

KAPITEL I - EINFÜHRUNG

Aus der Aufgabensammlung kamen bisher die Beispiele:

~~1.1.1.1~~ • ~~1.1.1.2~~ • ~~1.1.1.3~~
~~1.1.1.4~~ • ~~1.1.1.5~~ • ~~1.1.1.6~~

1) Geg.: $\int_V (\nabla \times \vec{f}) dV$ Hüllenintegral der Form $\vec{f} = f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z$. 07.03.01

Vereinfachen Sie das Integral so, dass keine Koordinatenauflösung mehr in der Lösung vorkommt (Identität: $\int_{\partial V} n_i f dA = \int_V \partial_i f dV$)

2) $\int_{\partial A} \vec{s} \times \vec{f} ds = \int_A (n_y \partial_z f_x - n_z \partial_y f_x) dA$ 06.05.01

Beweisen Sie obige Aussage.

3) $\int_{\partial V} \vec{n} \cdot [\vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) - \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F})] dA$

Ges.: Ein vereinfachtes Integral (mit Green Identität)

4) Rechnen Sie das in kartesischen Koordinaten gegebene Vektorfeld

$$\vec{f} = x^2 \vec{e}_x + xy \vec{e}_y$$

in ebene Polarkoordinaten um, wobei die Zusammenhänge

$$x = \rho \cos(\alpha)$$

$$\vec{e}_x = \cos(\alpha) \vec{e}_\rho - \sin(\alpha) \vec{e}_\alpha$$

$$y = \rho \sin(\alpha)$$

$$\vec{e}_y = \sin(\alpha) \vec{e}_\rho + \cos(\alpha) \vec{e}_\alpha$$

gelten.

5) Geg.: $\vec{F}(\vec{r}) = f(x^2 + y^2 + z^2) \vec{e}_x$

Gesucht sei eine allgemeine Funktion in Zylinderkoordinaten.

6 Gegeben sei $\vec{f} = \frac{1}{r^2} [\cos(\varphi) \vec{e}_r - \sin(\varphi) \vec{e}_\varphi]$. Gesucht sei die allgemeine Funktion in kartesischen Koordinaten!

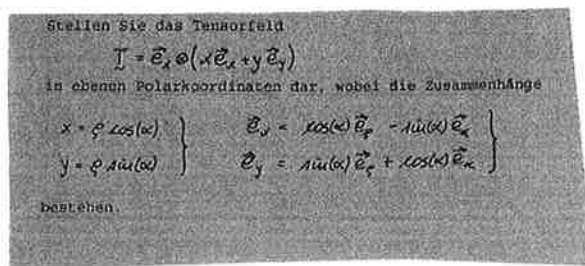
7 Drücken Sie das in ebenen Polarkoordinaten gegebene Vektorfeld $(\rho, \alpha) \vec{F}$ in kartesischen Koordinaten aus.

$$\vec{F} = K \cdot [2\rho \cos(\alpha) \vec{e}_\rho + \rho \vec{e}_\alpha] \quad K = \text{const}$$

8 Gegeben sei das konstante Vektorfeld

$$\vec{V} = C \frac{1}{\rho^2} (\vec{e}_\rho \otimes \vec{e}_\rho - \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\alpha) \quad C = \text{const.}$$

Gesucht sei $\vec{V}(x, y, z)$.



10 Angenommen \vec{F} ist ein homogenes Vektorfeld im euklidischen Raum. Wählen Sie einen Ursprung \emptyset , legen Sie die z-Achse in Richtung von \vec{F} (d.h. $\vec{F} = F * \vec{e}_z$) und geben Sie dann die Entwicklung von F nach den orthonormierten Basisvektoren von Kugelkoordinaten mit der z-Achse als Polarachse an.

11 Bestimmen Sie in kartesischen Koordinaten den Einvektor, der von einem allgemeinen Punkt der Ebene $x = 4 \text{ mm}$ zum Ursprung weist.

12 Gesucht sei der Abstand zwischen den Punkten P_1 und P_2 in Kugelkoordinaten (r, Θ, α)

$$P_1 (2\text{m}, 36^\circ, 14^\circ) \quad P_2 (3\text{m}, 118^\circ, 229^\circ)$$

13

Berechnen Sie die Ableitung des Skalarfeldes

$$f(\vec{r}) = K \cdot (x^2 y - 4y^4 - 2z^2 x^2), \quad K = \text{const.}$$

im Punkt

$$\vec{r}_0 = (3\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + \vec{e}_z) \text{ cm}$$

in Richtung des Vektors

$$\vec{a} = \vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$$

14

Gegeben sei das Skalarfeld

$$\varphi(x, y, z) = C (3x^2 y - y^2 z + 2z^2 x)$$

Berechnen sie die Richtungsableitung des Feldes in Richtung \vec{n} Punkt \vec{P} .

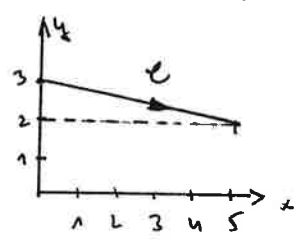
$$\vec{n} = \vec{e}$$

$$P(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

15

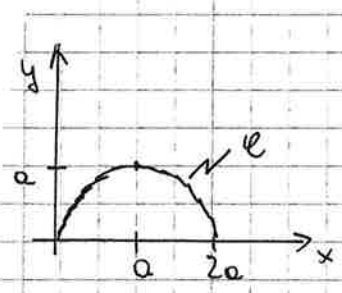
Gegeben: Vektorfeld $\vec{f}(\vec{r}) = z x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$

Beispiel in
verschiedenen
Varianten



Berechnen Sie das Integral $\int_C \vec{f}(\vec{r}) d\vec{r}$ entlang der Kurve

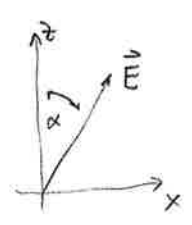
16



Gegeben ist das bezogene Vektorfeld $f(\vec{r}) = \frac{y}{a} \vec{e}_x + \frac{x}{a} \vec{e}_y$.

Berechnen Sie die Arbeit $A = \int_C f(\vec{r}) d\vec{r}$ die der Kurve C zugeordnet wird.

17



$$\vec{E} = 83 \epsilon_0 (\vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y) + 173 \epsilon_0 \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Berechnen Sie den Winkel, den \vec{D} mit der z-Achse einschließt

18

Der symmetrische Konduktivitätstensor eines linear, anisotrop elektrisch leitfähigen Materials besitzt in einer lokalen, orthonormierten Vektorbasis $\vec{e}_i, i = 1, 2, 3$, die Entwicklung

$$\underline{\chi} = \sum_{i,j=1}^3 \chi_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

Angenommen, im betrachteten Punkt liegt die elektrische Feldstärke $\vec{E} = E \vec{e}_1, E > 0$ vor. Geben Sie Gleichungen an, aus denen sich die Winkel α_i zwischen den zugehörigen Stromdichte und den Basisrichtungen berechnen lassen.

