Bsp 1

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{P'P}$$

$$\vec{r} = (x-x_0)\,\vec{e}_x + (y-y_0)\,\vec{e}_y + (z-z_0)\,\vec{e}_z$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

a)

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right)^{3/2}}\Big[2(x-x_0)\,\vec{e}_x + 2(y-y_0)\,\vec{e}_y + 2(z-z_0)\,\vec{e}_z\Big]$$

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = \underline{\underline{-\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r}}$$

b)

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\underbrace{\vec{\nabla} r}_{\text{Richtung des stärksten Änderung}} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Richtung des stärksten Änderung } Innere Ableitung

Bsp 2

$$\int_{\partial V} \vec{n}\circ\vec{f}\,\vec{g}\; dA = \int_{\partial V} \vec{n}\circ(\underbrace{\vec{f}\otimes\vec{g}}_{T})\; dA =$$

Satz von Gauss

$$= \int_V \vec{\nabla}\circ(\vec{f}\otimes\vec{g})\; dV = \int_V \left(\vec{\nabla}\circ\vec{f}\;\vec{g} + \vec{f}\circ\vec{\nabla}\;\vec{g}\right) dV$$

Volumenintegral

Bsp 3 Vektorpotential des magn. Punktdipols

$\Rightarrow$ magn. Skalarpotential φ_M

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \cdot \frac{\sin(\theta)}{r^2} \vec{e}_\alpha = A_\alpha \vec{e}_\alpha$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_M \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \qquad \text{Tab. } 1.3$$

$$\vec{B} = \left[\vec{e}_r \frac{\partial_\theta \left[\sin\theta \frac{\sin\theta}{r^2} \right]}{r \sin\theta} - \vec{e}_\theta \frac{\partial_r \left[r \frac{\sin\theta}{r^2} \right]}{r} \right] \frac{\mu_0 m}{4\pi}$$

$$\vec{B} = \left[\vec{e}_r \frac{2 \sin\theta \cos(\theta)}{r^3 \sin\theta} + \vec{e}_\theta \frac{\sin\theta}{r^3} \right] \frac{\mu_0 m}{4\pi}$$

$$\underline{\underline{\vec{H} = \frac{m}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[2\cos(\theta) \vec{e}_r + \sin\theta \, \vec{e}_\theta \right]}}$$

$$\vec{H} = \underline{-\vec{e}_r \partial_r \varphi_M - \vec{e}_\theta \frac{\partial_\theta \varphi_M}{r}} + \underbrace{\vec{e}_\alpha \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\alpha \varphi_M}_{=0}$$

- $\vec{e}_r$ $\qquad \partial_r \varphi_M = -\frac{m}{4\pi} \frac{1}{r^3} 2\cos(\theta)$

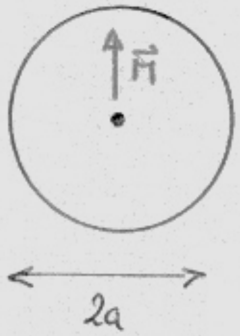
$$\varphi_M(r,\theta) = +\frac{m}{4\pi} \frac{1}{2r^2} 2\cos\theta + f(\theta)$$

- $\vec{e}_\theta$ $\qquad -\frac{\partial_\theta \varphi_M}{r} = +\frac{1}{r} \frac{m}{4\pi} \frac{1}{r^2} \sin(\theta) + f'(\theta)$

$$f'(\theta) = 0$$

$$\underline{\underline{\varphi_M = \frac{m}{4\pi} \frac{1}{r^2} \cos(\theta)}}$$

Bsp 4



$\vec{M} = M \vec{e}_z$

μ_0

$\vec{B} = \mu_0 H + \mu_0 M$ Material

$\vec{B} = \mu_0 H$ Luft

$\vec{J}^f = \vec{\nabla} \times \vec{M} + \partial_t \vec{P} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ im Körperinneren $\vec{M} = \text{const } \vec{e}_z$

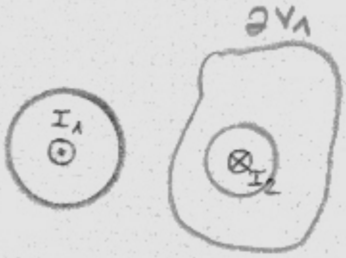
$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{J}^f = \vec{0}}}$

