

# Herleitungen aus dem Skriptum Elektrodynamik

23. November 2010

## Inhaltsverzeichnis

1	Poynting-Satz	1
2	Bilanzgleichungen für Energie und Impuls	2
3	Zweidimensionale Lösungen der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten	3
4	Leitungsgleichung für die verlustbehaftete Doppelleitung	4

## 1 Poynting-Satz

Ausgehend vom Poynting-Vektor  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  berechnen wir die negative Divergenz von  $\vec{S}$  mit Hilfe des Nabla Kalküls und den Rechenregeln für das Spatprodukt:

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} &= -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \\ &= -\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \end{aligned}$$

Einsetzen des Induktionsgesetzes  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$  und des Ampere-Maxwell Satzes  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D}$  ergibt:

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{E} \cdot (\vec{J} + \partial_t \vec{D})$$

Integrieren beider Seiten über das Volumen  $\mathcal{V}$  und einsetzen des Satz von Gauß ergibt den Poynting-Satz:

$$-\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot \vec{S} \, dA = \int_{\mathcal{V}} (\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{E} \cdot \vec{J}) \, dV$$

Interpretation:

- Die linke Seite beschreibt den Energiefluss in die Hülle  $\partial\mathcal{V}$ .
- Das Produkt  $\vec{E} \cdot \vec{J}$  beschreibt die Wechselwirkung mit anderen Energieformen über Ströme, z.B. Joule-Verluste.

- Die 2 restlichen Terme kann man bei näherer Betrachtung als die zeitliche Ableitung des Energieinhaltes identifizieren (für raumfeste Flächen darf die Zeitableitung unter das Integral gezogen werden):

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} w^e dV = \partial_t \int_{\mathcal{V}} \left( \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \vec{E}^2 \right) dV = \int_{\mathcal{V}} (\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D}) dV$$

Zusammenfassung:

Der gesamte Energiefluss durch die Hülle  $\partial\mathcal{V}$  wird im Elektromagnetischen Feld gespeichert oder über Ströme in andere Energieformen umgewandelt.<sup>1</sup>

## 2 Bilanzgleichungen für Energie und Impuls

Wir gehen von den globalen Bilanzgleichungen für Energie und Impuls<sup>2</sup> aus:

$$\begin{aligned} \dot{W}(\mathcal{V}) + Q(\partial\mathcal{V}) &= R(\mathcal{V}) \\ \dot{\vec{G}}(\mathcal{V}) + \vec{P}(\partial\mathcal{V}) &= \vec{F}(\mathcal{V}) \end{aligned}$$

Nun werden die Größen als lokale Dichten dargestellt.

$$\begin{aligned} W(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}} w dV, & Q(\mathcal{A}) &= \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \vec{q} dA, & R(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}'} r dV + \int_{\mathcal{S}'} r^s dA \\ \vec{G}(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}} \vec{g} dV, & \vec{P}(\mathcal{A}) &= \int_{\mathcal{A}} \vec{n} \cdot \underline{p} dA, & \vec{F}(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}'} \vec{f} dV + \int_{\mathcal{S}'} \vec{f}^s dA \end{aligned}$$

Da wir nun allg. von bewegten Körpern und Flächen ausgehen, kann die Zeitableitung nicht einfach unter das Integral gezogen werden. Für die mitgeschleppte Zeitableitung schreiben wir für Vektorfelder<sup>3</sup> bzw. Skalarfelder<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \partial_t^c \vec{F} &= \partial_t \vec{F} + \vec{v} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{v}) \\ \partial_t^c f &= \partial_t f + \vec{\nabla} \cdot (f \vec{v}) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Bilanzgleichung für die Energie, Einsetzen des Satzes von Gauß und der Beziehung für  $\partial_t^c$ :

