

1

In einem System von Kugelkoordinaten $(r; \theta; \alpha)$ sind zwei Punkte durch die Koordinaten

$$\mathcal{P}_1 : (1, 0\text{m}; \pi/4; 0), \quad \mathcal{P}_2 : (1, 5\text{m}; 3\pi/4, \pi)$$

fixiert. Bestimmen Sie den euklidischen Abstand der beiden Punkte (Skizze!).

2

\vec{f} und \vec{g} sind zwei stetig differenzierbare Vektorfelder. Drücken Sie das Hüllenintegral

$$\int_{\partial V} \vec{n} \cdot \vec{f} \vec{g} dA$$

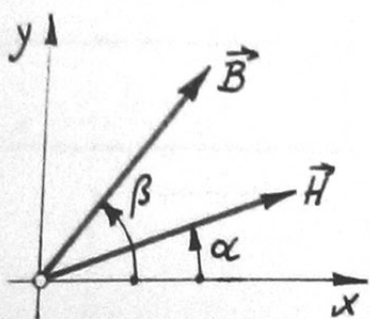
koordinatenfrei durch ein Volumenintegral aus.

3

Ein stationäres Magnetfeld im leeren Raum ist in Kreiszyylinderkoordinaten durch das Vektorpotential

$$\vec{A} = K \cdot \ln(\varrho/a) \vec{e}_z, \quad K \text{ und } a \text{ const.},$$

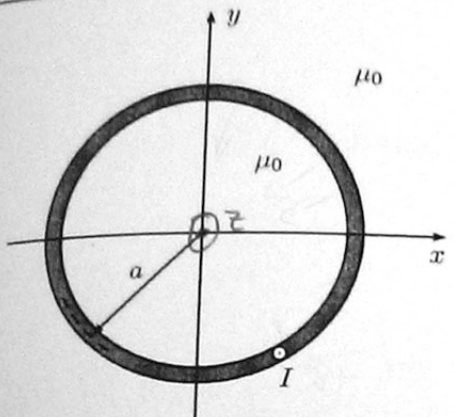
gegeben. Bestimmen Sie für dieses Feld ein magnetisches Skalarpotential.

4

Ein anisotrop magnetisierbares Material besitze bezüglich ebener Magnetfelder in einem passend gewählten kartesischen Koordinatensystem die Darstellung

$$\underline{\underline{\mu}} = (500 \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + 1000 \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y) \mu_0$$

des Permeabilitätstensors. Berechnen und skizzieren Sie den Verlauf des Winkels β als Funktion des Winkels α .

5

Ein dünnwandiges Kupferrohr führt gleichförmig verteilt einen elektrischen Strom der Stärke I .

Berechnen Sie die längenbezogene Kraft, die das Halbrohr im Bereich $x < 0$ auf das Halbrohr im Bereich $x > 0$ ausübt. Entsteht in der Rohrwandung eine mechanische Druck- oder eine Zugkraft?

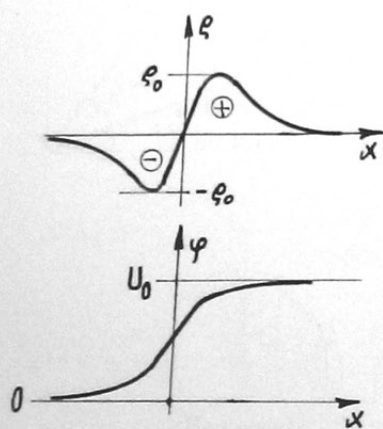
An einem ebenen, eindimensional modellierten pn-Übergang stellt sich die durch

$$\rho(x) = \rho_0 \cdot 2 \frac{\sinh(x/a)}{\cosh^2(x/a)}$$

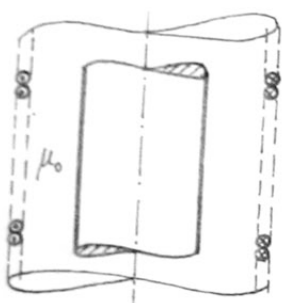
approximierte Raumladungsdichte ein. Berechnen Sie den skizzierten Verlauf des zugehörigen Potentials $\varphi(x)$. Nehmen Sie dazu eine einheitliche Permittivität $\epsilon = \text{const}$ an und bestimmen Sie insbesondere den Zusammenhang zwischen ρ_0 und U_0

Hinweis:

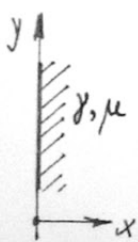
$$\int \frac{d\xi}{\cosh(\xi)} = \arctan[\sinh(\xi)] + \text{const}$$



Im Zuge einer Modelluntersuchung ergibt sich folgendes Problem: Im Punkt \mathcal{O} eines allseitig weit ausgedehnten Körpers der Permittivität ϵ und der Konduktivität γ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ die Ladungsmenge Q_0 injiziert. Berechnen Sie die Strom- und Ladungsverteilung in der Umgebung von \mathcal{O} .