19

Gegeben sei

$$f(r, \vartheta, \alpha) = r^2 \sin(\vartheta) \cos(\alpha)$$

Gesucht sei $\vec{r} \times \vec{\nabla} f = ?$

20

Sei \vec{r} ein Ortsvektor bezüglich eines festen Punktes

$r = |\vec{r}|$ sei sein Betrag - \vec{a} sei ein konstanter Vektor

Berechnen Sie

(i) $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$	(ii) $\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{r})$
(iii) $\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right))$	(iv) $\vec{r} \cdot \vec{\nabla} (\vec{a} \times \vec{r})$

21

Gegeben ist $\vec{\nabla} \times (\vec{f} \times \vec{e})$, \vec{f} sei quellenfrei.

Berechnen Sie obige Gleichung und interpretieren Sie das Ergebnis.

22

Gegeben ist $f(\rho, \alpha, z) = \rho^4 [\cos(\alpha) \vec{e}_\rho + \sin(\alpha) \vec{e}_\alpha]$

Berechnen Sie $\vec{r} \times \vec{\nabla} \times f$, wobei \vec{r} der Ortsvektor aus dem Ursprung bezeichnet.

23

Gegeben sei $\vec{F} = F(\vec{r}) \frac{\vec{r}}{r}$, \vec{F} ist wirbelfrei.

Für welches $F(\vec{r})$ ist \vec{F} quellenfrei?

24

Gesucht sei die Quellendichte von

$$(\vec{\nabla} f) \times (\vec{\nabla} p)$$

25) Vereinfachen Sie das folgende Integral

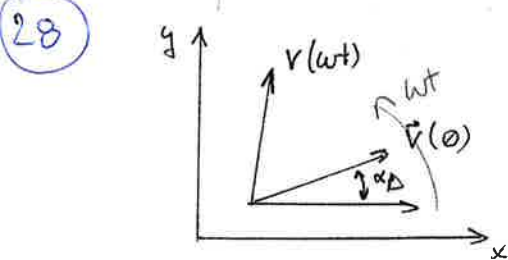
$$\int_{\partial A} (f \vec{\nabla} g) \cdot \vec{s} \, ds = \int_{\partial A} f \, \text{div} g \, ds$$

26) Stellen Sie dieses Integral als Hüllintegral über ∂V dar.
Im Resultat soll keine Divergenz des Vektorfeldes \vec{v} enthalten.

$$\int_V (\vec{\nabla} f) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \, dV$$

27) Gegeben sei $\vec{F} = \vec{p} \cdot \text{div}(\vec{E})$

Gesucht sei die Darstellung der Kraft als Gradient eines Skalarfelds.



Gegeben sei der Vektor \vec{v} mit konstantem Betrag, der im Raum rotiert.

$$\vec{v} = \text{Re} \{ \vec{v} e^{i\omega t} \}$$

Gesucht sei \vec{v} zeitunabhängiges \vec{v} im xy -Koordinatensystem in komplexer Form.

29) Quellenfreie Vektorfelder, beispielsweise die magnetische Flussdichte, lassen sich einerseits bekanntlich durch die Rotation eines Vektorpotentials ausdrücken,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

andererseits durch zwei Skalarfelder f und g (Clebsch-Potentiale) in der Form

$$\vec{B} = (\vec{\nabla} f) \times (\vec{\nabla} g).$$

Drücken Sie \vec{A} durch f und g aus.

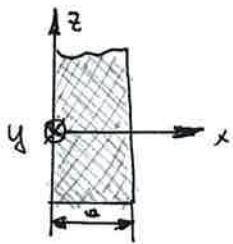
KAPITEL II - EIGENSCHAFTEN

ELEKTROMAGNETISCHER FELDER

Aus der Aufgabensammlung kamen bisher die Beispiele:

- A 2.1.6
- A 2.1.7
- A 2.1.8
- A 2.1.9
- A 2.1.10
- A 2.1.12

1



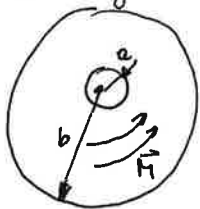
Eine Schicht $0 \leq x \leq a$ trägt die Magnetisierung

$$\vec{M} = \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 M_0 \vec{e}_y & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \vec{0} & \text{für } x < 0 \text{ und für } x > a \end{cases}$$

unabhängig von y und z . Berechnen Sie die vollständige fiktive Stromverteilung.

2

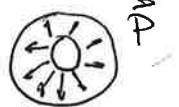
Gegeben sei ein Zylinder, der zwischen dem Innen- und Außen-
-durchmesser eine homogene Polarisation \vec{P} in Umfangsrichtung
trägt. Geben Sie \vec{H} und \vec{B} im Innen- und Außenraum an. (Hinweis:



Außenraum ist Feldfrei) $M = M \vec{e}_\phi$

3

Gegeben sei ein polarisierter Hohlzylinder mit $\vec{P} = P \vec{e}_r$.



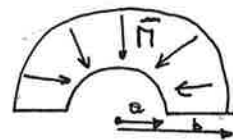
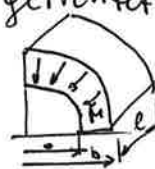
Berechnen Sie die auftretende
• fiktive Ladung
• fiktive Flächenladung am Mantel & Deckfläche

4

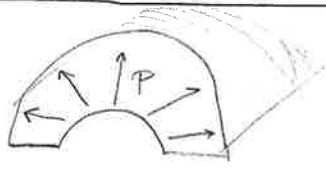
In einem dickwandigen Kreiszyklindersektor von 180° mit dem Innenradius a und dem Außenradius b ist die Magnetisierung \vec{M} radial nach innen gerichtet.

Geg.: $|M| = \text{const}$

Ges.: magn. Moment \vec{p}



5.



Das Material sei homogen isotrop in Richtung \vec{E}_0 polarisiert. Berechnen Sie die Polarisation \vec{P} .

6.

An einer beidseitig metallisch beschichteten, inhomogen elektrisch schwach leitfähigen Platte liegt die elektrische Spannung U . Berechnen Sie die sich einstellende Ladungsverteilung (Flächen- und Raumladungen).

$$\vec{j} = \frac{I_0}{a^2 \sqrt{1}} \left[\frac{\rho z \vec{e}_\rho + (a^2 + z^2) \vec{e}_z}{(a^2 + z^2)^2} \right]$$

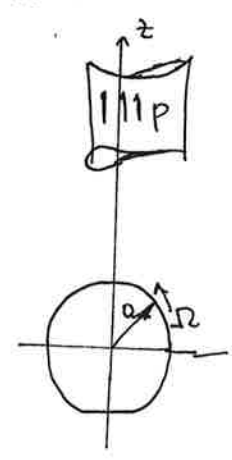
Ges.: $\vec{H} = ?$

8.

Ein kreiszylindrischer ~~stromdurchflussener~~ zylindrischer Leiter mit Leitfähigkeit γ wird axial mit I gleichförmig durchflossen. Berechne \vec{S} im Leiterinneren.

6.

9.



Ein langer, kreiszylindrischer Stab aus dielektrischem Material ist axial homogen elektrisch polarisiert, sonst aber Ladungs- und Stromfrei.

Angenommen der Stab wird bezüglich eines Inertialsystems mit Drehung der Winkelgeschwindigkeit Ω um seine Achse versetzt. Geben sie die elektrische Polarisation und Magnetisierung des Stabes in Bezug auf das Labersystem in der nichtrelativ. Näherung an.

