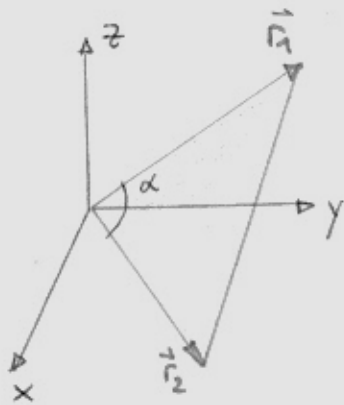


Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den zwei Ortsvektoren \vec{r}_1, \vec{r}_2 mit dem Ursprung aufgespannten Dreiecks.

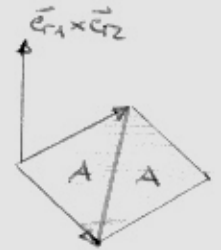


$$\vec{r}_1 = (a \vec{e}_x + b \vec{e}_y + z \vec{e}_z) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_2 = (\dots) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = r_1 \cdot r_2 \cos(\alpha)$$

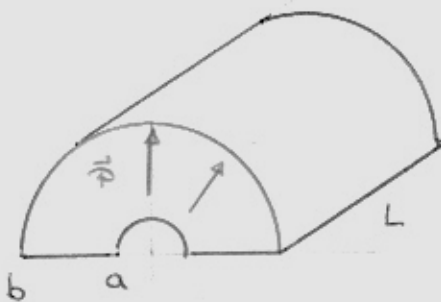
$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \frac{r_1 \cdot r_2 \sin(\alpha)}{2A} \vec{e}_{r_1} \times \vec{e}_{r_2}$$



$$A = \frac{r_1 \cdot r_2}{2} \sin\left(\arccos\left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1 r_2}\right)\right)$$

Quellenfreie Vektorfelder, beispielsweise die magn. Flussdichte, lassen sich einerseits bekanntlich durch die Rotation eines Vektorfeldes ausdrücken $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ andererseits durch zwei Skalarfelder f und g (Clebsch-Potentiale) in der Form $\vec{B} = \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g$.
Drücken Sie \vec{A} durch f und g aus.

$$\vec{\nabla} \times (f \vec{\nabla} g) = \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} g}_{=0} \quad \underline{\underline{\vec{A} = f \vec{\nabla} g}}$$



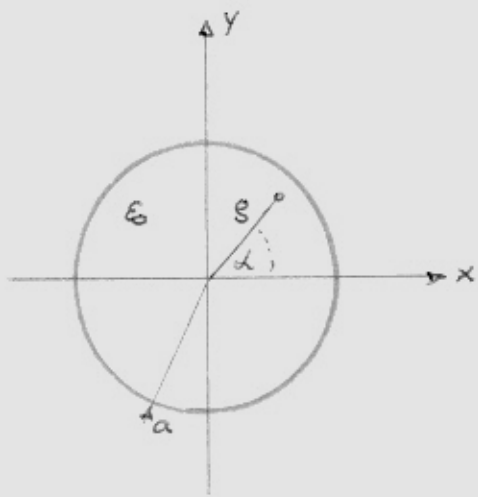
Berechnen die des elektrische Moment \vec{p} eines stark komogen elektr. polarisierten Zylinder-Sektors (siehe Bild) mit $\vec{P} = P \vec{e}_g \quad |\vec{P}| = \text{const}$

$$\vec{p} = L \int_0^{\pi} \int_a^b P \vec{e}_g g dg d\alpha = LP \int_0^{\pi} \int_a^b \vec{e}_g g dg d\alpha = \underline{\underline{\frac{LP\pi}{2} [b^2 - a^2] \vec{e}_g}}$$

Leiten Sie einen Zusammenhang für den Wellenwider. Z_w einer verlustfreien Leitung vorzerstörten Doppelleitung her.

$$\frac{L'}{R'} = \frac{C'}{G'} \quad L'G' = R'C' \quad Z_w = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{(R' + j\omega L')(G' - j\omega C')}{G'^2 + \omega^2 C'^2}}$$

$$Z_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \cdot \sqrt{\frac{j\omega + R'/L'}{j\omega + G'/C'}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{L'}{C'}}}} \text{ reell frequenzunabh.} \quad Z_w = \sqrt{\frac{R'G' + \omega^2 L'C'}{G'^2 + \omega^2 C'^2}} \text{ reell !}$$



Am Rand $s=a$ eines kreiszylindr.
Ladungsfreien Bereiches $0 \leq s \leq a$
ist die Randprojektion der
elektr. Feldstörten mit

$$E_s(a, \alpha) = E_0 \cos(n\alpha) \quad n \in \mathbb{N}$$

Vorgeschrieben. Bestimmen Sie daraus
die elektr. Feldstörten $\vec{E}(s, \alpha)$ im
Bereich $0 \leq s \leq a, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$