$$\underbrace{\partial_t \int_{\mathcal{V}} W dV}_{\int_{\mathcal{V}} \partial_t^c W dV} + \underbrace{\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot \vec{q} dA}_{\int_{\mathcal{V}'} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV + \int_{\mathcal{S}'} \vec{n} \cdot \vec{q} dA} = \int_{\mathcal{V}'} r dV + \int_{\mathcal{S}'} r^s dA$$

$$\int_{\mathcal{V}} \partial_t^c W dV = \int_{\mathcal{V}} (\partial_t w + \vec{\nabla} \cdot (w \vec{v})) dV = \int_{\mathcal{V}} \partial_t w dV + \underbrace{\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot (w \vec{v}) dA}_0 - \underbrace{\int_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot \llbracket w \vec{v} \rrbracket dA}_{-v_n[w]}$$

<sup>1</sup>Vgl. ET2 Kapitel 28

<sup>2</sup>Edyn Skript S. 47

<sup>3</sup>Edyn Skript S. 39

<sup>4</sup>A. Prechtl: Ein Beitrag zur Behandlung von Flächengrößen und Sprungbedingungen der nichtrelativistischen Elektrodynamik bewegter Körper (1978)

<http://www.springerlink.com/content/11rp2u7162t227p1/fulltext.pdf>

Der Term  $\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot (w\vec{v}) \, dA$  fällt vermutlich weg, da am Rand des Volumens keine Energie gespeichert wird.

Um die Gleichung zu erfüllen, müssen die Integranden jeweils gleich sein:

$$\begin{aligned} \partial_t w + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} &= r \\ -v_n \llbracket w \rrbracket + \vec{n} \cdot \llbracket \vec{q} \rrbracket &= r^s \end{aligned}$$

Ähnliche Vorgehensweise für die Bilanzgleichung für den Impuls, hier wird u.a. die Green-Transformation<sup>5</sup> und die Grassmann-Identität benötigt:

$$\begin{aligned} \underbrace{\partial_t \int_{\mathcal{V}} \vec{g} \, dV}_{\int_{\mathcal{V}} \partial_t^c \vec{g} \, dV} + \underbrace{\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{n} \cdot \underline{p} \, dA}_{\int_{\mathcal{V}'} \vec{\nabla} \cdot \underline{p} \, dV + \int_{\mathcal{S}'} \vec{n} \cdot \llbracket \underline{p} \rrbracket \, dA} &= \int_{\mathcal{V}'} \vec{f} \, dV + \int_{\mathcal{S}'} \vec{f}^s \, dA \\ \\ \int_{\mathcal{V}} \partial_t^c \vec{g} \, dV &= \int_{\mathcal{V}} (\partial_t \vec{g} + \vec{v} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} + \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{g} \times \vec{v})}_{\vec{\nabla} \times (\vec{g} \times \vec{v}) + \vec{\nabla} \times (\vec{g} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \times (\vec{g} \times \vec{v})}) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\partial_t \vec{g} + \vec{v} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} + \underbrace{\vec{g}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{g})}_{\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{g}}) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{V}} \partial_t \vec{g} \, dV + \int_{\partial\mathcal{V}} \underbrace{\vec{v} \cdot (\vec{n} \vec{g})}_0 \, dA - \int_{\mathcal{S}} \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{n} \llbracket \vec{g} \rrbracket}_{-v_n \llbracket \vec{g} \rrbracket} \, dA \end{aligned}$$

Die lokalen Bilanzgleichungen für den Impuls lauten somit:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \underline{p} &= \vec{f} \\ -v_n \llbracket \vec{g} \rrbracket + \vec{n} \cdot \llbracket \underline{p} \rrbracket &= \vec{f}^s \end{aligned}$$

■

### 3 Zweidimensionale Lösungen der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten

Lösen der Differentialgleichung<sup>6</sup>

$$\varrho^2 R''(\varrho) + \varrho R'(\varrho) - k^2 R(\varrho) = 0$$

erfordert eine Unterscheidung von  $k = 0$  und  $k \neq 0$ .