10.

Vergleichen Sie den Poynting-Vektor \vec{S} im ruhendem mit dem Poynting-Vektor \vec{S}' für ein bewegtes System für den Fall des dominant magnetischen Feldsystems und den Fall des dominant el. Feldsystems.

11

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{J} - \vec{\nabla} G \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t G \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t \vec{D} &= \vec{J} - \vec{\nabla} G \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t G \end{aligned}} \right\} \text{Maxwell-Gleichungen nach Wobon}$$

Wann ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt?

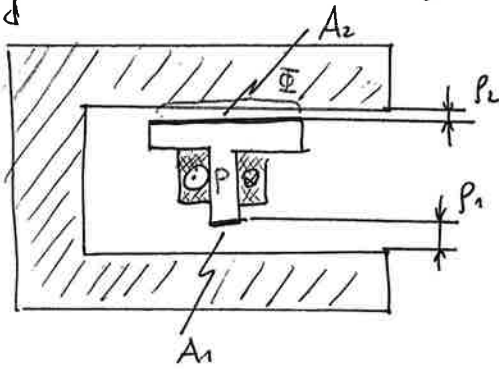
12

Gegeben sei die Stromdichte \vec{J} für einen räumlich begrenzten Bereich. Leiten Sie für diesen Bereich die folgende Formel her (Hinweis: \vec{A} = magn. Vektorpotential)

$$W_{\text{max}} = \frac{1}{2} \int_V (\vec{J} \cdot \vec{A}) dV$$

13

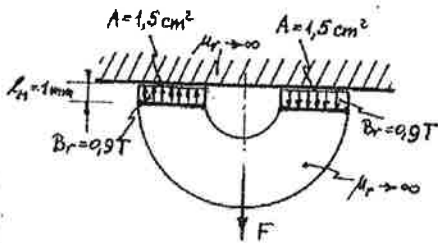
Gegeben sei ein magnetischer Kreis, mit den Luftspalten p_1 und p_2 und den dazugehörigen



Flächen A_1 und A_2 . Berechnen Sie die Kraft, die auf den Körper ¹⁾P ausgeübt wird, wenn $A_1 < A_2$ ist.

¹⁾Eisenteil

14

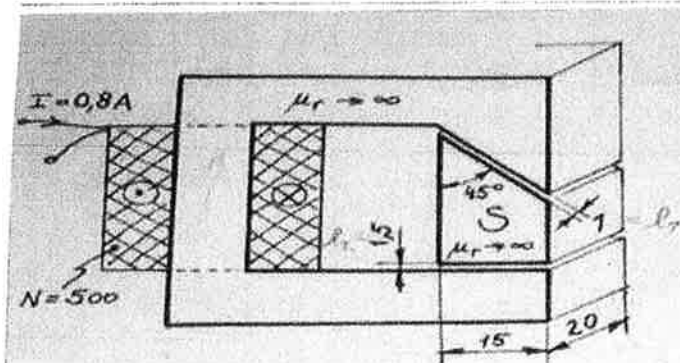


An den beiden Enden des gebogenen, hochpermeablen Teils sind starr magnetisierte Dauermagnetplättchen befestigt. Dieser "Hufeisenmagnet" wird auf einen ebenfalls hochpermeablen Körper eben aufgesetzt. Wie groß ist die Haftkraft? Vernachlässigen Sie Streuungen.

15

^{2) Vollsch. Vorgehensweise}
Bsp. 9) (Es war ein kreiszylindrischer Blechstreifen in der x,y- Ebene gegeben. Dieser wurde vom Strom I normal zur x,y- Ebene durchflossen.)
Ges.: Kraft, die die linke auf die rechte Hälfte ausübt? Druck oder zug?

16



Berechnen Sie die resultierende Kraft (als Vektor!), die in dem skizzierten magnetischen Kreis auf den Schenkel S ausgeübt wird. Vernachlässigen Sie Streuungen.

Maße in mm

$$\vec{F}_R = \int_{\partial V} \frac{1}{\mu_0} (\vec{n} \cdot \vec{B} \vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{n}) dA$$

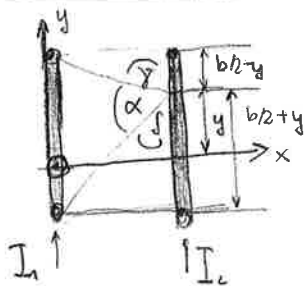
17

$a = 30\text{mm}, b = 60\text{mm}, c = 20\text{mm}$
 $B_r = \mu_0 M = 0.38\text{T}$

Der links dargestellte, hartferritische Dauermagnetring ist in Umfangsrichtung starr mit der angegebenen Remanenzflussdichte magnetisiert.

- Berechnen Sie die magnetische Feldstärke und Flussdichte innerhalb und außerhalb des Rings, wenn sich dieser im sonst leeren Raum befindet.
- Angenommen, es wird gemäß dem rechten Bild eine Hälfte des Rings auf die ebene Oberfläche eines hochpermeablen Körpers gesetzt. Berechnen Sie die dabei auftretende magnetische Haftkraft F .

18



Geg.: $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 k}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \vec{e}_x + \alpha \vec{e}_y \right]$

Ges.: F zwischen den beiden Leitern!

19

In bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) , das in einem Inertialsystem fest verankert ist, herrsche das homogene, zeitunabhängige elektromagnetische Feld

$\vec{E} = \vec{0}, \vec{B} = B \vec{e}_z, B = \text{const.}$

Ein zweites kartesisches Koordinatensystem (x', y', z') hat mit dem ersten zwar die z -Achse gemeinsam, rotiert aber gegenüber dem ersten mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω .

Berechnen Sie das elektromagnetische Feld (\vec{E}', \vec{B}') bezüglich des rotierenden Systems in der nichtrelativistischen Näherung. Geben Sie die Darstellungen von \vec{E}' und \vec{B}' in den gestrichelten Koordinaten an.

KAPITEL III - STATISCHE UND STATIONÄRE FELDER

3.1 Elektrostatik und Quasi-Elektrostatik

Aus der Aufgabensammlung kommen bisher die Beispiele:

- A 3.1.1
- A 3.2.2
- A 3.2.3
- A 3.2.4
- A 3.2.5
- A 3.2.7
- A 3.2.10
- A 3.2.12
- A 3.2.11
- A 3.2.18
- A 3.2.26

①

Ein begrenzter Bereich V um den Ursprung enthält eine kontinuierliche elektrische Ladungsverteilung mit der Dichte $\rho(\vec{r}')$, wobei die Gesamtladung verschwindet

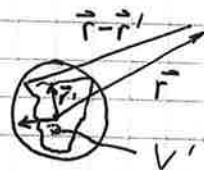
$$\int_V \rho(\vec{r}') dV' = 0.$$

Bestimmen Sie unter Verwendung der Entwicklung

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} \left\{ 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^2} + \dots \right\}$$

ein Näherungsansatz für das zugehörige elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ im sonst leeren Raum, gültig für

$$|\vec{r}|^2 \gg a^2 \quad \text{Interpretation}$$



②

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_x \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \epsilon_y \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + \epsilon_z \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z$$

Gegeben sei der Permittivitätstensor $\underline{\underline{\epsilon}}$ ^{links} ~~sonst~~ in ladungsfreiem Raum. Leiten Sie eine Laplace ähnliche DG her. (Hinweis: Potential einführen).