An der Randfläche $\rho = a$

$\vec{K}^f = \vec{e}_r \times [\![\vec{M}]\!] = \vec{e}_r \times \left[- M \vec{e}_z \right] = \underline{\underline{\vec{e}_\alpha \, M \cdot \sin(\theta)}}$

$\vec{e}_z$, θ, $\vec{e}_r$ $\qquad \vec{e}_r \times \vec{e}_z = - \sin(\theta) \cdot \vec{e}_\alpha$

Bsp 5



Ersetzen durch zwei Ersatzleiter lok. möglich

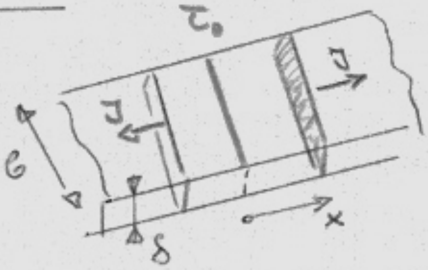
$I_1 = A_1 \cdot J_1$

$I_2 = A_2 \, J_2$

$\left. \begin{array}{l} V(\partial A) = I(A) \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \end{array} \right\}$ mittels Durchflutungssatz gleiche Werte wie für Ersatzleiter lok.

$\Rightarrow$ gleiche Kräfte

Bsp 6



τ_0 Flächenladung

$\vec{v} = 0$

$$\partial_t \rho + \underbrace{\vec{\nabla} \circ (\rho \vec{v})}_{=0} + \frac{1}{T_R} \rho = 0$$

$$T_R \, \partial_t \rho + \rho = 0 \qquad \rho(\vec{r},t) = \rho(r,0)\, e^{-t/T_R}$$

Lösung der Gleichung

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \vec{e}_I \qquad A = b \cdot \delta$$

$\cancel{A = I}$

$$I(\partial V) = -\dot{Q}(V)$$ Satz der Erhaltung der elektr. Ladung

$$J = \frac{I}{2A}$$

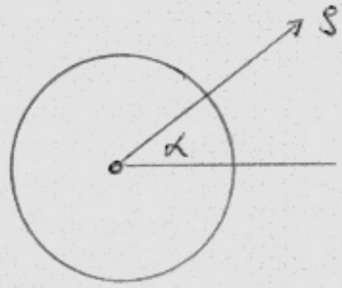
$$I(\partial V) = -\frac{d}{dt}\left[\tau_0 \cdot b \, e^{-t/T_R} \right]$$

$$I(\partial V) = +\frac{1}{T_R} b \tau_0 \, e^{-t/T_R}$$

$$\boxed{\vec{J} = \begin{cases} +\frac{1}{T_R} \frac{\tau_0 b}{2b\delta} e^{-t/T_R} \vec{e}_x & x > 0 \\ -\frac{1}{T_R} \frac{\tau_0 b}{2b\delta} e^{-t/T_R} \vec{e}_x & x < 0 \end{cases}}$$

Bsp 7

Kreiszylinder, ebenes Feld



$$\varphi(a,\alpha) = U \cdot \cos(3\alpha)$$

Potential für $\varrho > a$ berechnen

$$\varphi(\varrho,\alpha) = R(\varrho)\, S(\alpha)$$

$$\varphi(\varrho,\alpha) = \left(A_1 \sin(k\alpha) + A_2 \cos(k\alpha)\right)\left(B_1 \varrho^{-k} + B_2 \varrho^{k}\right)$$

$\varphi(\infty,\alpha) =$ beschränkt $\quad B_2 = 0$

$\varphi(a,\alpha) = U \cdot \cos(3\alpha) \quad A_1 = 0$

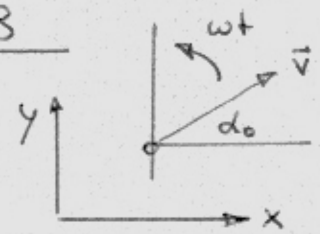
$\varphi(\varrho,\alpha) = C\, \varrho^{-k} \cos(k\alpha)$ Vergleich mit Randbedingung für $\varrho = a$

$$\varphi(\varrho,\alpha) = C\, a^{-3} \cos(3\alpha) = U \cos(3\alpha)$$

$$C = U a^3$$

$$\underline{\underline{\varphi(\varrho,\alpha) = U a^3 \varrho^{-3} \cos(3\alpha)}}$$

