

① Berechnen Sie die Ableitung des Skalarfeldes

$$f(\vec{r}) = \kappa \cdot (3xy^3 + y^2z^2 - z^3x) \quad \kappa = \text{konstant}$$

im Punkt $\vec{r}_0 = (e\vec{x} + 3e\vec{y} - 2e\vec{z}) \text{ cm}$

in Richtung des Vektors

$$\vec{a} = 3e\vec{x} + 2e\vec{y} - e\vec{z}$$

Lösung:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = (\partial_x e\vec{x} + \partial_y e\vec{y} + \partial_z e\vec{z}) (\kappa (3xy^3 + y^2z^2 - z^3x))$$

$$= \kappa [(3y^3 - z^3)e\vec{x} + (9xy^2 + 2yz^2)e\vec{y} + (2zy^2 - 3z^2x)e\vec{z}]$$

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}_0) = \kappa [(81 + 8)e\vec{x} + (81 + 24)e\vec{y} + (-36 - 12)e\vec{z}] \text{ cm}^3$$

$$x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2$$

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}_0) = \kappa [89e\vec{x} + 105e\vec{y} - 48e\vec{z}] \text{ cm}^3$$

$$\vec{a} = a \vec{e}_a \Rightarrow \vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{3e\vec{x} + 2e\vec{y} - e\vec{z}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} (3e\vec{x} + 2e\vec{y} - e\vec{z})$$

$$\vec{e}_a \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}_0) = \frac{\kappa}{\sqrt{14}} [267 + 210 - 48] = \kappa \frac{525}{\sqrt{14}} = \underline{\underline{140,3 \kappa \text{ cm}^3}}$$

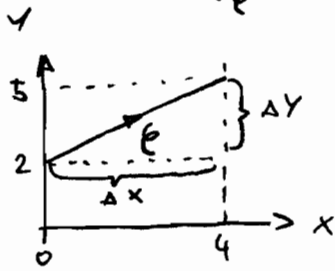
11. 09.12.2009

② Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{g}(\vec{r}) = x\vec{e}_x - 2y\vec{e}_y$$

in bezogenen kartesischen Koordinaten den Wert des
Kurvenintegrals

$$\int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad \text{entlang des angegebenen Geradenstückes } C$$



Lösung: Geradengleichung aufstellen:

$$y = kx + d \quad \text{mit } k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{4}, d = 2$$

$$y = \frac{3}{4}x + 2$$

$$\Rightarrow \vec{g}(\vec{r}) = x\vec{e}_x - \left(\frac{3}{2}x + 4\right)\vec{e}_y$$

Vektor in X-Y-Ebene: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$

Vektor entlang der Kurve: $\vec{r} = x\vec{e}_x + \left(\frac{3}{4}x + 2\right)\vec{e}_y$

Ableitung des Richtungsvektors: $\frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{e}_x + \frac{3}{4}\vec{e}_y \Rightarrow d\vec{r} = \left(\vec{e}_x + \frac{3}{4}\vec{e}_y\right) dx$

$$\Rightarrow \text{Integral berechnen: } \int_0^4 \left[x\vec{e}_x - \left(\frac{3}{2}x + 4\right)\vec{e}_y \right] \cdot \left[\vec{e}_x + \frac{3}{4}\vec{e}_y \right] dx$$

$$= \int_0^4 \left(x - \frac{9}{8}x - 3 \right) dx = \int_0^4 \left(-\frac{1}{8}x - 3 \right) dx = \left[-\frac{1}{8} \frac{x^2}{2} - 3x \right] \Big|_0^4$$

$$= -1 - 12 = \underline{\underline{-13}}$$

Hi 09.12.2009

- ③ Das Vektorpotential eines statischen magnetischen Punktdipols besitzt in Kugelkoordinaten bekanntlich die Form

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \vec{e}_\phi$$

Bestimmen Sie ein zugehöriges magnetisches Skalarpotential

Lösung:

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \psi_m$$

$$\vec{A} = A_\phi(\theta, r) \vec{e}_\phi$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e}_r \frac{\partial_\theta (\sin\theta A_\phi)}{r \sin\theta} - \vec{e}_\theta \frac{\partial_r (r A_\phi)}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{2 \sin\theta \cos\theta}{r^3 \sin\theta} \vec{e}_r + \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [2 \cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta] \quad \text{mit } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$$

$$\vec{H} = \frac{m}{4\pi r^3} [2 \cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta] \quad \vec{H} = H_r(r, \theta) \vec{e}_r + H_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2\pi r^3} \cos\theta \vec{e}_r + \frac{m}{4\pi r^3} \sin\theta \vec{e}_\theta \stackrel{!}{=} -\partial_r \psi_m \vec{e}_r - \frac{1}{r} \partial_\theta \psi_m \vec{e}_\theta$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{m}{2\pi r^3} \cos\theta \stackrel{!}{=} -\partial_r \psi_m$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{m}{4\pi r^3} \sin\theta \stackrel{!}{=} -\frac{1}{r} \partial_\theta \psi_m$$

$$\text{mit } \textcircled{1}: \psi_m = -\int \frac{m}{2\pi r^3} \cos\theta \, dr = \underline{\underline{\frac{m}{4\pi r^2} \cos\theta + C(\theta)}}$$

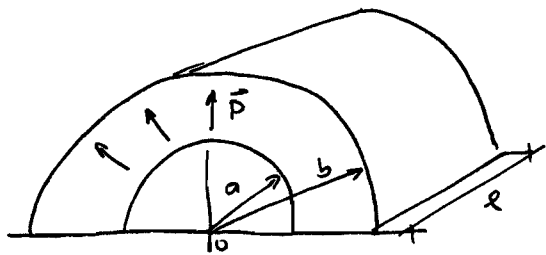
$$\psi_m \text{ einsetzen in } \textcircled{2}: \partial_\theta \psi_m = -\frac{m}{4\pi r^2} \sin\theta$$

$$\partial_\theta \left(\frac{m}{4\pi r^2} \cos\theta + C(\theta) \right) = -\frac{m}{4\pi r^2} \sin\theta$$

$$= -\frac{m}{4\pi r^2} \sin\theta + C'(\theta) = -\frac{m}{4\pi r^2} \sin\theta \Rightarrow C'(\theta) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C(\theta) = 0}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\psi_m = \frac{m}{4\pi r^2} \cos\theta}}$$

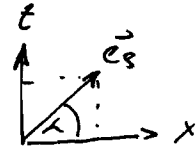
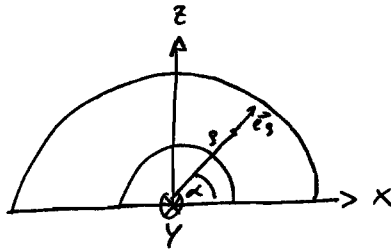
④



$$\vec{P} = P_0 \vec{e}_r$$

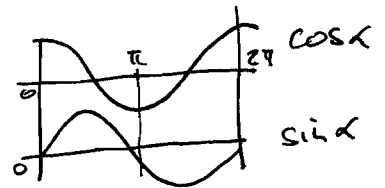
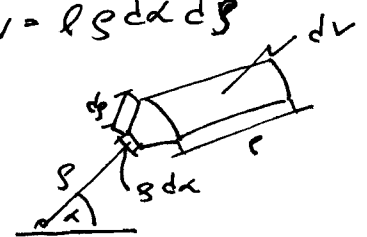
Ein halber dickwandiger Kreis zylinder
 da Länge l ist radial stat. mit
 $P = |\vec{P}| = \text{const}$ elektrisch polarisiert,
 sonst aber elektrisch nicht geladen.
 Berechnen Sie sein gesamtes el. Moment \vec{p} .

Lösung:



$$\vec{e}_s = \cos \alpha \vec{e}_z + \sin \alpha \vec{e}_x$$

$$dV = l s ds d\alpha$$



$$\vec{p} = \int_V \vec{p} dV$$

$$\vec{p} = \int_0^l \int_0^{\pi} \int_a^b P_0 (\cos \alpha \vec{e}_z + \sin \alpha \vec{e}_x) l s ds d\alpha$$