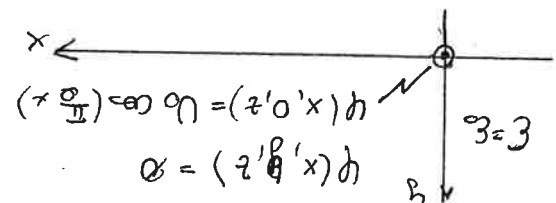
3 Ein anisotropes Feldgebiet besitzt folgende Permittivität:

$$\vec{\epsilon} = \epsilon_{xx} \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \epsilon_{yy} \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + \epsilon_{zz} \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z$$

Gesucht ist
 (i) Verallgemeinerte Form eines Poisson Gleichung
 (ii) durch Koordinaten-Transformation in eine gewöhnliche

Poisson - Gleichung umschreiben.

Exkurs Ditchlet - Problem



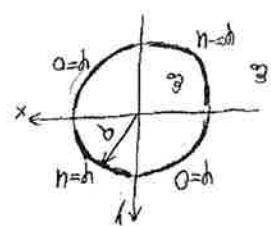
Berechnen Sie die Feldstärke bei $y=0$?

Ein dünnwandiger, konvexer Kreisbogen der Winkel α ist gegeben, die auf dem Kreisbogen γ statische Ladungen, die auf dem gewöhnlich angegebenen Wertes des Potentials gehalten werden. Eine Feldberechnung liefert für den Innenraum:

$$\varphi = \frac{U}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{2ay}{a^2 - z^2} \right) + \arctan \left(\frac{2ax}{a^2 - z^2} \right) \right]$$

$$z^2 = x^2 + y^2 + \alpha^2$$

Berechnen Sie den el. Potential für $z > a$.
 Folgende Eigenschaft nutzen: Erfüllt eine mit einem Potential φ dazugehörige Fkt. $\varphi(\rho, \alpha)$ die Laplace-Glg. so genau, auch die - Fktion $\varphi(\rho, \alpha) = \varphi(\frac{a}{\rho}, \alpha)$ oder Laplace-Glg. erfüllt & eine beliebig große Länge bedeckt.



4 Gegeben sei das Potential $\varphi = K \frac{e^{-r/a}}{r}$. Berechnen Sie die Ladungsdichte.

$$\varphi = \frac{2\pi \epsilon_0}{S_1(x)} \rho$$

5 Gegeben sei das elektrostatische Vektorpotential

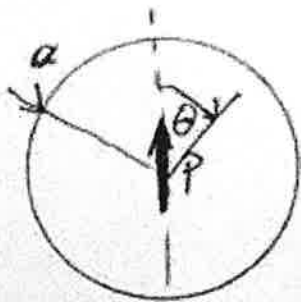
8

Gegeben sei $\varphi(r, \Theta) = \frac{E_0}{2} r_0 \left(\frac{r_0}{r}\right) \cos(\Theta)$

(i) berechne $\frac{r}{r_0} = f(\Theta, \frac{|\vec{E}|}{E_0})$

(ii) zeichne die Kurve für $|\vec{E}| = E_0$

9



$$\vec{E}_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos(\Theta)\vec{e}_r - \vec{e}_z}{r^3}$$

!
• gegeben

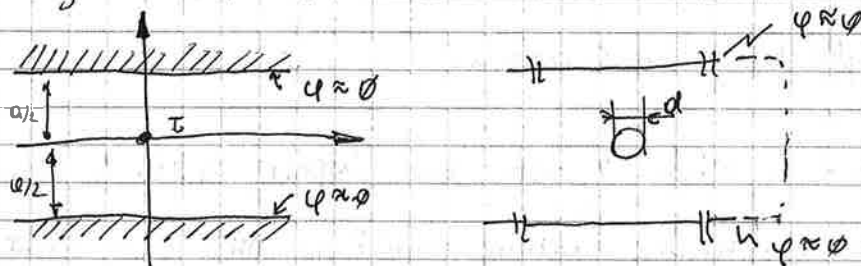
Ladungsverteilung bei $r = \alpha$
 damit Substratum flach sein muss
 Hinweis: Überlagern wir ein Homogfeld

10

Sie haben ein ebenes elektrostatisches Problem: eine Linienladung ist nach der unterliegenden Abbildung zwischen zwei in alle Richtungen weit ausgedehnten Platten platziert. Für das elektrische Potential entnehmen Sie folgende Lösung

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \left[\frac{\cosh(\pi x/a) + \cos(\pi y/a)}{\cosh(\pi x/a) - \cos(\pi y/a)} \right] \quad -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}$$

Verwenden Sie die Lösung um näherungsweise die längenbezogene Kapazität der Anordnung im rechten Bild zu berechnen, in dem ^{sich} kleinen dünnen Leiter ($d \ll a$) zwischen zwei weit ausgedehnten Metallplatten befindet, die elektrisch leitfähig miteinander verbunden sind.



Hinweis: $\cosh(u) \approx 1 + u^2 \quad |u| \ll 1$ $\cos(u) \approx 1 - u^2 \quad |u| \ll 1$

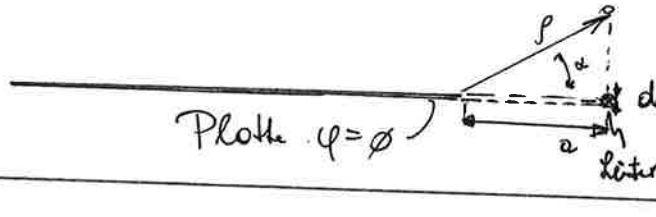
11 In dieser ~~Platte~~ Anordnung (Platte, Linienleiter) haben Sie \Rightarrow Kopie folgende Lösung für ein Potential

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left\{ \frac{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^{2\nu} + 2 \left(\frac{r}{a}\right)^\nu \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^{2\nu} - 2 \left(\frac{r}{a}\right)^\nu \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right\}$$

$a \ll \epsilon$

$$\nu = \begin{cases} +1/2 & \rho < \epsilon \\ -1/2 & \rho > \epsilon \end{cases}$$

Gesucht: C'



Hinweis:

$$(1+\delta)^\nu = 1 + \nu\delta \text{ für } |\delta| \ll 1$$

$$|\delta| \ll 1$$

$$\alpha = 0 \quad \rho = a - d \quad \nu = \frac{1}{2}$$

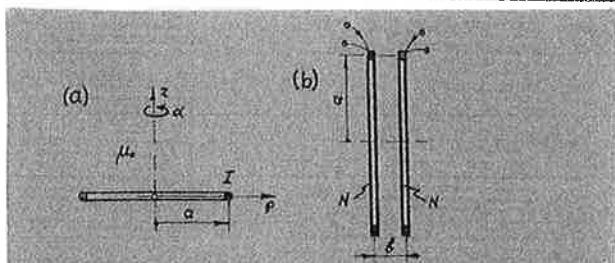
12 Gegeben Sei ein Kugelkondensator mit Innenradius r_1 und Außenradius r_2 . ϵ sei eine Funktion von r .
Ges.: Funktion von C bei bekannten r_1 und r_2 .