Bsp 8



$$\vec{V}(t) = \mathrm{Re}\{ \underline{\vec{V}}\, e^{j\omega t} \}$$

allgem. Anfangslage α_0

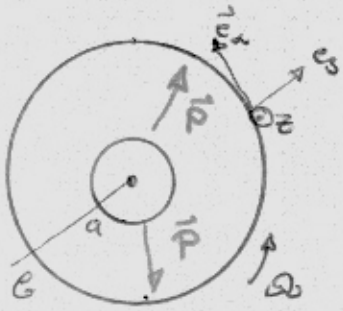
$$\vec{V}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y = |V| \cos(\omega t + \alpha_0)\,\vec{e}_x + |V| \sin(\omega t + \alpha_0)\,\vec{e}_y$$

$$\vec{V}(t) = \mathrm{Re}\left\{ |V|\, e^{j(\omega t + \alpha_0)}\,\vec{e}_x - j\,|V|\, e^{j(\omega t + \alpha_0)}\, e_y \right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ |V|\, e^{j(\omega t + \alpha_0)} \left(\vec{e}_x + j\vec{e}_y\right) \right\}$$

$$\underline{\vec{V}} = |V|\, e^{+j\alpha_0} \left(\vec{e}_x - j\vec{e}_y\right)$$

Bsp 9



$\vec{P}' = P\vec{e}_\varrho$ $\quad P = \text{const}$ $\quad |v| \ll c$

dielektr. Kreiszylinder sonst ladungsfrei

Zylinder rotiert bzgl. Laborsystem mit Ω

1) Bestimme $\vec{P}, \vec{M}$ bzgl. Laborsystem

$\vec{M}' = \vec{M} + \vec{v}\times\vec{P}$ $\qquad \vec{P} = \vec{P}'$ $\qquad$ gestr. Größen bzgl. Körper

$\vec{J}' = \vec{J} - \vec{v}\varrho$ $\qquad \vec{K}' = \vec{K} - \vec{v}\sigma$ $\qquad$ ungestrichen → Laborsyst.

$\vec{M} = \vec{M}' - \vec{v}\times\vec{P}'$ $\qquad$ Punkt auf einem Kreisbogen ϱ

$\vec{M}' = \vec{0}$ $\qquad a \leq \varrho \leq b$

$\vec{v} = \varrho\,\Omega\,\vec{e}_\alpha$

$$\vec{M} = -\vec{v}\times\vec{P}' = -\varrho\Omega P \underbrace{\vec{e}_\alpha\times\vec{e}_\varrho}_{-\vec{e}_z} = \varrho\Omega P\vec{e}_z$$

$\vec{P} = \vec{P}'$

$[\varrho\Omega P] = m \cdot \frac{rad}{s}\,\frac{As}{m^2} = \frac{A}{m}$ ✓

$$\boxed{\vec{M} = \varrho\Omega P\,\vec{e}_z \qquad \vec{P} = P\vec{e}_\varrho}$$

2. Effektive Ladungs / Stromverteilung

$\vec{J}^{eff} = \vec{J} + \vec{J}^f$ $\qquad \vec{J}^f = \vec{\nabla}\times\vec{M} + \partial_t\vec{P} = \vec{\nabla}\times\vec{M}$

$\varrho^e = \varrho + \varrho^f$ $\qquad \vec{K}^f = \vec{n}\times[\![\vec{M}]\!]$

$\varrho = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$ da P const

$\vec{K}, \vec{J}, \varrho, \sigma = 0$ $\qquad \sigma = -\vec{n}\cdot[\![\vec{P}]\!] = \begin{cases} \varrho = a & -P \\ \varrho = b & P \end{cases}$

