

$$k_n(t) = \frac{e\xi}{\hbar}(n\tau - t)$$

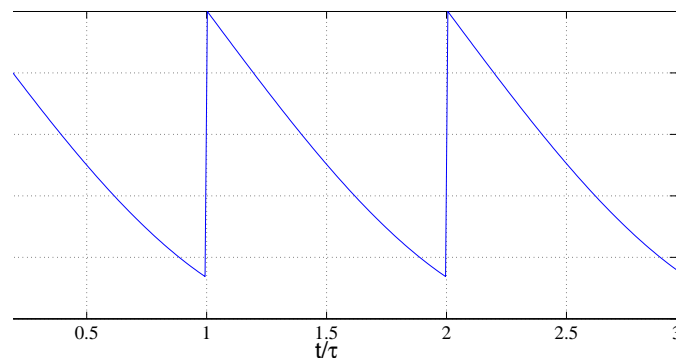
und damit für die Auslenkungen in den einzelnen Bereichen

$$x_n(t) = \frac{E_0}{2e\xi} \left[\cos \left(\frac{e\xi d}{\hbar}(t - n\tau) \right) - 1 \right]$$

und die Geschwindigkeiten

$$v_n(t) = \frac{dx_n(t)}{dt} = -\frac{E_0 d}{2\hbar} \sin \left(\frac{e\xi d}{\hbar}(t - n\tau) \right)$$

Die Geschwindigkeit $v(t)$ über dem ganzen Zeitbereich setzt sich aus den Geschwindigkeiten für die jeweiligen Teilbereiche zusammen. Sie ist eine periodische Funktion mit der Periodendauer τ wie in der Abbildung für $E_0 d/(2\hbar) = 1$ gezeigt.

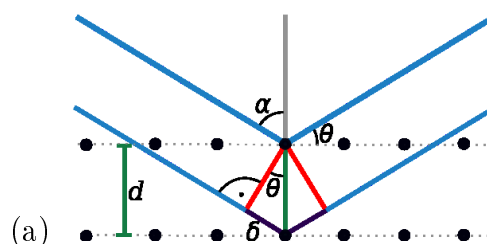


Der lineare zeitliche Mittelwert ergibt sich nun zu

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} v(t) dt = -\frac{E_0 d}{2\hbar \tau} \int_0^{\tau} \sin \left(\frac{e\xi d}{\hbar} t \right) dt = \\ &= \frac{E_0}{2e\xi \tau} \left[\cos \left(\frac{e\xi d}{\hbar} \tau \right) - 1 \right] = -5,63 \cdot 10^6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

In diesem Fall fließt also makroskopischer Strom.

18 Bragg-Bedingung



Bei der Reflexion an den Kristallebenen tritt konstruktive Interferenz auf, wenn für den Gangunterschied gilt $2\delta = n\lambda$. Wie in der Abbildung zu sehen, besteht der Zusammenhang $2\delta = 2d \sin \theta$, woraus die Bragg-Bedingung (siehe Skriptum S. 47) folgt

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

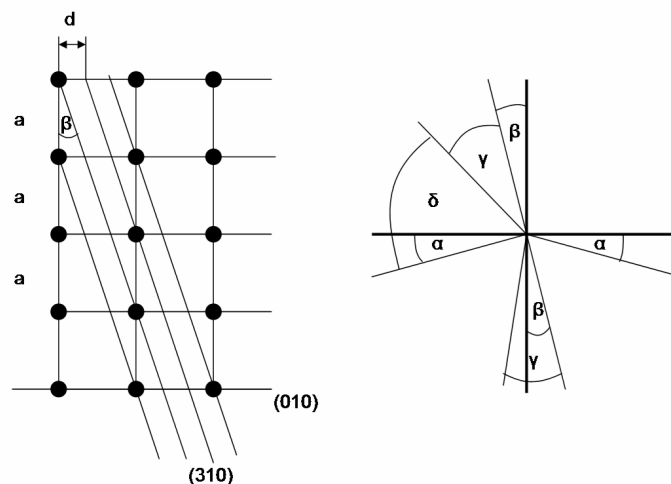
- (b) In unserem Fall ist der Einfallswinkel $\theta = 25^\circ$. Über die Bragg-Gleichung erhält man die Wellenlänge der Röntgenstrahlung $\lambda = 3,38 \cdot 10^{-10}$ m. Die Energie der Röntgenphotonen errechnet sich zu

$$E = hf = h \frac{c}{\lambda} = 5,879 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