13 Gegeben sei eine Koaxialleitung mit Innendurchmesser a und Außendurchmesser b . ϵ zwischen dem Innen- und Außenleiter ist von α abhängig.

Wie groß ist die längenbezogene Kapazität der Anordnung?

14



Das magnetische Vektorpotential einer stromdurchflossenen Kreisschleife (a) ergibt sich in Kreiszyylinderkoordinaten zu

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{2a}{\sqrt{(a+\rho)^2 + z^2}} G \left[\sqrt{\frac{(a-\rho)^2 + z^2}{(a+\rho)^2 + z^2}} \right] \vec{e}_\phi$$

mit einer Funktion G, die durch das Integral

$$G(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha) d\alpha}{\sqrt{1 + \eta^2 + (1-\eta)\cos(\alpha)}}$$

definiert ist und sich für kleine η durch

$$G(\eta) \approx \ln\left(\frac{4}{\eta}\right) - 2, \quad 0 < \eta \ll 1$$

approximieren lässt

Berechnen Sie damit näherungsweise die gegenseitige Induktivität zweier gleicher, koaxialer Kreisspulen (b) mit den Halbmessern a und den Windungszahlen N , die in relativ kleinem Abstand b zueinander liegen ($b \ll a^2$).

Für ein in Kreiszyylinderkoordinaten (ρ, α, z) formuliertes Potentialproblem soll die skalarwertige Funktion $\varphi(\rho, \alpha, z)$ im betrachteten Bereich der Laplace-Gleichung genügen. Die Randbedingungen legen einen Produktansatz der Form

$$\varphi(\rho, \alpha, z) = R(\rho) \cos(\alpha - kz), \quad k = \text{const.}$$

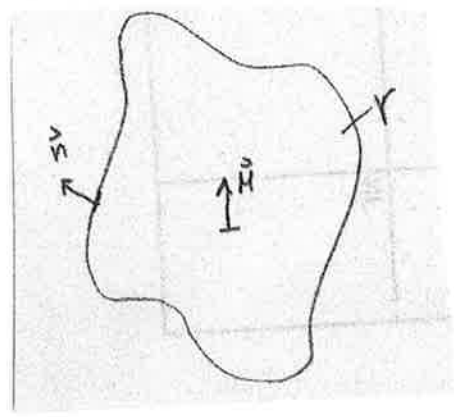
nähe. Welche gewöhnliche Differentialgleichung muss dann die Funktion $R(\rho)$ erfüllen?

15

16) Gegeben war ein starr magnetisierter Dauermagnet der einen gewissen räumlichen Bereich \mathcal{V} einnimmt. Die (äußere) Orientierung von \mathcal{V} war gegeben (Einsnormalenvektor auf den Rand von \mathcal{V}). Das (unendlich ausgedehnte) Komplementärgebiet \mathcal{V}^* gehört ebenfalls zum Feldgebiet. Da der gesamte Feldbereich frei von (wahren) Strömen ist, existiert ein magnetisches Skalarpotential φ_M .

Gefragt war nun welcher DGL φ_M in \mathcal{V} bzw. in \mathcal{V}^* genügen muss. Weiters waren die Sprungbedingungen für φ_M am Rand von \mathcal{V} gefragt.

Lösung: $\text{rot } H = 0$. Für H einsetzen, je nachdem ob im leeren Raum oder im Dauermagnet. Zusätzlich $H = -\text{grad } \varphi_M$ verwenden. Für die Sprungbedingungen am Rand einfach die Sprungbedingungen für H bzw. B anschreiben und einsetzen.



17) Das elektrostatische Potential in der Umgebung einer dünnen, metallenen Kreisscheibe mit dem Radius a die eine Überschussladung Q trägt, läßt sich in Kreiszyylinderkoordinaten in der Form

$$\varphi(r, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k|z|} J_0(ka) \frac{\sin(ka)}{k} dk}{1}$$

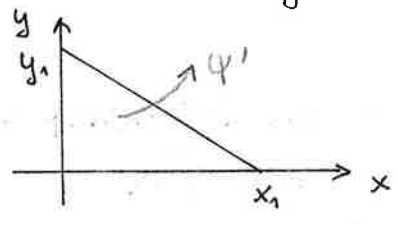
darstellen, wobei J_0 die gewöhnliche Bessel-Funktion erster Art und nullter Ordnung bezeichnet. Berechnen Sie die Kapazität der Scheibe gegenüber dem Umgebungsraum. Beachten Sie dabei

$$J_0(0) = 1, \quad \int_0^{\infty} \sin(x) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}$$

18) Gegeben sei das elektrostatische, längenbezogene Vektorpotential

$$V' = (x^2 - y^2 - 2xy) \vec{e}_z$$

Geben Sie den durch die Fläche in der XY -Ebene durchtretenden längenbezogenen elektrischen Fluss an.

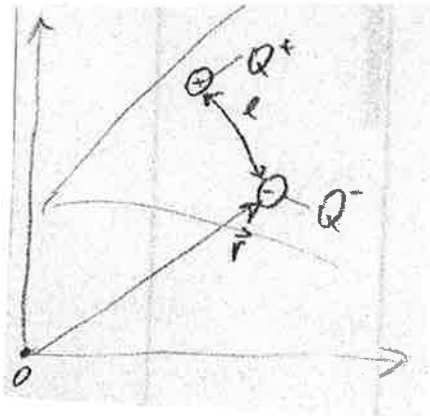


19

Ein ungleichnamiges Punktladungspaar (Ladungsmenge Q) befindet sich in einem inhomogenen elektrischen Feld \vec{E} in bezug auf einen festen Ursprung O . Abstand vom Ursprung zur neg. Ladung $= \vec{r}$ (als Vektor). Abstand zwischen den beiden Ladungen $= \vec{a}$ (als Vektor).

Gesucht sind Kraft und Drehmoment auf das Ladungspaar. Hinweis: Die Begriffe des ungleichnamiges Ladungspaares (Punktdipol) und der räumlichen Ableitung (lokale lineare Approximation) sollen verwendet werden.

Lösung: Siehe „Hofmann: Das elektromagnetische Feld“ Seiten 115ff.



20

Genügt eine in ebenen Polarkoordinaten dargestellte Funktion $\varphi_1(\rho, \alpha)$ der Laplace Gleichung so erfüllt auch die Funktion

$$\varphi_2(\rho, \alpha) = \varphi_1\left(\frac{\rho^2}{\rho}, \alpha\right)$$

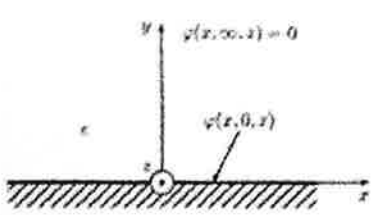
die Laplace Gleichung in ebenen Polarkoordinaten.