$\vec{J}^f = -\vec{e}_\alpha\,\partial_\varrho M_z = -\Omega P\,\vec{e}_\alpha$ $\quad [\frac{As}{m^2}]$ ✓

$$\vec{K}^f = \substack{-\\+}\vec{e}_\varrho\times\left[-\left\{\begin{matrix} a \\ b\end{matrix}\right\}\Omega P\vec{e}_z\right\} = \begin{cases} \varrho = a & +a\Omega P\,\vec{e}_\alpha \\ \varrho = b & +b\Omega P\,\vec{e}_\alpha \end{cases} \quad [\tfrac{As}{m^2}\cdot\tfrac{m}{s}]$$ ✓

f, g zwei glatte Skalarfelder 3D eukl. Raum

$$\vec{\nabla} \times (f \vec{\nabla} g) = f \, \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} g + (\vec{\nabla} f) \times (\vec{\nabla} g) = (\vec{\nabla} f) \times (\vec{\nabla} g)$$

$$\vec{\nabla} \times (g \vec{\nabla} f) = g \, \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f + (\vec{\nabla} g) \times (\vec{\nabla} f)$$

$$\vec{\nabla} \times \nabla \vec{g} = 0 \quad \text{rot grad } g = 0$$

$$\iint_A [(\vec{\nabla} f) \times (\vec{\nabla} g)] \circ \vec{n} \, dA = \int_A \vec{n} \circ (\vec{\nabla} \times (f \vec{\nabla} g)) \, dA$$

Satz von Stokes

$$= \int_{\partial A} \vec{s} \circ (f \vec{\nabla} g) \, ds$$

$$= -\int_{\partial A} \vec{s} \circ (g \vec{\nabla} f) \, ds$$

$$\vec{B} = B_0 \sin\left(\frac{z}{a}\right) \vec{e}_x + B_0 \cos(z/a)\,\vec{e}_y \qquad B_0 = \text{const}$$
$$a = \text{const}$$

• mögl. Einf. Vektorpotential $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

dass Maxw. Gleichl ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z = 0$$

$$\vec{e}_x \big(\underbrace{\partial_y A_z}_{\substack{\text{nicht} \\ \text{verwenden}}} \underbrace{- \partial_z A_y}_{= B_x}\big) + \vec{e}_y \big(\underbrace{\partial_z f_x}_{= B_y} - \partial_x f_z\big) + \vec{e}_z \underbrace{\big(\partial_x A_y - \partial_y A_x\big)}_{= 0}$$

$$-\partial_z A_y = B_x = B_0 \sin(z/a) \qquad A_y = +B_0\, a \cos(z/a)$$

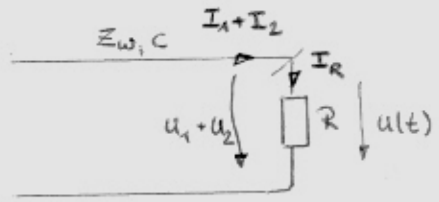
$$\partial_z A_x = B_y = B_0 \cos(z/a) \qquad A_x = B_0\, a \sin(z/a)$$

$$\vec{A}(z) = +B_0 a \left[\sin(z/a)\,\vec{e}_x + \cos(z/a)\,\vec{e}_y \right]$$

$\vec{\nabla} \circ \vec{A} = 0$ ist erfüllt

$$\underline{\underline{\vec{\nabla} \times \vec{A} = B_0 \left[\cos(z/a)\,\vec{e}_y + \sin(z/a)\,\vec{e}_x \right]}}$$

Sprungwelle



$$u_1 + u_2 = u(t) \qquad u_1 = I_1 \cdot Z_\omega$$

$$I_1 + I_2 - I_R = 0 \qquad u_2 = -Z_\omega I_2$$

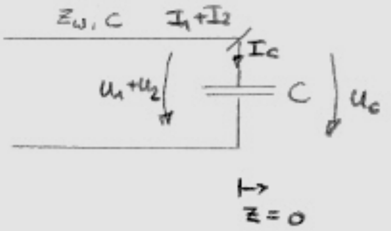
verlustfrei
$\alpha = 0$

Zeitverlauf $u(t)$ wenn $u_1 = \mathcal{E}(t)$

$$\frac{u_1}{Z_\omega} - \frac{u_2}{Z_\omega} - \frac{u(t)}{R} = 0 \qquad u_2 = u_1 - \frac{Z_\omega}{R}\, u(t)$$