19 Bragg-Bedingung 2

Der Einfallswinkel α des Röntgenstrahls zur (010)-Ebene um eine Bragg-Reflexion 1. Ordnung zu beobachten ergibt sich zu

$$2a \sin \alpha = l \quad \alpha = 10,8^\circ$$



Das linke Bild der Abbildung zeigt die Kristallebenen. Die (310)-Ebene ist um den Winkel β gegen die [010]-Achse gedreht. Man erhält diesen Winkel gemäß

$$\beta = \arctan(1/3) = 18,43^\circ$$

Betrachtet man nun die Bragg-Reflexion an der (310)-Ebene mit dem Einfallswinkel γ . Der Abstand der Kristallebenen d hat sich nun verändert

$$d = a \sin \beta$$

Der Einfallswinkel ergibt sich dann zu

$$2d \sin \gamma = l \quad \gamma = 36,36^\circ$$

Das rechte Bild zeigt nun die räumliche Anordnung der Ebenen und Röntgenstrahlen. Um einen (310)-Reflex 1. Ordnung bei gleichbleibender Röntgenquelle und Detektor beobachten zu können, muss der Kristall um den Winkel δ gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden. Der Drehwinkel ergibt sich zu

$$\delta = 90^\circ + \alpha - \beta - \gamma = 46^\circ$$

20 Fermiveneau

- (a) Die Abbildungen findet man auf S. 77 im Skriptum.
 (b) Die Elektronendichte errechnet sich allgemein aus

$$n = \int_{E_C}^{\infty} Z(E) f(E) dE$$

wobei $Z(E)$ die Zustandsdichte und $f(E)$ die Besetzungswahrscheinlichkeit bezeichnen. Für $T = 0K$ gilt

$$f(E) = \begin{cases} 1 & : E \leq E_F \\ 0 & : E > E_F \end{cases}$$

Im entarteten Fall fällt nun das Fermiveneau in das Leitungsband $E_F > E_C$. Man erhält damit für die Elektronendichte

$$n = \int_{E_C}^{E_F} Z(E) dE$$

Die Zustandsdichten für den 3, 2 und 1-dimensionalen Fall sind im Skriptum auf S. 76 zu finden. Durchführung der Integration ergibt die jeweiligen Ergebnisse.

$$3D: \quad n = \frac{(2m^*)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} (E_F^{3/2} - E_C^{3/2})$$

$$2D: \quad n = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} (E_F - E_C)$$

$$1D: \quad n = \frac{2(2m^*)^{1/2}}{\hbar} (E_F^{1/2} - E_C^{1/2})$$

- (c) Bei FETs. Isolationsschicht so dünn -> quasi 2-dimensional.

21 Ferminiveau

ACHTUNG! Die Angabe ist hier falsch! Die Zustandsdichte für 3 Dimensionen ist nämlich (vgl. Skriptum S. 76)

$$Z(E) = \frac{(m^*)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{2E}$$

Die 2 im Nenner aus der Angabe gehört weg.

Im nicht-entarteten Fall kann für die Besetzungswahrscheinlichkeit die Maxwell-Boltzmann-Verteilung verwendet werden

$$f(E) = \exp\left(\frac{E_F - E}{kT}\right)$$

Für die Elektronendichte ergibt sich dann

$$\begin{aligned} n &= \int_{E_C}^{\infty} Z(E) f(E) dE = \int_0^{\infty} Z(E) f(E + E_C) dE = \\ &= \frac{\sqrt{2}(m^*)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{E_F - E_C}{kT}\right) \int_0^{\infty} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE \end{aligned}$$

Mit der Substitution $E' = E/(kT)$, $dE' = dE/(kT)$ folgt

$$\begin{aligned} n &= \frac{\sqrt{2}(m^* kT)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{E_F - E_C}{kT}\right) \int_0^{\infty} \sqrt{E'} e^{-E'} dE' = \\ &= \frac{2}{h^3} (2\pi m^* kT)^{3/2} \exp\left(\frac{E_F - E_C}{kT}\right) = N_C \exp\left(\frac{E_F - E_C}{kT}\right) \end{aligned}$$