Angenommen φ_2 ist das Skalarpotential eines homogenen elektrostatischen Feldes mit einer x -gerichteten Feldstärke.

i) Bestimmen Sie das zu φ_2 gehörende elektrostatische Feld für den Bereich $\rho > a$.

ii) Durch welche Ladungsverteilung könnte das zu φ_2 gehörende Feld erzeugen werden?

21



Am Rand $y = 0$ des ladungsfreien Halbraums $y > 0$ ist ein periodischer Verlauf des elektrostatischen Skalarpotentials als Fourier-Reihe

$$\varphi(x, 0, z) = U \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n e^{ik_n z} \right\}, k_n = n \frac{2\pi}{a}$$

mit einer reellen Konstanten U , komplexen Konstanten c_n und der Periodenlänge a bekannt.

Berechnen Sie die zugehörige elektrische Randfeldstärke bei $y = 0+$.

22

Gegeben sei das Potential $\varphi = K \frac{e^{-r/a}}{r}$. Berechnen Sie die Ladungsdichte.

Kapitel 3.3 - Relaxation und Konvektion

Aus der Aufgabensammlung kam bisher die Beispiele:

- A 3.3.1
- A 3.3.2
- A 3.3.3

Gegeben sei eine Kugel mit gleichmäßig verteilter Ladungsdichte ρ_0 . γ und ϵ der Kugel seien mit γ_0 und ϵ_0 angenommen.
Gesucht sei $\vec{J}(\vec{r}, t)$, sowie die Ladungsdichte für $t \rightarrow \infty$

Kapitel 3.4 - Stationäre Magnetfelder & Spezielle stationäre Magnetfelder

Aus der Aufgabensammlung kommen bisher die Beispiele:

- A 3.4.7
- A 3.5.1
- A 3.5.2
- A 3.5.3
- A 3.5.5
- A 3.5.6

① In einem räumlichen Bereich V , der kein magnetisierbares Material enthält, ist mit Bezug auf Kreiszyylinderkoordinaten (ρ, α, z) das quasistationäre magnetische Vektorpotential

$$\vec{A} = a \alpha \vec{e}_\alpha + (b + c \rho^2) \vec{e}_z$$

mit Konstanten a , b und c bekannt. Berechnen Sie die zugehörige Stromverteilung im Inneren von V .

② Das Vektorpotential eines statischen magnetischen Punktdipols besitzt in Kugelkoordinaten bekanntlich die Form

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{\sin(\theta)}{r^2} \vec{e}_\alpha$$

Bestimmen Sie ein zugehöriges magnetisches Skalarpotential.

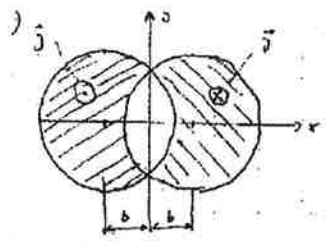
③ Ein ebenes magnetisches Feld wird in einer gewissen Umgebung der z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems durch die Flußdichte

$$\vec{B} = \frac{B_0}{a} (x \vec{e}_x - y \vec{e}_y), \quad B_0/a = \text{const}$$

beschrieben.

- Geben Sie ein zugehöriges, Maxwell-geeichtes magnetisches Vektorpotential an.
- Skizzieren Sie den Verlauf der magnetischen Flußdichtelinien in der xy -Ebene.
- Welche einfache Anordnung von Linienströmen erzeugt in erster Näherung das angegebene Feld im sonst leeren Raum?

4



\vec{H} im schraffierten Bereich

2/3 5

Angenommen, Sie haben ein eindimensionales Diffusionsproblem für die magnetische Flussdichte $B(x, t)$ über einem endlichen Intervall zu lösen,

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu \gamma \frac{\partial B}{\partial t}, \quad 0 < x < a, t > 0,$$

wobei die Anfangsverteilung als Fourier-Reihe

$$B(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x/a), \quad 0 < x < a,$$

bekannt ist.

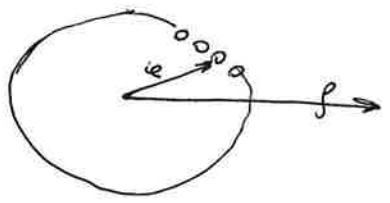
Gehen Sie von einem verallgemeinerten Separationsansatz

$$B(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)g_n(t), \quad 0 < x < a, t > 0$$

aus und bestimmen Sie die Funktionen $f_n(x)$ und $g_n(t)$.

6

Gegeben sei der Ausdruck $\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^n \cos(n\alpha) \vec{e}_z$
für die Anordnung:

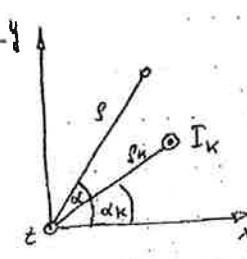


Berechnen Sie die magn. Flussdichte in ebenen Koordinaten und vergleichen Sie die Beträge für $n=3$ und $n=1$ und $\rho=10a$.

7

Gegeben sei $\vec{B} = \frac{B_0}{a} \{ (x-2y) \vec{e}_x + (2x-y) \vec{e}_y \}$.
Berechnen Sie ein maxwell gerechtes magn. Vektorpotential

8



Um das magn. Feld näherungsweise parallel zur z-Achse verlaufender Stromelemente in relativ großem Abstand durch Überlagerung zu berechnen wird zunächst das Feld eines Einzelstromes I_k mit allg. Lage bestimmt. Das liefert das Vektorpotential in ebenen Polarkoordinaten

$$\vec{A}_k = -\frac{\mu_0 I_k}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\ln \left(1 - \frac{z}{\xi_k} \right) \right] \vec{e}_z, \quad \xi = r e^{i\alpha}, \quad \xi_k = r_k e^{i\alpha_k}$$

Hinweis: $\operatorname{Re} \left[\ln(1-z) \right] = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1$

Pos: Reelle Reihenentwicklung für \vec{A}_k (Multipolentwicklung) für $r \gg r_k$ ist das eine Aufgabe fehlt

9

Gegeben sei eine Transversalwelle auf (z, y)

Berechnen Sie den Mittelwert des Poynting Vektors

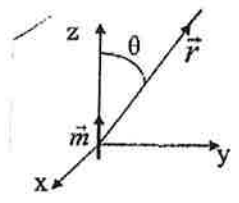
$$\vec{B} = \hat{B} (\cos(\omega t - kz)) \vec{e}_x$$

10

3) ein statischer magnetischer Dipol erzeugt im sonst leeren Raum bekanntlich eine magnetische Flussdichte, die sich bei passender Koordinatenwahl durch

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (3 \cos(\theta) \vec{e}_r - \vec{e}_z)$$

darstellen lässt. Zusätzlich herrsche ein homogenes elektrisches Feld mit der Feldstärke $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_z$.



- (i) Geben Sie das Feld des Poynting-Vektors \vec{S} an.
- (ii) Wie sehen die zu \vec{S} gehörenden Vektorlinien aus?
- (iii) Berechnen Sie die Quellendichte und Wirbeldichte von \vec{S} .



11



Im Innenraum des kreiszylindrischen Körpers herrscht die magn. Flussdichte $\vec{B} = B(\rho, \alpha) \vec{e}_\rho + B(\rho, \alpha) \vec{e}_\alpha$.

