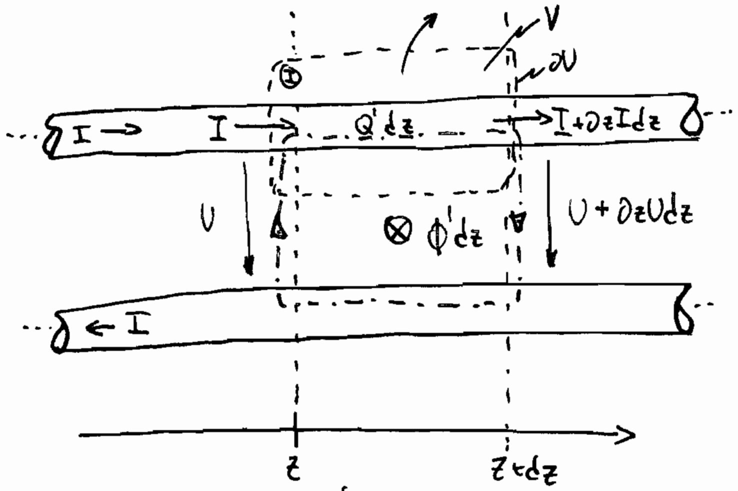
Mündliche Fragen Prof. SCHÖNHUBER

1) Haleitung Verlustlose Doppelleitung



Sonst: 2 Leitungsgleichungen für den verlustfreien Fall:

$$\partial_z I + C'\partial_t U = 0$$
$$\partial_z U + L'\partial_t I = 0$$

=> Lösung dieser 2 Gleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} I(z,t) &= I_1(ct-z) + I_2(ct+z) \\ U(z,t) &= U_1(ct-z) + \underline{U_2(ct+z)} \end{aligned}}$$

Leitungsgleichung, allgemein. Zurücklaufende Welle

$$U_1 = I_1 Z_W \quad , \quad U_2 = -I_2 Z_W$$

(I): Ladungserhaltung $I(\partial V) = -\dot{Q}(V)$
nach Aussen positiv gezählt.

$$-I(z) + I(z) + \partial_z I(z)\,dz = -\dot{Q}' dz$$
$$\partial_z I(z)\,dz + \partial_t Q' dz = 0$$
$$\partial_z I + \partial_t Q' = 0 \qquad \text{mit } Q' = C'U$$
$$\underline{\underline{\partial_z I + C'\partial_t U = 0}}$$

(II): Induktionsgesetz: $U(\partial A) = -\dot{\phi}(A)$

$$-U + 0 + U + \partial_z U dz = -\partial_t \phi' dz$$
$$\partial_z U + \partial_t \phi' = 0 \qquad \text{mit } \phi' = L'I$$
$$\underline{\underline{\partial_z U + L'\partial_t I = 0}}$$

L' ... Induktivitätsbelag
C' ... Kapazitätsbelag

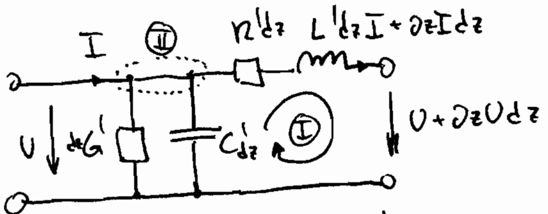
für ideale verlustfreie Doppelleitung: hängen mit: zusammen $L'C' = \mu\varepsilon = \frac{1}{c^2}$

o Von was hängen C', L' ab?
– Geometrie, Leitungsdurchmesser, Abstand der Leiter

$$Z_W = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

verlustlos: $\gamma = \underset{\text{Dämpfung} = 0}{\alpha} + j\underset{\text{Phasenkoeffizient}}{\beta}$ $\quad \beta = 2\pi/\lambda$

2) Haleitung im Verlustbehafteten Fall:



Lösung der Gleichungen: (im eingeschwungenen Zust.)

$$I(z,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{I}(z)\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\right]$$
$$U(z,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{U}(z)\sqrt{2}\,e^{j\omega t}\right]$$