22 Flache Störstellen in Halbleitern

(a) Der Bohrradius und die Bindungsenergien beim Wasserstoffatom errechnen sich zu

$$a'_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0,053 \text{ nm}$$

$$E'_B = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\hbar\epsilon_0)^2} = -13,6 \text{ eV}$$

Für die Donatorzustände ergeben sich die Bohrradien und Bindungsenergien entsprechend, wenn in den beiden Gleichungen die Elektronenruhemasse m_e durch die effektive Masse $m^* = m_c^* m_e$ und ϵ_0 durch $\epsilon_0 \epsilon_r$ ersetzt werden. Wobei bei sich bei Si die effektive Masse aus $\frac{3}{m_c^*} = \frac{2}{m_{c,t}^*} + \frac{1}{m_{c,l}^*}$ errechnen lässt. Man erhält

$$a_B = a'_B \frac{\epsilon_r}{m_c^*}$$

$$E_B = E'_B \frac{m_c^*}{\varepsilon_r^2}$$

Stoff	a_B [nm]	E_B [meV]
InSb	64,2	-0,66
GaAs	10,2	-5,5
Si	2,42	-25

(b) **InSb:** Gute Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert für Tellur-Donatoren auf Antimon-Plätzen $Te_{Sb} : E_B = -0,6$ meV.

GaAs: Auch hier wird recht gut das experimentell beobachtete Verhalten wiedergegeben $Si_{Ga} : E_B = -5,84$ meV, $Ge_{Ga}, Se_{As} : E_B = -5,88$ meV, $S_{As} : E_B = -5,87$ meV.

Si: Die experimentellen Werte variieren stark mit dem Donatormaterial: $Li : E_B = -33$ meV, $P : E_B = -45$ meV, $As : E_B = -53$ meV, $Bi : E_B = -71$ meV

Die Abweichungen für Silizium begründen sich durch:

- Anisotrope Masse: Leitungsband nicht isotrop und parabolisch
- Leitungsbandtöler gekoppelt: sog. "orbit-valley" Kopplung führt zur Aufspaltung des 1s Niveaus von z.B. P in Si
- Störpotential ist nicht rein Coulombartig, deshalb muss man Korrekturen nahe dem Störatom berücksichtigen, dies führt zu einem vom jeweiligen Dotieratom abhängigen "chemical shift"

23 Ladungsträgerkonzentration

(a) Für den undotierten Halbleiter gilt

$$n = p = n_i = N_C \exp\left(\frac{E_F - E_C}{kT}\right) = N_V \exp\left(\frac{E_V - E_F}{kT}\right)$$

Ausgehend von dem Massenwirkungsgesetz $np = n_i^2$ und der Ladungsneutralität $\rho = e(p - n + N_D + N_A) = 0$ erhält man für den dotierten Halbleiter die Elektronendichte zu

$$p = n_i^2/n \quad \rightarrow \quad n^2 - (N_D - N_A)n - n_i^2 = 0$$

$$n = \frac{N_D - N_A}{2} + \sqrt{\frac{(N_D - N_A)^2}{4} + n_i^2}$$

und die Löcherdichte zu

$$n = n_i^2/p \quad \rightarrow \quad p^2 + (N_D - N_A)p - n_i^2 = 0$$

$$p = -\frac{N_D - N_A}{2} + \sqrt{\frac{(N_D - N_A)^2}{4} + n_i^2}$$

In einem reinen n-dotierten Halbleiter gibt es keine Akzeptoren $N_A = 0$. Damit gilt für die Trägerdichten

$$n = \frac{N_D}{2} + \sqrt{\frac{N_D^2}{4} + n_i^2}$$

$$p = -\frac{N_D}{2} + \sqrt{\frac{N_D^2}{4} + n_i^2}$$

- (b) Das Quadrat der intrinsischen Dichte ergibt sich mit dem Bandabstand $E_G = E_C - E_V = 0,17$ eV bei $T = 300$ K zu

$$n_i^2 = N_C N_V \exp\left(-\frac{E_G}{kT}\right) = 4,273 \cdot 10^{32} \text{ cm}^{-6}$$