Berechnen Sie die Flächenstromdichte die das Feld im Innenraum erzeugt und geben Sie eine DGL für \vec{A} im Innenraum an!

12

Bsp. 5 Flussdichte: $B = C \cdot (x^2 - y^2) \vec{e}_x - 2C \cdot x \cdot y \vec{e}_y$, $C \cdot \text{const.}$

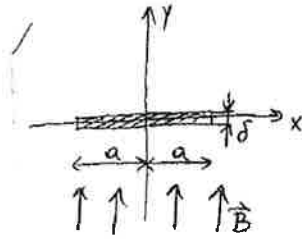
- (i) Ges.: \vec{A} *576/77/80*
- (ii) \vec{A} in ebenen Polarkoordinaten? Ansatz: $\sin(3\alpha) = \sin(\alpha)[4 \cos^2(\alpha) - 1]$
- (iii) Skizze des Feldes?

KAPITEL III - INDUKTIONSERSCHEINUNGEN

Aus der Aufgabensammlung kommen bisher die Beispiele:

- A 4.2.2
- A 4.2.3
- A 4.2.4
- A 4.2.5
- A 4.2.6
- A 4.2.7
- A 4.2.8
- A 4.2.9

①



Ein langer, nicht magn. Metallstreifen der Breite $2a$, $d \ll a, \delta$, liegt senkrecht in magn. Wechselfeld von $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_y$.

Berechnen Sie die Joule-Verluste im Streifen bezogen auf die Länge in z -Richtung, ohne Berücksichtigung des von den induzierten Strömen selbst erzeugten Magnetfeld, wobei für den Gesamtstrom im Streifen $I=0$ gilt.

②

KAPITEL V - ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

Aus der Aufgabensammlung kommen bisher die Bsp.

- A 5.1.1
- A 5.1.2
- A 5.1.3
- A 5.1.5
- A 5.2.1
- A 5.2.3
- A 5.2.4
- A 5.2.8
- A 5.2.10
- A 5.2.11
- A 5.2.13
- A 5.2.15
- A 5.2.16
- A 5.2.18
- A 5.3.2
- A 5.3.4
- A 5.3.5
- A 5.3.8
- A 5.3.9
- A 5.3.14

1

Gehen Sie von der einfachen, inhomogenen Wellengleichung

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2) w(\vec{r}, t) = -f(\vec{r}, t)$$

$$A = \epsilon$$

aus und führen Sie gemäß

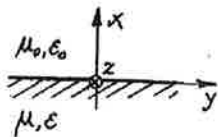
$$X(A) = X(\epsilon)$$

$$X(\vec{r}; j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt, \quad x(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\vec{r}; j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

die Fourier-Transformierten $W(\vec{r}; j\omega)$ und $F(\vec{r}; j\omega)$ der Funktionen $w(\vec{r}, t)$ und $f(\vec{r}, t)$ ein. Welcher Gleichung müssen dann die Fourier-Transformierten genügen?

S. 6/

2

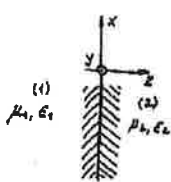


Unter bestimmten Bedingungen (Totalreflexion) können an der ebenen Oberfläche eines Körpers im leeren Umgebungsraum $x > 0$ elektromagnetische Wellen entstehen, deren magnetische Komponente die Form

$$\vec{B}(x, y, t) = \text{Re} \left\{ \hat{B} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta y)} \vec{e}_x \right\}$$

mit konstanten, positiven Werten α , β , ω und einer i. a. komplexen Konstanten \hat{B} besitzt. Die Welle breitet sich demnach parallel zur Oberfläche aus und nimmt mit wachsendem Abstand von der Oberfläche exponentiell ab (Oberflächenwelle). Berechnen Sie die zugehörige elektrische Feldstärke.

3



Eine ebene elektromagnetische Welle, deren elektrische Feldstärke durch

$$\vec{E}_0 = f(t - z/c) \vec{e}_x$$

mit der bekannten Funktion $f(\cdot)$ gegeben ist, läuft durch das näherungsweise verlustfreie Medium (1) und trifft bei $z=0$ senkrecht auf die ebene Grenzfläche zum ebenfalls verlustfreien Medium (2).

Bestimmen Sie

- (i) die zu \vec{E}_0 gehörende magnetische Feldstärke \vec{H}_0 ,
- (ii) die Komponenten \vec{E}_r , \vec{H}_r der reflektierten Welle,
- (iii) die Komponenten \vec{E}_t , \vec{H}_t der transmittierten Welle.

4

Geg.: φ, \vec{A} (als Funktionen)
 Ges.: \vec{S}

5.

In einem leeren Raumbereich wird ein elektromagnetisches Feld in Bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem durch die elektrodynamischen Potentiale

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = f(x, y) \cos(\omega t) \vec{e}_z, \quad \varphi(\vec{r}, t) = 0$$

beschrieben.

- (i) Welcher Gleichung hat die Funktion $f(x, y)$ zu genügen?
- (ii) Stellen Sie die zugehörigen Felder der elektrischen Feldstärke, der magnetischen Flussdichte und des Poynting-Vektors dar.

6.

Feld eines Linienleiters dargestellt durch längenbezogene Magnetisierung m' und längenbezogene Polarisation P' :

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 m' \cos(\alpha z)}{2\pi} \vec{e}_z, \quad \varphi = -\frac{P' \cos(\alpha z)}{2\pi \epsilon_0}$$

ges! Feld des Poynting-Vektors

7.

Gegeben sei $\vec{F}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{E} e^{j\omega t - \gamma \vec{k} \cdot \vec{r}})$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichungen $\gamma \vec{k} \times \vec{E} = j\omega \mu \vec{H}$ sowie $\gamma \vec{k} \times \vec{H} = -(\sigma + j\omega \epsilon) \vec{E}$ die Ausbreitungskonstanten α und β .

8.

Gegeben sei ein Hohlraumresonator mit dazugehörigem

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \hat{E}_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

, wobei $k_x = \frac{\pi}{a}$ und $k_y = \frac{\pi}{b}$.

Wie groß ist die kleinste sich einstellende Resonanzfrequenz f_r ? Berechnen Sie auch die magn. Flussdichte B .
↳ sich einstellende

9.

Auf einer verlustfreien Leitung, von der eine zweite verlustfreie Leitung abzweigt, fällt die angegebene Spannungswelle u_{1e} ein. Beschreiben Sie vollständig die in den Abzweig übertragene Spannungswelle.