Für die Lösung der Euler-DG für  $k \neq 0$  kann folgender Ansatz gewählt werden:

$$\begin{aligned} R(\varrho) &\sim \varrho^\lambda \\ R'(\varrho) &= \lambda \varrho^{\lambda-1} \\ R''(\varrho) &= \lambda(\lambda-1) \varrho^{\lambda-2} \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Edyn Skript S21

<sup>6</sup>Edyn-Skriptum S 73, 3.53

Einsetzen liefert für  $k$  und somit für  $R(\varrho)$

$$\begin{aligned}\lambda(\lambda - 1)\varrho^\lambda + \lambda\varrho^\lambda - k^2\varrho^\lambda &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda + \lambda &= k^2 \Rightarrow \lambda = \pm k \\ R(\varrho) &= A_1\varrho^k + A_2\varrho^{-k}\end{aligned}$$

Für  $k = 0$  muss gelten:  $\frac{\varrho}{R} [\varrho R']' = 0$ . Zweimalige Integration liefert für  $R(\varrho)$

$$\begin{aligned}\varrho R' &= k \Rightarrow R'(\varrho) = \frac{k}{\varrho} \\ R(\varrho) &= \ln(\varrho)k + C\end{aligned}$$

Da das Argument vom  $\ln$  immer einheitenfrei sein muss, wird die Konstante in das Argument vom  $\ln$  gezogen und ist frei wählbar.

$$R(\varrho) = \ln\left(\frac{\varrho}{a}\right) + A_1$$

■

## 4 Leitungsgleichung für die verlustbehaftete Doppelleitung

Als Voraussetzung für die Leitungsgleichungen nehmen wir TEM-Wellen an, dadurch können Strom und Spannung in jedem Punkt auf der Leitung ausgedrückt werden.

Als erste Näherung werden Strom und Spannung nach einem differenziell kleinem Leitungsstück mit der Länge  $dz$  durch eine Taylorreihe approximiert, wobei nach dem linearen Term abgebrochen wird:

$$\begin{aligned}U(z + dz) &= U(z) + \partial_z U(z) dz + O(dz^2) \\ I(z + dz) &= I(z) + \partial_z I(z) dz + O(dz^2)\end{aligned}$$

Nun stellen wir die Maschengleichung mit Bezeichnung nach Abb. 1 auf:

$$U = R' dz(I + \partial_z I dz) + C' dz \partial_t (I + \partial_z I dz) + U + \partial_z U dz$$

Analog dazu die Knotengleichung:

$$I = G' dz U + C' dz \partial_t U + I + \partial_z I dz$$

Streichen der quadratischen Terme  $dz^2$  (lineare Approximation) sowie Kürzen von  $U$ ,  $I$ , und  $dz$  liefert die beiden Leitungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\partial_z U + L' \partial_t I + R' I &= 0 \\ \partial_z I + C' \partial_t U + G' U &= 0\end{aligned}$$

■

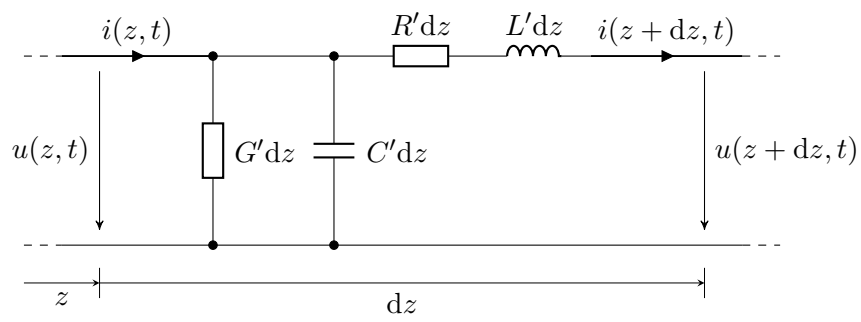


Abbildung 1: Modell für die Leitungsgleichungen