$$u_1 + u_1 - \frac{Z_\omega}{R}\, u(t) = u(t)$$

$$\underline{\underline{u(t) = \frac{1}{1 + Z_\omega/R} \cdot 2 \cdot u_1 = \frac{2}{1 + \frac{Z_\omega}{R}} \cdot \mathcal{E}(t)}}$$



$$u_1 + u_2 = u(t) \qquad I_1 + I_2 - I_C = 0$$

$$I_C = C \cdot \frac{du_c}{dt}$$

$$\frac{u_1}{Z_\omega} - \frac{u_2}{Z_\omega} - C\,\frac{du_c}{dt} = 0 \qquad u_1 + u_2 = u_c(t)$$

$$u_2 = u_1 - C Z_\omega \frac{du_c}{dt}$$

$$u_1 + u_1 - C Z_\omega \frac{du_c(t)}{dt} = u_c(t) \qquad 2u_1 = u_c(t) + C Z_\omega \frac{d}{dt} u_c(t)$$

$$\dot{u}_c + \frac{u_c}{C Z_\omega} = 0 \quad \text{homog. Diff-GL}$$

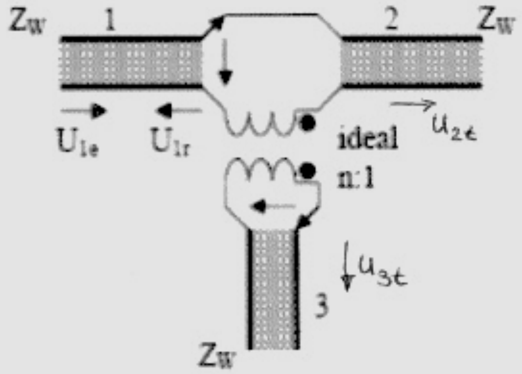
$$u_{c,h} = K e^{-t/CZ_\omega} + C$$

$$2u_1 = u_p(t) + C Z_\omega\, \dot{u}_p(t) \qquad u_{c,p} = 2u_1$$

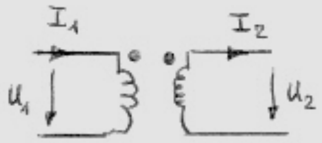
Einschaltbeispiel
$u(0^-) = u(0^+) = 0$

$$u_c(t) = K e^{-t/CZ_\omega} + 2u_1$$

$$\underline{\underline{u_c(t)}} = -2u_1\, e^{-t/CZ_\omega} + 2u_1 = \underline{\underline{2u_1 \left(1 - e^{-t/Z_\omega C}\right)}}$$



Im Zuge einer verlustfreien Leitung mit der Wellenimpedanz Z_W wird über einen idealen Transformator eine weitere Leitung, ebenfalls mit der Wellenimpedanz Z_W, angekoppelt. Auf den Leitungsteil 1 fällt ein bekannter Spannungsimpuls U_{1e} ein. Bestimmen sie den dann in den Abzweig 3 übertragenen Spannungsimpuls U_3 unter der Voraussetzung, dass dieser Leitungsteil, wie auch der Leitungsteil 2, reflexionsfrei, d.h. mit Z_W abgeschlossen ist.



$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{n}{1} \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{n} \qquad u_2 = \frac{1}{n} u_1$$

$$u_{1e} + u_{1r} = u_{2t} = u_{3t} \frac{1}{n}$$

$$u_{1e} + u_{1r} = \frac{\boxed{u_{3t}}}{n} \overset{?}{=} u_{2t} \qquad u_{3t} = n \left[u_{1e} + u_{1r} \right]$$

$$I_{1e} + I_{1r} = I_{2t} + n I_{3t} \qquad u_{1e} = Z_w \cdot I_{1e}$$

$$\frac{u_{1e}}{Z_w} - \frac{u_{1r}}{Z_w} = \frac{u_{2t}}{Z_w} + \frac{u_{3t}}{Z_w} n \qquad u_{1r} = -Z_w I_{1r}$$

$$u_{1e} - u_{1r} = u_{1e} + u_{1r} + n u_{3t}$$

$$u_{1r} = -n u_{3t}$$

$$u_{3t} = n \left[u_{1e} - n u_{3t} \right] =$$

$$\underline{\underline{u_{3t} = \frac{n}{1+n} u_{1e}}}$$