$\underline{I}(z)$, $\underline{U}(z)$ ... komplexe Effektivwert

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_1 e^{-\gamma z} + \underline{I}_2 e^{+\gamma z}$$
$$\underline{U}(z) = \underline{U}_1 e^{-\gamma z} + \underline{U}_2 e^{+\gamma z}$$

(I) Masche: $-U + I R' dz + U + \partial_z U dz = -\partial_t \phi' dz$

$$= \partial_z U + \partial_t \phi' + IR' = 0$$
$$\underline{\underline{= \partial_z U + L'\partial_t I + IR' = 0}} \quad \Rightarrow \underline{Z}' = (R' + j\omega L')$$

(II) Knotenregel: $-I + I + \partial_z I dz + UG' dz = -\partial_t Q' dz$

$$\partial_z I + \partial_t Q' + UG' = 0$$
$$\underline{\underline{\partial_z I + C'\partial_t U + UG' = 0}} \quad \Rightarrow \underline{Y}' = (G' + j\omega C')$$

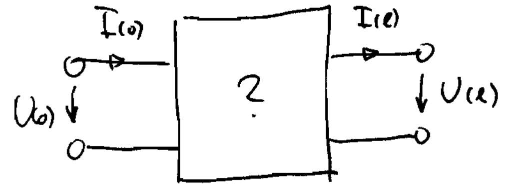
Komplexe Ausbreitungskoeffizient γ

$$\gamma = \sqrt{\underline{Z}'\underline{Y}'} = \alpha + j\beta$$

mit Dispersionsfreiheit: $\frac{L'}{R'} = \frac{C'}{G'}$

ist $\alpha = \sqrt{R'G'}$ $\quad \beta = \omega\sqrt{L'C'}$

3) Doppelleitung als Zweitor:



Matrix-Schreibweise:

$$\begin{bmatrix}U(0)\\ I(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cosh(\gamma l) & \sinh(\gamma l)\, Z_W \\ \sinh(\gamma l)/Z_W & \cosh(\gamma l)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U(l)\\ I(l)\end{bmatrix}$$

2 Besondere Zustände:

a) **Leerlauf**: $I(l)=0$

$U(0) = \cosh(\gamma l)\, U(l)$ => Spannungsverhältnis $\frac{U(l)}{U(0)} = \frac{1}{\cosh(\gamma l)} = \frac{1}{\cos(2\pi l/\lambda)}$

mit $\gamma = (0 + j2\pi/\lambda)$

$I(0) = U(l)\,\sinh(\gamma l)/Z_W$

=> Eingangswiderstand $\underline{Z}_E = \frac{U(0)}{I(0)} = \frac{\cosh(\gamma l)\, U(l)\, Z_W}{\sinh(\gamma l)\, U(l)} = -j Z_W \frac{1}{\tan(2\pi l/\lambda)}$

$\tan = \frac{\sin}{\cos}$

$\cot = \frac{\cos}{\sin}$

$\underline{Z}_E = \underbrace{-j}_{}\, Z_W \cot(2\pi l/\lambda)$

↳ keine Ahnung woher?

=> b) **Kurzschluss**: $U(l)=0$

$\underline{Z}_E = \frac{U(0)}{I(0)} = j Z_W \tan(2\pi l/\lambda)$ mit $c = \lambda f$ $\lambda = \frac{c}{f}$

$= j Z_W (\tan(2\pi f l/c)) = \underline{j Z_W \tan(l\omega/c)}$

=> Im Verlauf von $U(l)/U(0)$ kann man bei $\lambda/4$ & $\lambda \frac{3}{4}$ Spannungserhöhungen beobachten => Ferrantieffekt. => Abwechslung mit steigender Länge & Frequenz von Serien & Parallelresonanzen.

4) Phasenfunktion bei der Wellenausbreitung

$\Theta = ct - \vec{\kappa}\cdot\vec{r}$ ↖ Ortsvektor zum Aufpunkt

theta

Kappa

↳ Einsvektor in Ausbreitungsrichtung

Geschwindigkeit im Medium $c = \lambda f$ (Ausbreitungsgeschwindigkeit)

Kommt vom allgemeinen Ansatz:

$\vec{F}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{F}}\, e^{j(\omega t - k\vec{\kappa}\cdot\vec{r})}\right]$ => k wird bei Verlustfreiheit eingeführt ($\alpha = 0$ => $k = -j\gamma = -j j \beta = \underline{\underline{\beta}}$)

dann k herausheben

$\vec{F}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{F}}\, e^{jk\underbrace{\left[\frac{\omega}{k}t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r}\right]}_{=\Theta}}\right]$ mit $\underline{\underline{\frac{\omega}{k} = c}}$!