Unter Verwendung der Gleichungen für die Elektronen- und Löcherdichte für den n-dotierten Halbleiter aus Punkt (a) erhält man unmittelbar

$$n = 4,054 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

$$p = 1,054 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

24 Temperatursensor

- (a) Man erhält die Ladungsträgerdichten mit der gleichen Vorgehensweise wie in Beispiel 23. (b). Sie ergeben sich bei $T = 300$ K zu

$$n = 1,047 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3} \quad p = 4,686 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$$

Die spezifische Leitfähigkeit errechnet sich zu

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p) = 66,84 \text{ mS/cm}$$

- (b) Für $T = 400$ K ergeben sich als Trägerdichten

$$n = 5,909 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3} \quad p = 4,909 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$$

Unter der Annahme, dass die Beweglichkeiten zu $1/T^2$ proportional sind folgt

$$\mu_n(T) = b/T^2 \quad b = \mu_n(300)300^2 = 3,51 \cdot 10^{18}$$

$$\mu_p(T) = c/T^2 \quad c = \mu_p(300)300^2 = 1,71 \cdot 10^8$$

Also allgemein für die Beweglichkeiten

$$\mu_n(T) = \frac{3,51 \cdot 10^{18}}{T^2} \quad \mu_p(T) = \frac{1,71 \cdot 10^8}{T^2}$$

Damit erhält man die Beweglichkeiten bei $T = 400$ K

$$\mu_n = 2193,75 \text{ cm}^2/\text{Vs} \quad \mu_p = 1068,75 \text{ cm}^2/\text{Vs}$$

und damit die spezifische Leitfähigkeit

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p) = 291,75 \text{ mS/cm}$$

(c) Für die Anordnung gilt mit der Annahme einer homogenen Stromverteilung

$$R = \frac{l}{\sigma A}$$

Mit $d = 50 \text{ } \mu\text{m}$, $A = (d^2\pi)/4 = 1,96 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$ und $l = 0,3 \text{ mm}$ erhält man die elektrischen Widerstände

$$R_{300} = 228,58 \text{ k}\Omega \quad R_{400} = 52,37 \text{ k}\Omega$$

25 Shockley-Haynes-Experiment

(a) Vergleicht man die Dichtefunktion mit jener im Skriptum S. 105 erkennt man, dass die Verschiebung der Glockenkurve gegeben ist durch $\Delta x = \mu_n Et$. In unserem Fall mit $\Delta x = 1 \text{ mm}$, $t = 10 \text{ } \mu\text{s}$ ergibt sich für die Elektronenbeweglichkeit

$$\mu_n = \frac{\Delta x}{Et} = 1000 \text{ cm}^2/\text{Vs}$$

(b) Aus der Einsteinrelation ergibt sich unmittelbar die Diffusionskonstante

$$D_n = U_T \mu_n = 25,85 \text{ cm}^2/\text{S}$$

(c) Mit dem Ansatz

$$G - R = -\frac{n - n_0}{\tau_L}$$

erhält man unter Annahme, dass keine Paarerzeugungsprozesse mehr stattfinden $G = 0$ und keine Minoritäten vor der Anregung vorhanden waren $n_0 = 0$ die Rekombinationsrate

$$R = \frac{n}{\tau_L}$$

Die Höhe der Gaußglocke nimmt exponentiell mit der Zeit ab gemäß

$$n(t) = n(0)e^{-t/\tau_L} = e^{-t/\tau_L}$$

da man aus dem Diagramm $n(0) = 1$ abliest. Durch Umformung erhält man die Lebensdauer zu

$$\tau_L = -t / \ln[n(t)]$$

Für $t_1 = 10 \mu\text{s}$, $n(t_1) = 0,05$ ergibt sich damit die Lebensdauer zu

$$\tau_L = 3,338 \mu\text{s}$$

und die Rekombinationsrate

$$R = \frac{e^{-t/\tau_L}}{\tau_L} = \frac{e^{-t/3,338 \mu\text{s}}}{3,338 \mu\text{s}}$$