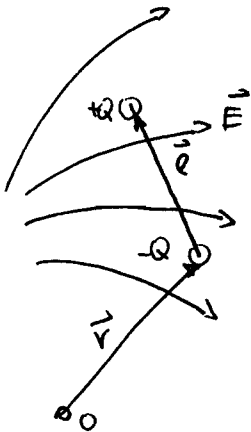
$$\vec{p} = l P_0 \int_0^{\pi} \int_a^b s \cos \alpha \vec{e}_z + s \sin \alpha \vec{e}_x ds d\alpha$$

$$= l P_0 \left[\frac{s^2}{2} \right]_a^b \left[\sin \alpha \vec{e}_x + -\cos \alpha \vec{e}_z \right]_0^{\pi}$$

$$= l P_0 \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right] \left[0 \vec{e}_x + \vec{e}_z + 0 \vec{e}_x + \vec{e}_z \right]$$

$$\vec{p} = \underline{\underline{l P_0 [b^2 - a^2] \vec{e}_z}}$$

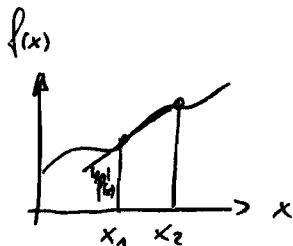
5)



Finden Sie Ausdrücke für die resultierende Kraft \vec{F} und das Drehmoment \vec{T} die ein Punktdipol mit dem elektrischen Moment \vec{p} in einem inhomogenen el. Feld $\vec{E}(\vec{r})$ erfährt. Geben Sie dazu vom Modell des ungleichnamigen Ladungspaares und dem Begriff der räumlichen Ableitung (lineare Approximation) aus.

Lösung:

Taylorreihe, abgebrochen:



$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + \dots$
 \Rightarrow wird verwendet, um die Kraft an $Q+$ zu bestimmen. \Rightarrow vernachlässigen

i) Kraft:

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = Q \vec{E}(\vec{r}) + \nabla \vec{E} Q \vec{l} - Q \vec{E}(\vec{r})$$

$$= Q \vec{l} \cdot \nabla \vec{E} - \underline{\underline{\vec{p} \cdot \nabla \vec{E}}}$$

$$= \vec{p}$$

mit $\left[\begin{array}{l} \vec{p} = p_x \vec{e}_x + p_y \vec{e}_y + p_z \vec{e}_z \\ \nabla = \partial_x \vec{e}_x + \partial_y \vec{e}_y + \partial_z \vec{e}_z \end{array} \right]$

$$\vec{p} \cdot \nabla = p_x \partial_x + p_y \partial_y + p_z \partial_z$$

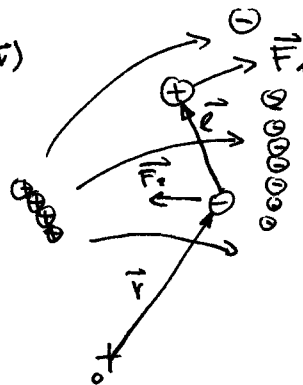
und $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$

$$\underline{\underline{\vec{F} = [p_x \partial_x + p_y \partial_y + p_z \partial_z] [E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z] = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z}}$$

$$F_x = p_x \partial_x E_x + p_y \partial_x E_y + p_z \partial_x E_z$$

$$F_y = p_x \partial_x E_y + p_y \partial_y E_y + p_z \partial_y E_z$$

$$F_z = p_x \partial_x E_z + p_y \partial_y E_z + p_z \partial_z E_z$$



mit $\vec{F} = Q \vec{E}$

$$\vec{F}_1 = +Q [\vec{E}(\vec{r}) + \nabla \vec{E} \vec{l}]$$

$$\vec{F}_2 = -Q [\vec{E}(\vec{r})]$$

Dipol:

$$\begin{array}{c} \oplus Q \\ \uparrow \vec{l} \\ \ominus -Q \end{array} \quad \vec{p} = Q \vec{l}$$

ii) Drehmoment:

$$\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r}) + \vec{r} \times \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}(\vec{r}) - \underline{\underline{\vec{p} \times \vec{E} + \vec{r} \times \vec{F}}}$$

PRÜFUNG ELEKTRODYNAMIK

Mi 09.12.2009

- ⑥ Wenn eine Funktion $\varphi(x, y, z)$ die Laplacegleichung erfüllt so gelöst auch eine Funktion $\bar{\varphi}(x, y, z)$ definiert durch

$$\bar{\varphi}(x, y, z) = \frac{a}{r} \varphi\left(\left(\frac{a}{r}\right)^2 x, \left(\frac{a}{r}\right)^2 y, \left(\frac{a}{r}\right)^2 z\right) \text{ mit } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und einem konstanten Länge a für $r \neq 0$ der Laplacegleichung.