Ableitungen von Θ

i) $\frac{d\Theta}{dt} = c$

ii) $\frac{\partial\Theta}{\partial}$ ~~...~~ $\vec{\nabla}\Theta = -\vec{\nabla}(\vec{\kappa}\cdot\vec{r})$

$-\vec{\nabla}(\vec{\kappa}\cdot\vec{r}) = -\left[\vec{\kappa}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\otimes\vec{r}}_{\delta} + \vec{r}\cdot\underbrace{\vec{\nabla}\otimes\vec{\kappa}}_{=0}\right]$ =0 (keine Ahnung warum)

$\vec{\nabla}\Theta = -\vec{\kappa}\cdot\delta = \underline{\underline{-\vec{\kappa}}}$

5) Polarisierungen

a) Bestimmung der Feldkomponenten: ⊕ <u>Longitudinal</u>: Nur Feld in Ausbreitungsrichtung

mit $\vec{F} \times \vec{K} \overset{!}{=} 0$ => bedeutet: sie liegen parallel

↑ Ausbreitungsrichtungseinheitsvektor

⊕ <u>transversal</u>: Feld orthogonal zur Ausbreitungsrichtung

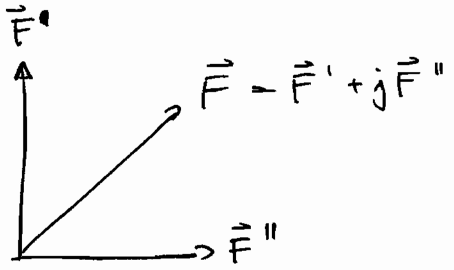
mit $\vec{F} \circ \vec{K} \overset{!}{=} 0$ => keine Feldkomp. in Ausb.

=> muß transversal sein

b) Bestimmung der Polarisation:

Ausspaltung des Feldvektors in

$\vec{F} = \vec{F}' + j\vec{F}''$



⊕ <u>Linear Polarisiert</u> bei $\vec{F} \times \vec{F}^* \overset{!}{=} 0$

$$(\vec{F}' + j\vec{F}'') \times (\vec{F}' - j\vec{F}'') = \underbrace{\vec{F}' \times \vec{F}'}_{=0} + j\vec{F}'' \times \vec{F}' - j\vec{F}' \times \vec{F}'' + \underbrace{\vec{F}'' \times \vec{F}''}_{=0}$$

$$= j(\vec{F}' \times \vec{F}'') = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{F}' \parallel \vec{F}''}}$$

da beide parallel kann sich nichts drehen, somit ist die Welle linear polarisiert

⊕ <u>Zirkulare Polarisation</u> bei $\vec{F} \circ \vec{F} \overset{!}{=} 0$

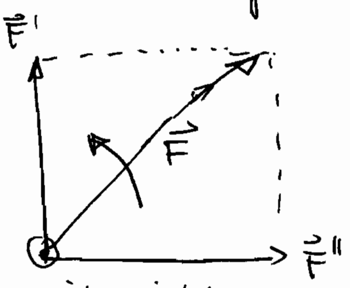
$$\vec{F} \circ \vec{F} = (\vec{F}' + j\vec{F}'') \circ (\vec{F}' + j\vec{F}'') = \underbrace{\vec{F}' \circ \vec{F}'}_{F'^2} + \underbrace{j\vec{F}' \circ \vec{F}'' + j\vec{F}' \circ \vec{F}''}_{j2\vec{F}' \circ \vec{F}''} + \underbrace{\vec{F}'' \circ \vec{F}'' j^2}_{-F''^2}$$

bei $\vec{F} \circ \vec{F} \overset{!}{=} 0$ müssen Real & Imagteil getrennt 0 ergeben:

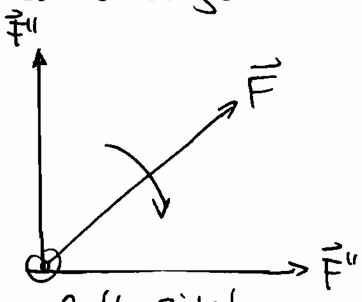
$F'^2 - F''^2 = 0$ => $\underline{\underline{F' = F''}}$ beide Teile gleich groß => <u>45°</u>

$j2\vec{F}' \circ \vec{F}'' = 0$ => Innprodukt = 0 bei orthogonalität

=> zum Schluß die <u>Helizität</u>: (drehrichtung)



Links zirkular polarisiert



Rechts zirkular pol.

⊕ elliptische Polarisation ist der allgemein Fall der zirkularen pol. wobei $F' \neq F''$

6) ## Mag / el Vektorpotentiale → Bei stationären, zeitunabhängigen Feldern

Für beide ist ein „ladungsfreier" Bereich notwendig. Dies ist beim el. mit $\rho = 0$ und beim mag. immer erfüllt. Weiters ist beim mag. $\vec\nabla \cdot \vec J = 0$ Bedingung (kommt aus dem lokalen Satz v. d. er. d. el. Ladung $\vec\nabla \cdot \vec J = -\partial_t \rho$)

Magnetisches Vektorpotential $\vec A$

Um die Gleichungen $\phi(\partial V) = 0$ (Satz vom mag. Hüllenfluss) und $\vec\nabla \cdot \vec B = 0$ zu lösen wird $\vec A$ eingeführt:

$\vec B = \vec\nabla \times \vec A$ mit allgemein $\phi(A) = \int_A \vec n \cdot \vec B \, dA = \int_A \vec n \cdot (\vec\nabla \times \vec A) \, dA$

→ Satz v. Stokes: $= \int_{\partial A} \vec s \cdot \vec A \, ds = \phi(A)$

Bei $\partial A = 0$ (Geschlossene Fläche) ist das $\int$ am Verschwinden somit ist $\phi(\partial V) = 0$ erfüllt.

→ Dies führt uns weiter auf die Eichtransformation: $\vec\nabla \times \vec A = \vec\nabla \times \vec A' = \vec B$

Eine Rotation eines mag. Vektorpotentials $\vec\nabla \times \vec A - \vec\nabla \times \vec A' = 0$ kann die selbe Flussdichte als $\vec A'$ besitzen somit ist $= \vec\nabla \times (\vec A - \vec A') = 0$ verschwindet die Rotation, was bedeutet, dass dieses neue Feld als Gradientenfeld dargestellt werden kann:

$\vec A - \vec A' = \vec\nabla C$ → $\underline{\vec A = \vec A' + \vec\nabla C}$ Die Darstellung eines Vektorpotentials durch ein anderes plus einem Skalar Gradientenfeld nennt man Eichtransformation.

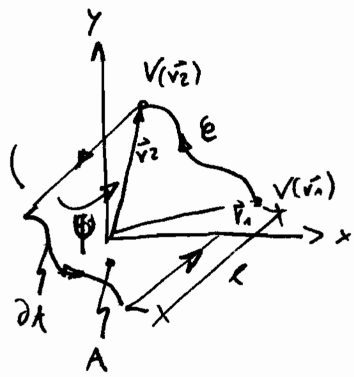
Da diese Festlegung nur die Rotation betrifft kann man noch die Divergenz will kürlich fest legen z.B. als Maxwell-Eichung (Coulomb-Eichung)

$$\vec\nabla \cdot \vec A = \vec 0$$

Elektrisches Vektorpotential $\vec V$ (elektrostatisches)

$\rho = 0$ ⇒ $\vec\nabla \cdot \vec D = 0$ $\qquad \vec\nabla \times \vec E = 0$

$\psi = \int_A \vec n \cdot \vec D \, dA = \int_A \vec n \cdot (\vec\nabla \times \vec V) \, dA = \int_{\partial A} \vec s \cdot \vec V \, ds$ mit $\vec D = \vec\nabla \times \vec V$



$\psi(A) = \int_{\partial A} \vec s \cdot \vec V ds = V(\vec r_2)\,\ell - V(\vec r_1)\,\ell = \underline{\ell\,[V(\vec r_2) - V(\vec r_1)]}$

$\vec D, \vec E, \dots$ in x-y Ebene parallel

mit $\underline{\vec D = -\vec e_z \times \vec\nabla \vec V(x,y)}$

7) Das mag. Skalarpotential

Bei stationäre, stromfreie Umgebung kann ein mag Skalarpotential φ_m eingeführt werden.