26 Photoleitung

Im unbeleuchteten Fall ergibt sich der Dunkelstrom

$$i_0 = dlJ = dl\sigma E$$

Für den rein n-dotierten Halbleiter $p_0 = 0$ ist die Leitfähigkeit gegeben als

$$\sigma = e(n_0\mu_n + p_0\mu_p) = en_0\mu_n$$

also für den Dunkelstrom

$$i_0 = dlen_0\mu_n E$$

Wird der Halbleiter beleuchtet gilt für den Strom

$$i = Ed \int_0^l \sigma(x) dx$$

und für den zusätzlich generierten Strom

$$\Delta i = Ed \int_0^l \Delta\sigma(x) dx$$

Mit $\Delta\sigma(x) = e\Delta p(x)(\mu_n + \mu_p)$. Mit den Löcherüberschuss aus Beispiel 27 also

$$\Delta\sigma(x) = \frac{e\alpha\tau I_0}{h\nu(\alpha^2 L_p^2 - 1)} (\alpha L_p e^{-x/L_p} - e^{-\alpha x}) (\mu_n + \mu_p) \approx$$

$$\frac{e\alpha\tau I_0}{h\nu} (\mu_n + \mu_p) e^{-\alpha x} \quad : L_p\alpha \ll 1$$

Damit ergibt sich für den zusätzlichen Strom

$$\Delta i = \frac{Ede\alpha\tau I_0(\mu_n + \mu_p)}{h\nu} \int_0^l e^{-\alpha x} dx = \frac{Ede\tau I_0(\mu_n + \mu_p)}{h\nu} (1 - e^{-\alpha l})$$

Für $\alpha l \ll 1$ kann man die Exponentialfunktion durch ihr Taylorpolynom 1. Ordnung approximieren

$$e^{-\alpha l} \approx 1 - \alpha l$$

Man erhält also für den Strom

$$\Delta i = \frac{Ede\tau I_0(\mu_n + \mu_p)\alpha l}{h\nu}$$

und für den Quotienten

$$\frac{\Delta i}{i_0} = \frac{\tau\alpha I_0}{h\nu n_0} \left(1 + \frac{\mu_p}{\mu_n}\right)$$

27 Diffusion

(a) Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{e} \frac{\partial J_p}{\partial x} = G(x) - R(x)$$

Die Diffusionsstromdichte ist gegeben durch

$$J_p = -eD_p \frac{\partial p}{\partial x}$$

Durch Einsetzen der Stromdichte und der Ansätze für die Generations- und Rekombinationsrate in die Kontinuitätsgleichung ergibt sich

$$\frac{\partial p}{\partial t} - D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\alpha I_0}{h\nu} e^{-\alpha x} - \frac{\Delta p}{\tau}$$

Mit $p = \Delta p - p_0$ wobei p_0 die Trägerdichte im unbelichteten Fall bezeichnet und eine Konstante ist, folgt für die Ableitungen im stationären Fall

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2}$$

Eingesetzt in die Kontinuitätsgleichung ergibt die Differentialgleichung für den Löcherüberschuss

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} - \frac{1}{D_p \tau} \Delta p = -\frac{\alpha I_0}{D_p h\nu} e^{-\alpha x}$$

- (b) Es handelt sich um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit dem charakteristischen Polynom $P(s) = s^2 - 1/(D_p\tau)$. Die Nullstellen des Polynoms sind $p_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{D_p\tau}} = \pm \frac{1}{L_p}$ mit der Diffusionslänge $L_p = \sqrt{D_p\tau}$. Dementsprechend ergibt sich die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu

$$\Delta p_h(x) = C_1 e^{-x/L_p} + C_2 e^{x/L_p}$$

Eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich zu

$$\Delta p_p(x) = -\frac{\alpha I_0}{D_p h\nu} e^{-\alpha x} \frac{1}{P(-\alpha)} = -\frac{\alpha I_0 \tau}{h\nu(\alpha^2 L_p^2 - 1)} e^{-\alpha x}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist nun

$$\Delta p(x) = \Delta p_h(x) + \Delta p_p(x) = C_1 e^{-x/L_p} + C_2 e^{x/L_p} - \frac{\alpha I_0 \tau}{h\nu(\alpha^2 L_p^2 - 1)} e^{-\alpha x}$$

Aus der Randbedingung $\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta p(x) = 0$ folgt $C_2 = 0$. Die zweite Randbedingung $J_p(0) = 0$ liefert

$$J_p(0) = -eD_p \frac{\partial \Delta p}{\partial x} \Big|_{x=0} = -eD_p \left[-\frac{C_1}{L_p} + \frac{\alpha^2 I_0 \tau}{h\nu(\alpha^2 L_p^2 - 1)} \right] = 0$$