(Inversion an einer Kugel mit dem Radius a)

Erzeugen Sie auf diese Weise aus dem zu einem Homogenfeld gehörenden elektrostatischen Potential $\varphi = -E_0 z$ ein neues Potential $\bar{\varphi}$

Wie löst sich das zu $\bar{\varphi}$ gehörende elektrische Feld herstellen?

Hinweis: Kugelkoordinaten

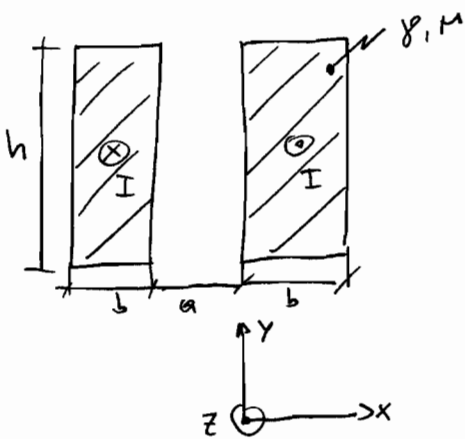
PRÜFUNG ELEKTRODYNAMIK

H: 09.12.2009

- ⑦ Auf einem dünnen, beidseitig sehr langen Kunststoffstreifen (ϵ, ρ^e) der Breite b und der Dicke d wird zum Zeitpunkt $t=0$ eine elektrische Linieladung mit der Dichte τ_0 aufgebracht.
Berechnen Sie für den nachfolgenden Relaxationsprozess die Ladung und Stromverteilung im Streifen.

Lösung:

⑧ Verlustleistung in einer Schienenleitung

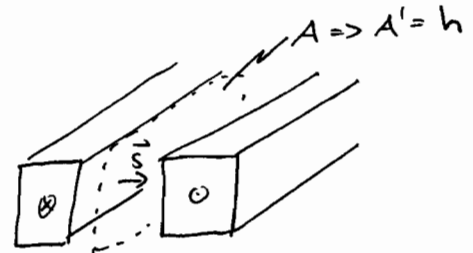


Längenbezogene Verlustleistung $P' = ?$

$$\vec{H}(0,t) = \hat{H}_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

$$\vec{J}(x,t) = -\hat{H}_0 \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \pi/4) \vec{e}_z$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma \omega}}$$



$$\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$$

Lösung:

Poyntingvektor für den Halbraum zwischen den beiden Leitern

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\gamma} \vec{J} \times \vec{H} = \hat{H}_0^2 \frac{\sqrt{2}}{\delta \gamma} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta + \pi/4) \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

mit $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$

$$\vec{S} = \hat{H}_0^2 \frac{\sqrt{2}}{\delta \gamma} e^{-x/\delta} \frac{1}{2} [\cos(-x/\delta + \pi/4) + \cos(2\omega t - x/\delta + \pi/4)] \vec{e}_x$$

$$\vec{S} = \vec{S}(x,t)$$

$$\vec{S}(0,t) = \hat{H}_0^2 \frac{1}{\sqrt{2} \delta \gamma} [\cos(\pi/4) + \cos(2\omega t + \pi/4)] \vec{e}_x \quad \dots \text{Ausgeblickter Wert}$$

den Mittelwert (zeitlich) ergibt sich zu

$$\bar{S}(0) = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{H}_0^2 \frac{1}{\sqrt{2} \delta \gamma} [\cos(\pi/4) + \cos(2\omega t + \pi/4)] dt \Rightarrow \int_0^T \cos 2\omega t + \pi/4 dt = 0$$

$$\int_0^T 1 dt = T$$

$$\bar{S}(0) = \hat{H}_0^2 \frac{1}{\sqrt{2} \delta \gamma} \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \underline{\underline{\hat{H}_0^2 \frac{1}{2 \delta \gamma}}}$$

Der längenbezogene zeitliche Mittelwert der Verlustleistung:

$$P' = \int \bar{S}(0) dy = \bar{S}(0) h = \hat{H}_0^2 \frac{h}{2 \delta \gamma}$$