$\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$ (um $\vec{H}$ als $-\vec{\nabla}\varphi_m$ darstellen zu dürfen)

$$\underline{\underline{\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_m}}$$

Der Fundamentalsatz der Integralrechnung besagt:

$$\int_C \vec{s} \cdot \vec{\nabla} \underset{\sim}{F} \, ds = \underset{\sim}{F}(2) - \underset{\sim}{F}(1)$$

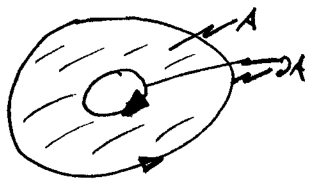
mit $F = \varphi_m$ $\quad \int_C \vec{s} \circ \vec{H} \, ds = \varphi_m(1) - \varphi_m(2)$

Körper, die ideal magnetisierbar sind ($\mu_r \to \infty$) sind Bereiche konstanten mag. Potentials, da hier keine mag. Feldstärke $\vec{H}$ auftreten kann $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}$

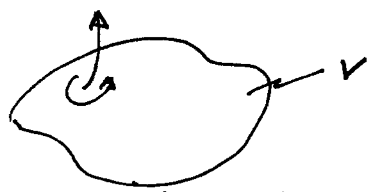
8) Bezugssysteme

a) Innere Orientierungen

Von ⊖ nach ⊕
„Durchlaufsinn"

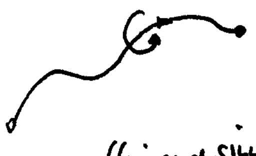


konsistent orientierte Ränder zu einer Fläche
„Drehsinn"

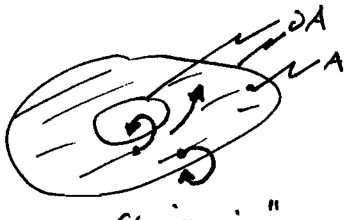


Orientierung eines Volumens von innen nach außen durchdrungen
„Schraubsinn"

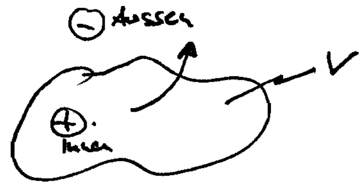
b) Äußere Orientierungen



„Umschlingungssinn"



„Durchtrittssinn"



„Plus & Minus"

- Bei konsistenter rechtswendiger Zuordnung braucht man zwischen innerer & äußerer Orientierung <u>nicht</u> zu unterscheiden, da diese verknüpft sind.
- Die Orientierungen legen die „Zählrichtung" fest.

9) Bullardgleichung herleiten

① Die Bullardgl beschreibt Verteilungen mag. Flüsse in el. leitfähigen (γ) und bewegten ($\vec{v}$) Körpern.

Ⓐ: $\boxed{\vec{J} = \gamma\left[\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right]}$ => $\vec{E} = \frac{1}{\gamma}\vec{J} - \vec{v}\times\vec{B}$

↳ ersetzen

Ⓑ $\boxed{\vec{J} = \vec{\nabla}\times\vec{H}} = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{B}$ (alle terme auf $\vec{B}$ umwandeln!)

Einsetzen von Ⓐ:

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma\mu}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \vec{v}\times\vec{B}$$

/E durch die Rotation ersetzen!