Wodurch sich die Konstante ergibt

$$C_1 = \frac{\alpha^2 L_p I_0 \tau}{h\nu(\alpha^2 L_p^2 - 1)}$$

Damit erhalten wir als Lösung

$$\Delta p(x) = \frac{\alpha I_0 \tau}{h\nu(\alpha^2 L_p^2 - 1)} (\alpha L_p e^{-x/L_p} - e^{-\alpha x})$$

28 Halleffekt

- (a) Gemäß dem lokalen ohmschen Gesetz gilt

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}' = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Wobei in unserem Fall $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ und

$$\vec{v} \times \vec{B} = (-Bv_y, Bv_x, 0)^T$$

Im Rahmen des Drude-Modells erhält man die Kraftgleichung für den stationären Fall (die Zeitableitung verschwindet)

$$\vec{F} = e\vec{E}' = m^* \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m^* \vec{v}}{\tau} = \frac{m^* \vec{v}}{\tau}$$

und damit den Zusammenhang

$$en\vec{v} = \vec{J} = \frac{e^2 n \tau}{m^*} \vec{E}'$$

und durch Vergleich mit den ohmschen Gesetz die Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m^*}$$

Das lokale ohmsche Gesetz lässt sich umformen zu

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{J} - \frac{1}{en} \vec{J} \times \vec{B} = \hat{\varrho} \vec{J}$$

woraus sich der spezifische Widerstandstensor ergibt zu

$$\hat{\varrho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma} & \frac{B}{en} & 0 \\ -\frac{B}{en} & \frac{1}{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} \end{pmatrix}$$

Durch Inversion erhält man den spezifischen Leitfähigkeitstensor

$$\hat{\sigma} = (\hat{\varrho})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma e^2 n^2}{e^2 n^2 + B^2 \sigma^2} & -\frac{B \sigma^2 en}{e^2 n^2 + B^2 \sigma^2} & 0 \\ \frac{B \sigma^2 en}{e^2 n^2 + B^2 \sigma^2} & \frac{\sigma e^2 n^2}{e^2 n^2 + B^2 \sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

(b) Gemäß

$$U_y = -\frac{IB}{enL_z}$$

ergibt sich die Elektronendichte zu

$$n = -\frac{IB}{eU_y L_z} = 1,486 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

Über $U_y = -\mu E_x B L_y$ und $E_x = U_x / L_x$ errechnet sich die Beweglichkeit zu

$$\mu = -\frac{U_y L_x}{U_x B L_y} = 506 \text{ cm}^2/\text{Vs}$$

und aus diesen beiden Größen die Leitfähigkeit

$$\sigma = e\mu n = 12,048 \text{ S/m}$$

29 Interbandabsorption in GaAs

- (a) Das optische Spektrum erstreckt sich ca. von der Wellenlänge $\lambda = [380, 750]$ nm. Der maximale Photonenimpuls ist wegen $p_{Ph} = h/\lambda$ für die untere Grenze $\lambda = 380$ nm erreicht und beträgt

$$p_{Ph} = 1,744 \cdot 10^{-27} \text{ kgm/s}$$

Der Impuls des Elektrons im Halbleiter ist bestimmt durch $p_e = \hbar k$ und ist z.B. für die Grenze der 1. Brillouin-Zone $k = \pi/a$ mit der Gitterkonstanten a :

$$p_e = \frac{h}{2a} = 5,92 \cdot 10^{-25} \text{ kgm/s}$$

Bei der Bestrahlung mit Licht erfolgt ein Stoßvorgang zwischen Photon und Elektron, wobei das Photon im Falle von Absorption vernichtet wird und seinen Impuls (nach dem Impulserhaltungssatz) vollständig an das Elektron abgibt. Der Impuls des Elektrons p nach dieser Anregung ist daher

$$p = p_e + p_{Ph} \approx p_e$$

da wie zuvor gesehen der Photonenimpuls um mindestens 2 Zehnerpotenzen kleiner als der Elektronenimpuls ist und daher vernachlässigt werden kann. Der Elektronenimpuls bleibt damit näherungsweise konstant und damit auch der Wellenvektor k wegen $p = \hbar k$. Optische Übergänge finden also im $E(k)$ Diagramm nur senkrecht statt.