Im ladungsfreien Innenraum
elektrostatischer Fall

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \vec{n} \times [\vec{E}] = 0 \quad [\varphi] = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D} = \rho \quad \vec{n} \cdot [\vec{D}] = \sigma$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{Laplace-Gleichung} \Rightarrow \varphi(s, \alpha) = [A_1 s^k + A_2 s^{-k}] [B_1 \cos(k\alpha) + B_2 \sin(k\alpha)]$$

$$\varphi(s, \alpha) = R(s) S(\alpha)$$

$$\vec{e}_s \cdot \vec{E}(s, \alpha) = E_0 \cos(n\alpha) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \lim_{s \rightarrow 0} \varphi(s, \alpha) < \infty$$

$$E_s = -\vec{e}_s \cdot \vec{\nabla} \varphi = -\vec{e}_s \cdot \vec{e}_s \partial_s \varphi = -[A_1 k s^{k-1} + (-k) A_2 s^{-k-1}] [B_1 \cos(n\alpha) + B_2 \sin(n\alpha)]$$

Aus den Vorgaben für die Randfeldstörten erkennt man
 $B_2 = 0$ $n = k$ und aus der Beschränktheit von $\varphi(s \rightarrow 0)$ folgt
 $s \rightarrow 0 \Rightarrow A_2 = 0$

$$E_s = -A k s^{k-1} \cos(k\alpha) = E_0 \cos(k\alpha) \quad -A k s^{k-1} = E_0$$

$$A = \frac{-E_0}{k a^{k-1}}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(s, \alpha) &= -\frac{E_0 a}{n} \left(\frac{s}{a}\right)^n \cos(n\alpha) \\ \vec{E}(s, \alpha) &= E_0 \left(\frac{s}{a}\right)^{n-1} [\cos(n\alpha) \vec{e}_s - \sin(n\alpha) \vec{e}_\alpha] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 \leq s \leq a \\ 0 \leq \alpha \leq 2\pi \end{aligned}$$

Für die Ausbreitung ebener homogener elektromagn. Sinuswellen in einem einfachen Material mit konstanten Werten der Permittivität und Permeabilität (ϵ, μ) und der Leitfähigkeit σ liefern die beiden Maxwell-Polargleichungen über Ansatz der Form

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \vec{F} e^{j\omega t - \gamma \vec{k} \cdot \vec{r}} \right\} \quad \text{die Zusammenhangs}$$

$$\gamma \vec{k} \times \vec{E} = j\omega\mu \vec{H} \quad \gamma \vec{k} \times \vec{H} = -(\sigma + j\omega\epsilon) \vec{E}$$

Stellen Sie damit den Dämpfungskoeffizienten $\alpha > 0$ und den Phasenkoeff. $\beta > 0$ als Funktionen der Frequenz dar

$$\gamma \vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} = j\omega\mu \vec{k} \times \vec{H} = -\frac{(\sigma + j\omega\epsilon)}{\gamma} \vec{E} = \gamma \left[\vec{k} (\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{E}}_0) - \vec{E} (\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{k}}_1) \right]$$

$$\gamma^2 = +j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon)$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta = -\omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu\epsilon$$

$$2\alpha\beta = \omega\mu\sigma$$

Elimination von β

$$\alpha^4 + \mu\epsilon\omega^2\alpha^2 - \left(\frac{1}{2}\omega\mu\sigma\right)^2 = 0$$

$$\alpha(\omega) = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\beta(\omega) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right)}}$$

Berechnen Sie für das ebene magn. Feld mit der Feldstärke

$$\vec{H} = \frac{H_0}{a} [2xy \vec{e}_x + (x^2 - y^2) \vec{e}_y]$$

ein magn. Skalarpotential $\varphi(x, y)$, sodass $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi$ gilt

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{e}_x \partial_x \varphi - \vec{e}_y \partial_y \varphi = \frac{H_0}{a} [2xy \vec{e}_x + (x^2 - y^2) \vec{e}_y]$$

$$\partial_x \varphi = -\frac{H_0}{a^2} 2xy$$

$$\varphi(x, y) = -\frac{H_0}{a^2} 2 \frac{x^2}{2} y + f(y)$$

$$\partial_y \varphi = -\frac{H_0}{a^2} (x^2 - y^2)$$

$$-\frac{H_0}{a^2} [x^2 + f'(y)] = -\frac{H_0}{a^2} (x^2 - y^2) \Rightarrow f'(y) = -y^2$$

$$f(y) = -\frac{y^3}{3}$$

$$\underline{\underline{\varphi(x, y) = \frac{H_0}{a^2} y \left[\frac{y^2}{3} - x^2 \right]}}$$