Ⓒ $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial t\,\vec{B}}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{1}{\gamma\mu}\underbrace{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})} - \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B}) = -\partial t\,\vec{B}$$

mit identität: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{f}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}) - \nabla^2\vec{f}$ und $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$$-\frac{1}{\gamma\mu}\nabla^2\vec{B} - \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B}) = -\partial t\,\vec{B}$$

=> umformen auf Std. Form:

$$\frac{1}{\gamma\mu}\nabla^2\vec{B} = \partial t\vec{B} - \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B})$$

: Bullardgleichung

Analyse:

3 Extremfälle:

1) $\mu\gamma \to \infty$ => $0 = \partial t\vec{B} - \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B})$

Die Mitgeschleppte Zeitableitung verschwindet: die Flußverteilung kann von der Bewegung vollständig mit genommen werden.

2) $\vec{v} = \vec{0}$ $\frac{1}{\gamma\mu}\nabla^2\vec{B} = \cancel{\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B})}\ \partial t\vec{B}$

Diffusionsgleichung für $\vec{B}$

3) $\partial t\,\vec{B} = \vec{0}$ $\frac{1}{\gamma\mu}\nabla^2\vec{B} = -\vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B})$

Zeitlich konstante Flußverteilung.

10) Mitgeschleppte Zeitableitung

- Notwendig bei bewegten Systemen, wo die Fläche, über die integriert wird nicht zeitlich konstant vorausgesetzt werden kann.

a) für Vektorfelder: $\partial t \int_A \vec{n}\vec{F}\, dA \Rightarrow \int_A \vec{n} \cdot \partial_c t \vec{F}\, dA$

c steht für convektive = Konvektionsbewegung

$$\partial_c t \vec{F} = \partial t \vec{F} + \vec{v}\, \vec{\nabla} \circ \vec{F} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{F})$$

Beispiel: Flußdichte $\vec{F} = \vec{B}$

$$\partial_c t \vec{B} = \partial t \vec{B} + \vec{v}\, \underbrace{\vec{\nabla} \circ \vec{B}}_{=0} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$$ (= rechte Seite der Bullardgleichung)

b) für Skalarfelder: (skalare Dichten z.B ϱ)

$$\partial_c t \rho = \partial t \rho + \vec{\nabla} \circ (\vec{v} \rho)$$

11) Elektrodynamisches Potential

Für ein einfacheres Lösen der Maxwellgleichungen ist es oft vorteilhaft Potentiale einzuführen.

1) Einführung vom mag. Vektorpotential $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
löst formal $\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0$ $\quad (\phi(\partial V) = 0)$

2) Einsetzen in den 1ten Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial t \vec{B}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial t (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{E} + \partial t \vec{A}) = 0$$

ermöglicht es $\vec{E} + \partial t \vec{A}$ als Gradientenfeld darzustellen

$$\vec{E} + \partial t \vec{A} = -\vec{\nabla} \varphi$$ => el. dyn. Potential

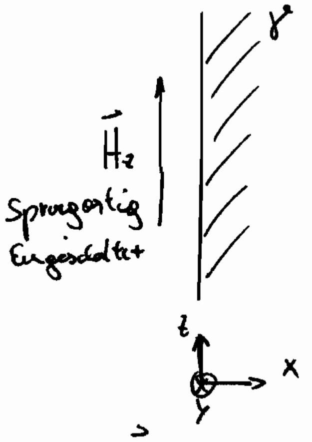
Eichungen: (aus: darstellung durch etwas „Gleiches")

$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} c$ Eiche ist erlaubt z.B $\vec{\nabla} \circ \vec{A} = 0$ (Maxwell oder Coloumb-Eichung)

$\varphi' = \varphi - \partial t c$ da zur Eichtransf. nur die Rotor-Gleichungen benötigt wurden

Eichtransformation und man dadurch die Divergenz noch frei wählen kann.