Gesamte längenbezogene Verlustleistung: (für beide Leiter)

$$P'_{\text{ges}} = 2 P' = \underline{\underline{\frac{H_0^2 h}{\delta \gamma}}}$$

mit $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \omega}}$ $P'_{\text{ges}} = \hat{H}_0^2 \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2 \gamma}} h$ $\Rightarrow V(h) = \hat{I}$
 mit $\hat{H}_0 = \frac{\sqrt{2} I}{h}$ $\hat{H}_0 h = \hat{I} = \sqrt{2} I$ $\hat{H}_0 = \frac{\sqrt{2} I}{h}$

$$P'_{\text{ges}} = \frac{2 I^2}{h^2} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \gamma}} h = \underline{\underline{\frac{I^2}{h} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \gamma}}}}$$

Durch Flutungssatz:

$$V(2A) = I(A)$$



9) Bahnkurve eines Punktes

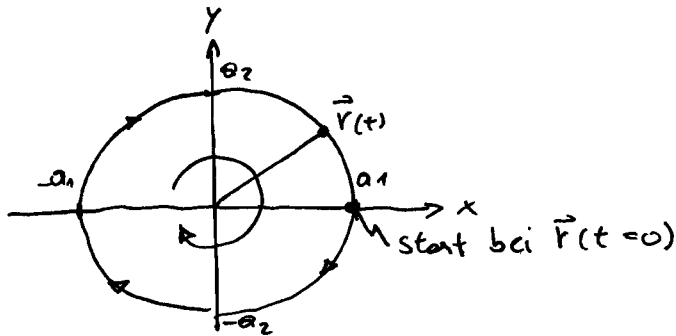
$$\vec{v}(t) = \operatorname{Re} [\vec{v}_0 e^{j\omega t}] \quad \vec{v}_0 = a_1 \vec{e}_x + j a_2 \vec{e}_y$$

- i) Bahnkurve bestimmen $x(t), y(t) = ?$ ii) Zeichnen & Durchlaufsinn

Lösung

$$\begin{aligned} \text{i) } \vec{v}(t) &= \operatorname{Re} [a_1 e^{j\omega t} \vec{e}_x + j a_2 e^{j\omega t} \vec{e}_y] \\ &= \operatorname{Re} [a_1 (\cos \omega t + j \sin \omega t) \vec{e}_x + j a_2 (\cos \omega t + j \sin \omega t) \vec{e}_y] \\ &\Rightarrow \vec{v}(t) = \underbrace{a_1 \cos \omega t}_{x(t)} \vec{e}_x - \underbrace{a_2 \sin \omega t}_{y(t)} \vec{e}_y \end{aligned}$$

- ii) gewählt: $a_1 = a_2 \Rightarrow \vec{v}(t)$ beschreibt eine Kreisbahn im Uhrzeigersinn.



⑩ Energiebilanz mit Leitungsgleichungen

① $\partial_z U + L' \partial_t I + R' I = 0$ $C', L' \dots$ konstant

② $\partial_z I + C' \partial_t U + G' U = 0$

Ermitteln Sie W', Q und P_V' für die Form

③ $\partial_t W' + \partial_z Q + P_V' = 0$

Lösung:

① mit I multiplizieren: $I \partial_z U + L' I \partial_t I + R' I^2 = 0$ } Addieren
 ② mit U multiplizieren: $U \partial_z I + C' U \partial_t U + G' U^2 = 0$ }

$$\underbrace{I \partial_z U + U \partial_z I}_{\text{mit Produktregel}} + \underbrace{L' I \partial_t I}_{= \partial_t \left(\frac{L' I^2}{2} \right)} + \underbrace{C' U \partial_t U}_{= \partial_t \left(\frac{C' U^2}{2} \right)} + R' I^2 + G' U^2 = 0$$

* Proof:
 $\partial_t \left(\frac{I^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \partial_t I^2 =$
 $= \frac{1}{2} 2 I \underbrace{\partial_t I}_{\text{innere Ableitung}} \checkmark$

$\partial_z(UI) = U \partial_z I + I \partial_z U$

$= \partial_z(UI) + \partial_t \left[\frac{L' I^2}{2} + \frac{C' U^2}{2} \right] + R' I^2 + G' U^2 = 0$ Vergleich mit ③

$W' = \frac{1}{2} [L' I^2 + C' U^2]$

Energiebeleg (Summe der ab bzw gespeicherten Energie)

$Q = UI$

Energiefluss

$\hookrightarrow W_m = \frac{L' I^2}{2} \quad W_e = \frac{C' U^2}{2}$

$P_V' = R' I^2 + G' U^2$

Verlustleistung beleg

(im Feld)