Ein kreiszylindrisches Werkstück wird zur Aufheizung der Mantelfläche in eine kreiszylindrische Spule mit $N' = 100$ Windungen / Meter geschoben und diese mit einem Sinusstrom $I = 600$ A (Effektivwert) bei $f = 100$ kHz gespeist. Nehmen Sie für das Werkstück $\mu = \mu_0$, $\gamma = 10^7$ S/m an und berechnen Sie den zeitlichen Mittelwert der oberflächenbezogenen Verlustleistung. Wegen der klein zu erwartenden Eindringtiefe δ können Sie von dem ebenen Eindringmodell



$$\vec{H}(x, t) = \text{Re} \left\{ \hat{H} e^{-x/\delta + j(\omega t - x/\delta)} \right\} \vec{e}_y, \quad x \geq 0,$$

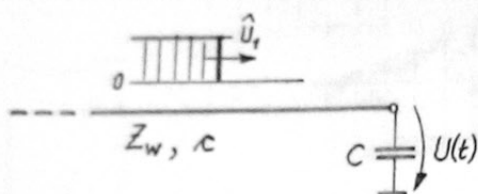
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \gamma \omega}}$$

ausgehen.

Berechnen Sie die zu einer ebenen Sinuswelle im leeren Raum mit der elektrischen Feldstärke

$$\vec{E}(z, t) = \hat{E} \cos[2\pi(t/T - z/\lambda)] \vec{e}_y$$

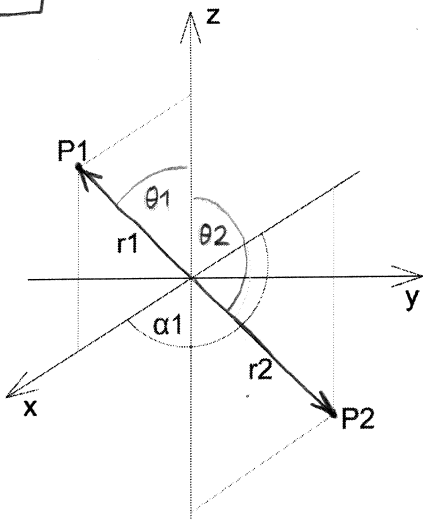
gehörende, mittlere Energieflußdichte.



Eine näherungsweise verlustfreie Leitung ist einem Kondensator abgeschlossen. Es fällt eine Sprungwelle mit dem Scheitelwert \hat{U}_1 ein. Berechnen Sie allgemein den Zeitverlauf $U(t)$ der Spannung am Abschluß.

Elektrodynamik – schriftliche Prüfung 01.07.2009
LÖSUNGEN

1



$P_1(r_1, \theta_1, \alpha_1)$:
 $r_1 = 1\text{m}$
 $\theta_1 = 45^\circ$
 $\alpha_1 = 0^\circ$

$P_2(r_2, \theta_2, \alpha_2)$:
 $r_2 = 1,5\text{m}$
 $\theta_2 = 135^\circ$
 $\alpha_2 = 180^\circ$

aus Skizze: Abstand zw. P_1 und $P_2 = r_1 + r_2 = 2,5\text{m}$

2 mit Satz von Gauß: $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV = \int_{\partial V} \vec{n} \cdot \vec{f} dA \Rightarrow$

$$\int_{\partial V} \vec{n} \cdot \vec{f} \vec{g} dA = \int_{\partial V} \vec{n} \cdot (\vec{f} \otimes \vec{g}) dA =$$

$$= \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{f} \otimes \vec{g}) dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \vec{g} dV = \int_V (\vec{g} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{f} + \vec{f} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{g}) dV$$