- (b) Energie- und Impulserhaltungssatz ergeben

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p^*} + E_G + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*}$$

Woraus für den Wellenvektor mit $m_r^{-1} = (m_n^*)^{-1} + (m_p^*)^{-1}$ folgt

$$k = \sqrt{\frac{2m_r}{\hbar^2}(\hbar\omega - E_G)}$$

Für die Energie des Anfangs- und Endzustandes, E_1 und E_2 gilt damit

$$E_1 = E_V - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p^*} = E_V - \frac{m_r}{m_p^*}(\hbar\omega - E_G)$$

$$E_2 = E_C + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*} = E_C + \frac{m_r}{m_n^*}(\hbar\omega - E_G)$$

Die Ableitung nach der Kreisfrequenz liefert

$$dE_1 = -\frac{m_r}{m_p^*} \hbar d\omega \quad dE_2 = \frac{m_r}{m_n^*} \hbar d\omega$$

Die kombinierte Zustandsdichte $Z_j(\omega)$ ergibt sich aus

$$Z(E_V - E_1)dE_1 = -Z_j(\omega)d\omega$$

wobei für die Zustandsdichte im Valenzband gilt $Z(E) = \frac{(2m_p^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\sqrt{E}$. Einsetzen in vorige Gleichung liefert die kombinierte Zustandsdichte

$$Z_j(\omega) = \frac{(2m_r)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^2}\sqrt{\hbar\omega - E_G}$$

Sie errechnet sich ebenso aus

$$Z(E_2 - E_C)dE_2 = Z_j(\omega)d\omega$$

mit der Zustandsdichte im Leitungsband $Z(E) = \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\sqrt{E}$, was durch Einsetzen leicht überprüft werden kann.

Der Absorptionskoeffizient ist definiert als

$$\alpha(\omega) = \sigma(\omega)Z_j(\omega)(f_{abs} - f_{em})$$

Für $T = 0$ K ist das Valenzband voll besetzt $f_V(E_1) = 1$ und das Leitungsband leer $f_C(E_2) = 0$. Somit ergibt sich für die Absorptions- und Emissionswahrscheinlichkeit

$$f_{abs} = f_V(E_1)[1 - f_C(E_2)] = 1$$

$$f_{em} = f_C(E_2)[1 - f_V(E_1)] = 0$$

Damit erhält man mit einem konstanten Übergangsquerschnitt $\sigma(\omega) = \sigma$ den Absorptionskoeffizienten zu

$$\alpha(\omega) = \sigma Z_j(\omega) = \sigma \frac{(2m_r)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^2}\sqrt{\hbar\omega - E_G}$$

30 Leuchtdiode, Laser

Der Emissionskoeffizient ist definiert als

$$r_{sp}(\omega) = \sigma_{sp}(\omega)Z_j(\omega)f_C(E_2)[1 - f_V(E_1)]$$

Im Fall einer schwachen Anregung sind die Fermienergie $E_{F,C}$ und $E_{F,V}$ weit weg von den Bandkanten. Es gilt $E_2 - E_{F,C} \gg kT$ und $E_{F,V} - E_1 \gg kT$. Man kann statt der Fermi-Dirac die Maxwell-Boltzmann-Verteilung verwenden.

$$f_C(E_2) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_2 - E_{F,C}}{kT}\right)} \approx \exp\left(\frac{E_{F,C} - E_2}{kT}\right)$$

$$f_V(E_1) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_1 - E_{F,V}}{kT}\right)} = \frac{1 - \exp\left(\frac{E_1 - E_{F,V}}{kT}\right)}{1 - \exp\left(2\frac{E_1 - E_{F,V}}{kT}\right)} \approx 1 - \exp\left(\frac{E_1 - E_{F,V}}{kT}\right)$$