12) Diffusion von Magnetfeldern



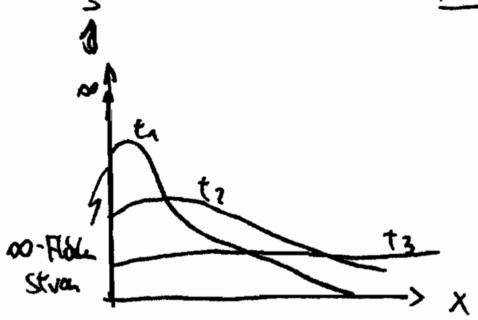
Die Diffusion wird durch die Bullardgleichung (ohne Bewegtes Term) beschrieben:

$$\frac{1}{\gamma\mu}\nabla^2\vec{B} = \partial_t\vec{B}$$

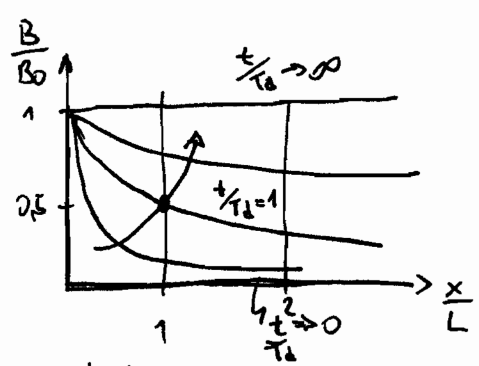
Das Feld dringt mit der diffusions Zeitkonstante in den Halbraum ein.

$$T_d = \cancel{\frac{\ }{\mu\gamma L^2}}$$

$$\boxed{T_d = \mu\gamma L^2}$$

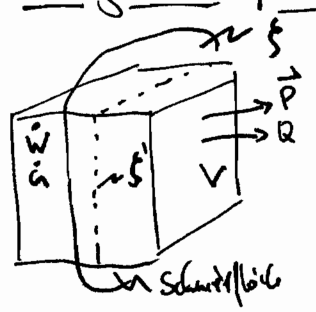


∘ Strom klingt ab



• der mag Fluss ~~dringt~~ steigt mit der Zeit bis auf den Wert B_0 wenn die Zeit gegen ∞ geht

13) Energieerhaltungssysteme



$$\dot{W}(V) + Q(\partial V) = R(V) \qquad \text{Energie}$$

$$\underbrace{\dot{\vec{G}}(V)}_{\text{Inhalt}} + \underbrace{\vec{P}(\partial V)}_{\text{Fluss}} = \underbrace{\vec{F}(V)}_{\text{Generation}} \qquad \text{Impuls}$$

mit: $W(V) = \int_V w\,dV$

$Q(\partial V) = \int_{\partial V} \vec{n}\cdot\vec{q}\,dA$

$R(V) = \int_{V'} r\,dV + \int_{\xi'} \vec{n}\cdot\vec{r}_s\,dA$

$\vec{G} = \int_V \vec{g}\,dV$ $\quad \vec{F} = \int_{V'} \vec{f}\,dV + \int_{\xi'} \vec{n}\vec{f}_s\,dA$

$\vec{P} = \int_{\partial V} \vec{n}\cdot\mathbf{P}\,dA$

mit dem $\int$-trans von Gauß: $Q(\partial V) = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{q}\,dV$ $\quad \vec{P}(\partial V) = \int_V \vec{\nabla}\cdot\mathbf{P}\,dV$

ergeben sich die lokalen Bilanzgleichungen zu:

$$\dot{w} + \vec{\nabla} \circ \vec{q} = r$$
$$\dot{\vec{g}} + \vec{\nabla} \circ p = f$$

Aufspaltung in elektromagnetisches & mechanisches Teilsystem:

$$w = w_e + w_m$$
$$q = q_e + q_m$$
$$\vec{g} = \vec{g}^e + \vec{g}^m$$
$$\vec{p} = \vec{p}^e + \vec{p}^m$$

und im vollständigen System gilt:

$$r_e + r_m = 0$$
$$\vec{f}_e + \vec{f}_m = 0$$

<u>Noch nicht ausgearbeitete Fragen:</u>

- ~~Bezugssysteme~~
- ~~Bilanzgleichung~~
- ~~Mitgeschleppte Zeitableitung~~
- ~~Elektrodynamisches Potential & Eichungen~~
- ~~Diffus~~
- Dominant mag/el. Feldsysteme
- el.mag. Feld im engeren Sinn
- Strom-Ladungsfeld
- holomorphe Funktionen
- Quasielektrostatik
- Ortsvektoren in allen Koordinatensystemen