3 $\rightarrow \varphi_M = ? \Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla} \varphi_M$ mit $\vec{A} = A_z(\rho) \vec{e}_z$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\mu_0} (-\vec{e}_\alpha \partial_\rho A_z) = -\frac{\vec{e}_\alpha}{\mu_0} k \frac{1}{\rho}$$

überprüfen: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0} ?$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{k}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{e}_\alpha}{\rho} = -\frac{k}{\mu_0} \left[\vec{e}_z \frac{1}{\rho} \partial_\rho \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] = \vec{0} \checkmark$$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla} \varphi_M$$

$$-\frac{k}{\mu_0} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\alpha = -\left(\vec{e}_\rho \partial_\rho \varphi_M + \vec{e}_\alpha \frac{1}{\rho} \partial_\alpha \varphi_M + \vec{e}_z \partial_z \varphi_M \right)$$

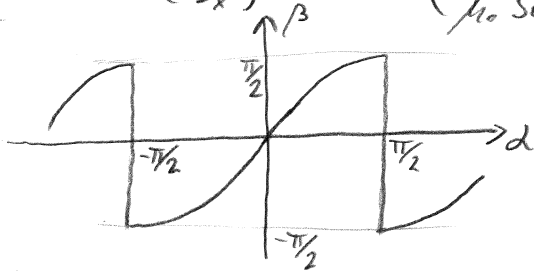
$$\Rightarrow \partial_\alpha \varphi_M = \frac{k}{\mu_0} \rightarrow \varphi_M = \frac{k}{\mu_0} \alpha + C \quad | C = \text{const} = 0 \text{ o.B.d.A.}$$

$$\underline{\underline{\varphi_M = \frac{k}{\mu_0} \alpha}}$$

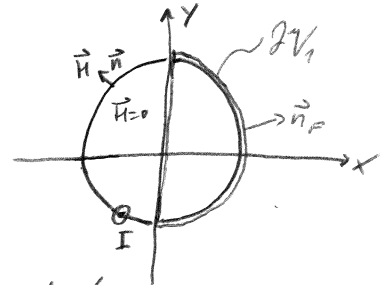
4 $\vec{H} = H_x \vec{e}_x + H_y \vec{e}_y$

$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} = \mu_0 (500 \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + 1000 \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y) \cdot (H_x \vec{e}_x + H_y \vec{e}_y) = \underbrace{\mu_0 500 H_x}_{B_x} \vec{e}_x + \underbrace{\mu_0 1000 H_y}_{B_y} \vec{e}_y$

$\beta = \arctan\left(\frac{B_y}{B_x}\right) = \arctan\left(\frac{\mu_0 1000 H_x}{\mu_0 500 H_y}\right) = \arctan(2 \tan(\alpha))$



5 dünnwandiges Rohr, I gleichförmig
Rohr gedanklich trennen



Innen: DFS: $V(\partial A) = I(A)$

→ im gesamten Innenraum keine Stromverteilungen

→ somit rechte Seite von DFS = 0

→ linke Seite: $V(\partial A) = \int_{\partial A} H_s ds \dots$ wegen hoher Symmetrie

($\partial A \rightarrow$ konzentrische Kreise um Nullpkt. in xy-Ebene)

kann Projektion von \vec{H} auf Einstangentenvektor \vec{s} (also H_s) in jedem Integrationspkt. konstant gesetzt werden und vor

Integral gezogen werden, somit $V = H_s 2\pi r \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow$ folgt: $H_s = 0$

diese genaue Erklärung bei mündl. P.fg. verlangt!

Außen: Feld von zylindrischen Linienleiter: $\vec{H} = \frac{I}{2\pi a} \vec{e}_\phi$

$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi a} \vec{e}_\phi$

Kraft: Hälften müssen sich gegenseitig anziehen (Kraft zw. 2 gleichsinnig durchflossenen Leitern: anziehend)

Vgl.: Zugkräfte entlang der magn. Flussdichtelinien $\hat{=}$ Gummiringel rundherum

→ ∂V_1 um rechte Rohrhälfte: direkt knapp über Rand im Außenraum (Innen keine Kräfte weil kein Feld)

[man könnte auch $\partial V_1 \rightarrow \infty$ gehen lassen und von a bis ∞ entlang y-Achse integr.]