Für die kombinierte Zustandsdichte setzt man

$$Z_j(\omega) = \frac{(2m_r)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^2} \sqrt{\hbar\omega - E_G} \approx \sqrt{\hbar\omega - E_G}$$

und erhält durch Einsetzen in die Gleichung für den Emissionskoeffizienten mit $\hbar\omega = E_2 - E_1$ und konstantem Emissionsquerschnitt

$$\begin{aligned} r_{sp}(\omega) &= \sigma_{sp} \sqrt{\hbar\omega - E_G} \exp\left(\frac{E_{F,C} - E_2 + E_1 - E_{F,V} + E_G - E_G}{kT}\right) = \\ &= \sigma_{sp} \sqrt{\hbar\omega - E_G} \exp\left(\frac{E_{F,C} - E_{F,V} - E_G}{kT}\right) \exp\left(-\frac{\hbar\omega - E_G}{kT}\right) = \\ &= \sigma_{sp} \sqrt{\hbar\omega - E_G} D \exp\left(-\frac{\hbar\omega - E_G}{kT}\right) \end{aligned}$$

31 pn-Übergang

- (a) Gemäß den Gleichungen (3.30) S. 80 im Skriptum ergibt sich für die Fermienergie im n- bzw. p-Halbleiter ($N_A = 0$ bzw. $N_D = 0$)

$$E_{F,n} = E_{C,n} - kT \ln\left(\frac{N_C}{N_D}\right)$$

$$E_{F,p} = E_{V,p} + kT \ln\left(\frac{N_V}{N_A}\right)$$

Gleichsetzen beider Fermienergien liefert die Gleichung

$$E_{C,n} - E_{V,p} = kT \ln\left(\frac{N_V N_C}{N_A N_D}\right)$$

Gemäß dem Bandschema aus der Angabe folgt der Zusammenhang

$$eU_D = E_G + E_{V,p} - E_{C,n} = E_G - (E_{C,n} - E_{V,p}) = E_G - kT \ln\left(\frac{N_V N_C}{N_A N_D}\right)$$

Gleichung (3.22) aus dem Skriptum liefert mit $E_G = E_C - E_V$

$$N_C N_V = n_i^2 e^{E_G/kT}$$

Einsetzen in vorige Gleichung ergibt

$$eU_D = E_G - kT \ln\left(\frac{n_i^2 e^{E_G/kT}}{N_A N_D}\right) = E_G - kT \frac{E_G}{kT} - kT \ln\left(\frac{n_i^2}{N_A N_D}\right) = kT \ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right)$$

Mit der Temperaturspannung $U_T = kT/e$ folgt der gesuchte Zusammenhang

$$U_D = U_T \ln \left(\frac{N_A N_D}{n_i^2} \right)$$

- (b) Die Abbildungen lassen sich im Skriptum auf S. 123 und S. 129 finden.
 (c) Die Herleitung dieser Größen wird im Skriptum auf S. 130 durchgeführt.

32 CV-Methode

- (a) Mit der Länge der Raumladungszone

$$d = \sqrt{\frac{2\varepsilon(U_D - U)}{N_0 e}}$$

ergibt sich für die Kapazität zu

$$C = \varepsilon A/d = A \sqrt{\frac{\varepsilon e N_0}{2(U_D - U)}}$$

- (b) Im n^+p Übergang ist die Dotierung des n -Gebietes viel größer als die des p -Gebietes $N_D \gg N_A$. Dementsprechend gilt $N_0 \approx N_A$. Eingesetzt in die Kapazitätsgleichung aus (a) und umgeformt ergibt

$$N_A = \frac{2C^2(U_D - U)}{e\varepsilon A^2}$$

- (c) Differentiation der Kapazitätsgleichung nach der Spannung U ergibt

$$\frac{dC}{dU} = \frac{A}{(U_D - U)^{3/2}} \sqrt{\frac{\varepsilon e N_A}{2}} = \frac{2}{2A^2 \varepsilon e N_A} \left(A \frac{\varepsilon e N_A}{2(U_D - U)} \right)^{3/2} = \frac{C^3}{A^2 \varepsilon e N_A}$$

Durch Umformen folgt die Dotierung

$$N_A = \frac{C^3}{A^2 \varepsilon e} \left| \frac{dC}{dU} \right|^{-1}$$

bei $x = \varepsilon A/C$. Substitution durch x ergibt die Dotierung in Abhängigkeit der Tiefe

$$N_A(x) = \frac{\varepsilon^2 A}{e x^3} \left| \frac{dC}{dU} \right|^{-1}$$