10

Ein erweitertes Leitungsmodell

$$\partial_z i = -G' \partial_z u, \quad \partial_z u = -L' \partial_z (i + C_p' \partial_z \partial_z u)$$

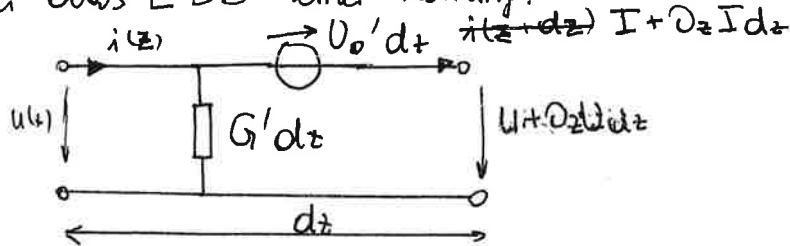
erfaßt mit dem zusätzlichen Parameter C_p' (physikalische Dimension: Kapazität \times Länge) auch longitudinale kapazitive Kopplungen. Gehen Sie von Sinuswellen

$$\begin{cases} u(z,t) \\ i(z,t) \end{cases} = \text{Re} \left\{ \begin{matrix} \hat{u} \\ \hat{i} \end{matrix} e^{i(\omega t - \beta z)} \right\}$$

aus und bestimmen Sie die zugehörige Wellenimpedanz $Z_w(\omega)$.

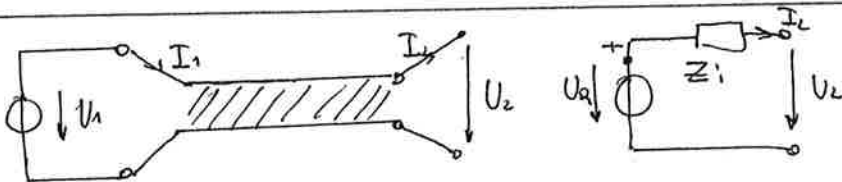
11

Gegeben sei das ESB einer Leitung:



Berechnen und zeichnen Sie den Stromverlauf in der Leitung von $z=0$ bis $z=l$.

12



$$U_1 = \cosh(\gamma l) U_2 + Z_w \sinh(\gamma l) I_2$$

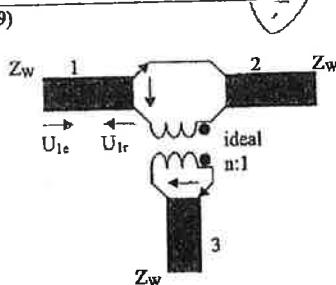
$$I_1 = \frac{1}{Z_w} \sinh(\gamma l) U_2 + I_2 \cosh(\gamma l)$$

Bestimmen Sie U_1 sowie Z_i der Ersatzschaltung für ein Leitungsstück

13

Leiten Sie für eine verlustbehaftete oder verzerrungsfreie¹⁾ Leitung den Wellenwiderstand her.

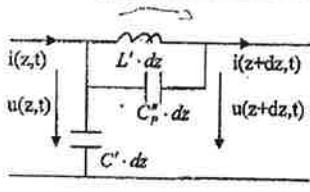
14



Im Zuge einer verlustfreien Leitung mit der Wellenimpedanz Z_w wird über einen idealen Transformator eine weitere Leitung, ebenfalls mit der Wellenimpedanz Z_w , angekoppelt. Auf den Leitungsteil 1 fällt ein bekannter Spannungsimpuls U_{1e} ein. Bestimmen Sie den dann in den Abzweig 3 übertragenen Spannungsimpuls U_3 unter der Voraussetzung, dass dieser Leitungsteil, wie auch der Leitungsteil 2, reflexionsfrei, d.h. mit Z_w abgeschlossen ist.

15

10) Zur grundsätzlichen Untersuchung rascher Vorgänge an ausgedehnten Spulen erweist sich häufig ein Leitungsmodell mit den angegebenen Ersatzschaltbild eines Leitungselements als brauchbar. L' und C' sind dabei die üblichen Beläge der Induktivität und der Kapazität. C_p'' ist eine kapazitive Ersatzgröße der Dimension Kapazität x Länge (modelliert z.B. die kapazitive Kopplung benachbarter Windungen).
 Stellen Sie für dieses Modell als Erweiterung der üblichen Leitungsgleichungen die beiden gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für $u(z,t)$ und $i(z,t)$ auf.



16

Eine lange Leitung ist durch die konstanten Beträge L' der Induktivität, C' der Kapazität und R' des Längswiderstandes gekennzeichnet. Der Querleitbelag braucht nicht berücksichtigt zu werden.

- (i) Leiten Sie die Leitungsgleichungen aus der Ersatzschaltung eines kurzen Leitungselements ab.
- (ii) Am Eingang der modellhaft einseitig unendlich langen Leitung liegt die Sinusspannung

$$U(0,t) = \hat{U} \cos(\omega t)$$

Geben Sie die zugehörige, eingeschwungene Stromverteilung entlang der Leitung in reeller Form an.

17

Die elektrische Komponente einer ebenen elektromagnetischen Sinuswelle die sich in einem dielektrischen Medium mit konstanten Werten μ , ϵ und der Konduktivität σ ausbreitet lässt sich in der Form $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E} e^{j(\omega t - \alpha z - \beta z)}$

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1}{2} [\sqrt{1 + (\omega T_R)^2} - 1]}$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1}{2} [\sqrt{1 + (\omega T_R)^2} + 1]}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$T_R = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

Ges.: Reichweite in Meerwasser $\epsilon = 80 \epsilon_0$
 (Abstand in dem Amplitude auf 1% des ursp. Wertes abgesunken ist.) $\mu = \mu_0$
 $\sigma = 5 \frac{S}{m}$
 für (i) $f = 25 \text{ kHz}$ (ii) $f = 25 \text{ MHz}$

18

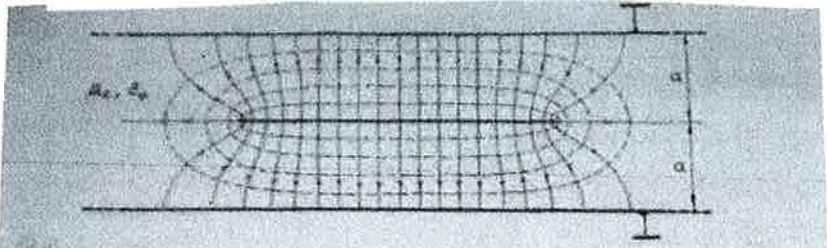
Gegeben sei eine Leitung mit vernachlässigbaren L' , G' .

$$\partial_z U + R' I = 0 \quad \partial_z I + C' \partial_t U = 0$$

Ein Flußimpuls
$$U(z, t) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{\pi} t_1} \frac{z}{2} \sqrt{\frac{R' C'}{t_1}} \exp\left(-\frac{z^2}{4} \left(\frac{R' C'}{t_1}\right)\right)$$

Ges.: Skizze des Verlaufs für $t = t_1$.

19



Das Bild zeigt den Querschnitt eines TEM-Wellenleiters - bestehend aus zwei an Masse liegenden Metallplatten und einem dazwischen liegenden Metallstreifen - zusammen mit dem ebenen elektrostatischen Feld. Zu den konstanten Potential-schritten $\Delta\varphi$ zwischen aufeinanderfolgenden Potentialflächen (strichliert gezeichnet) gehören dabei die längenbezogenen elektrischen Flüsse $\epsilon_0 \Delta\varphi$ der Flußröhren, begrenzt durch die Feldlinien (durchgezogene Linien mit Pfeilen).
Bestimmen Sie die zugehörige TEM-Wellenimpedanz unter der Annahme ideal metallischer Randbedingungen.

20

$$\nabla^2 f = 0 \quad f = f(r) \quad r = b - \frac{r}{c}$$