$\vec{F}_R = \int_{\partial V_1} \frac{1}{\mu_0} (\vec{n}_r \cdot \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n}_r) dA$

längenbezogen: $\vec{F}'_R = \frac{1}{\mu_0} \left[\underbrace{\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi}_{0} \vec{e}_\phi \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\right)^2 \vec{e}_\phi \right] \pi a = - \frac{\mu_0 I^2}{8\pi a} \vec{e}_\phi$

$-\vec{e}_\phi$ Richtung $\hat{=}$ anziehend ✓

6 $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$
 $\vec{E} = E_x\vec{e}_x$, $\vec{D} = D_x\vec{e}_x$

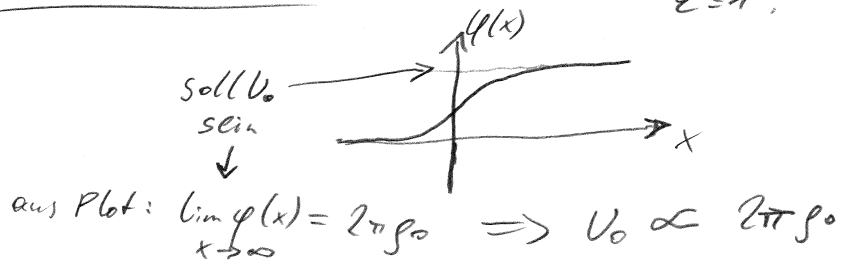
$$\partial_x D_x = \rho(x) \Rightarrow D_x = \int \rho(x) dx = \int 2\rho_0 \frac{\sinh(\frac{x}{a})}{\cosh^2(\frac{x}{a})} dx =$$

$$= -\frac{2\rho_0 a}{\cosh(\frac{x}{a})} + C, \quad C = \text{const} = 0 \quad \text{o.B.d.A.}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \rightarrow \frac{D_x}{\epsilon} = -\vec{\nabla}\varphi \rightarrow \frac{D_x}{\epsilon} = -\partial_x \varphi:$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{2\rho_0 a}{\cosh(\frac{x}{a})} dx = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} 2a \arctan(e^{x/a}) =$$

$$= \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \arctan(e^{x/a}) \Rightarrow \text{Plot z.B. mit } a=1, \epsilon=1:$$



7 = A 3.3.1

8 = A 4.2.8

Hinweis: $\frac{1}{j} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{j} \vec{\nabla} \times \text{Re} \left\{ \dots \right\} \vec{e}_y = \frac{1}{j} \text{Re} \left\{ \vec{\nabla} \times \vec{H} e^{-x/a + j(\omega t - x/a)} \vec{e}_y \right\} =$

$$= \frac{1}{j} \text{Re} \left\{ -\vec{e}_y \times \vec{\nabla} \vec{H} e^{-x/a + j(\omega t - x/a)} \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{j} \left(-\frac{1}{a} - \frac{j}{a} \right) \vec{H} e^{-x/a + j(\omega t - x/a)} \right\} \vec{e}_x$$

bleibt nur \vec{e}_x -komponente über!
 \vec{E}

9 = A 5.2.3

10 allgemein: $V(t) = U_1(t - \frac{\tau}{2}) + U_2(t + \frac{\tau}{2})$
 $I(t) = I_1(t - \frac{\tau}{2}) + I_2(t + \frac{\tau}{2})$

$U_1(t) = Z_w I_1(t)$
 $U_2(t) = -Z_w I_2(t)$
 $U_1(t) = \hat{U}_1 \epsilon(t) \rightarrow \text{lt. Angabe}$

$Z=0: V(t) = U_1(t) + U_2(t)$
 $I(t) = I_1(t) + I_2(t) = \frac{U_1(t)}{Z_w} - \frac{U_2(t)}{Z_w} = \frac{2U_1(t)}{Z_w} = \frac{U(t)}{Z_w}$

am Kondensator: $I(t) = C \dot{U}(t)$

$$\rightarrow C \dot{U}(t) = \frac{2U_1(t)}{Z_w} - \frac{U(t)}{Z_w}$$

$$Z_w C \dot{U}(t) + U(t) = 2\hat{U}_1 \epsilon(t)$$

\hookrightarrow Lsg. der inhom. Diff'glg. 1. Ord.: $U(t) = U_{\infty} (1 - e^{-t/\tau}) \epsilon(t)$

mit $U_{\infty} = 2\hat{U}_1$

$\tau = Z_w C$