

1

Stellen Sie das Tensorfeld

$$\underline{T} = y^2 \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x - x^2 \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y$$

in ebenen Polarkoordinaten dar, wobei die Zusammenhänge

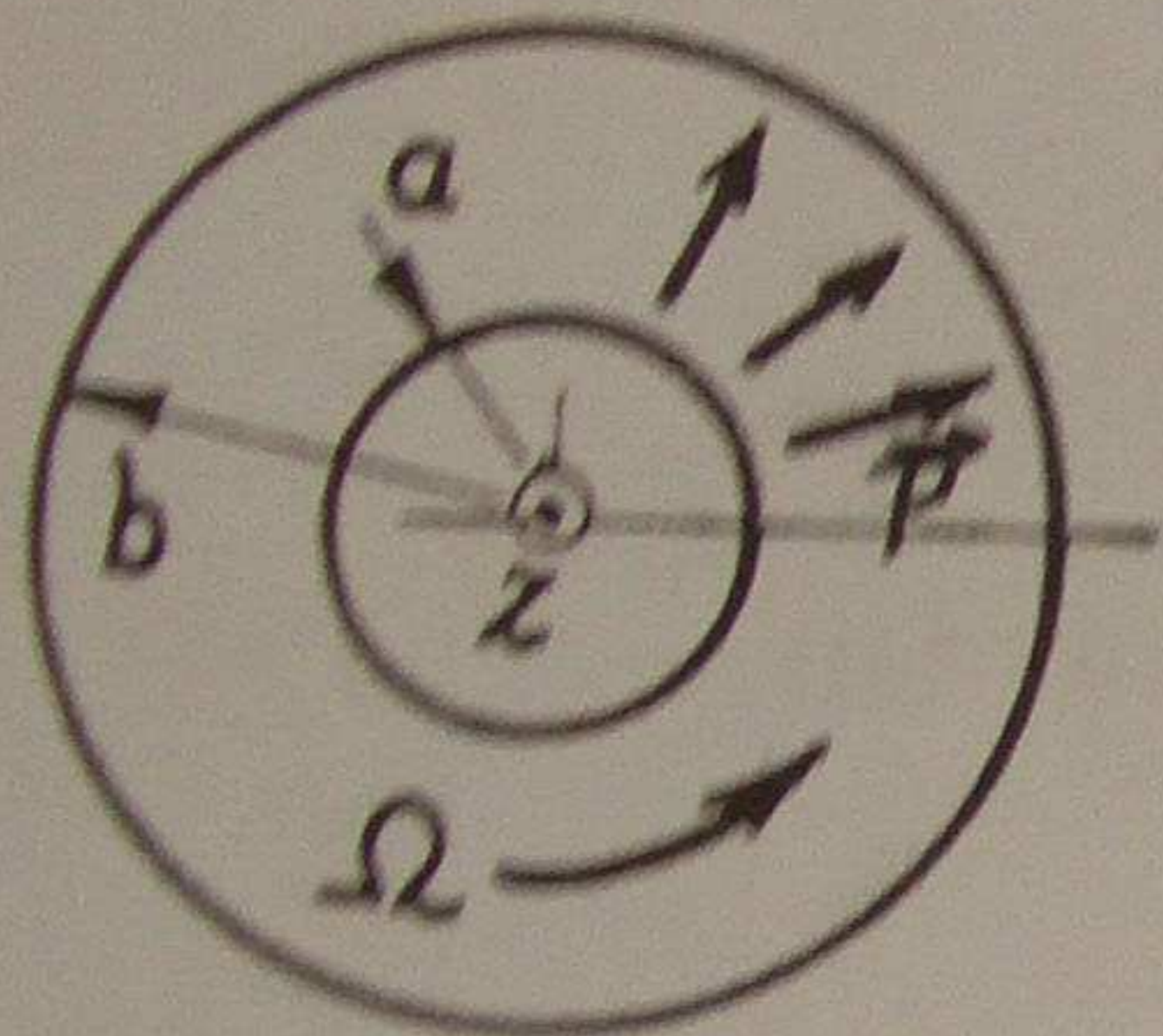
$$x = \varrho \cos(\alpha),$$

$$\vec{e}_x = \cos(\alpha) \vec{e}_\varrho - \sin(\alpha) \vec{e}_\alpha$$

$$y = \varrho \sin(\alpha),$$

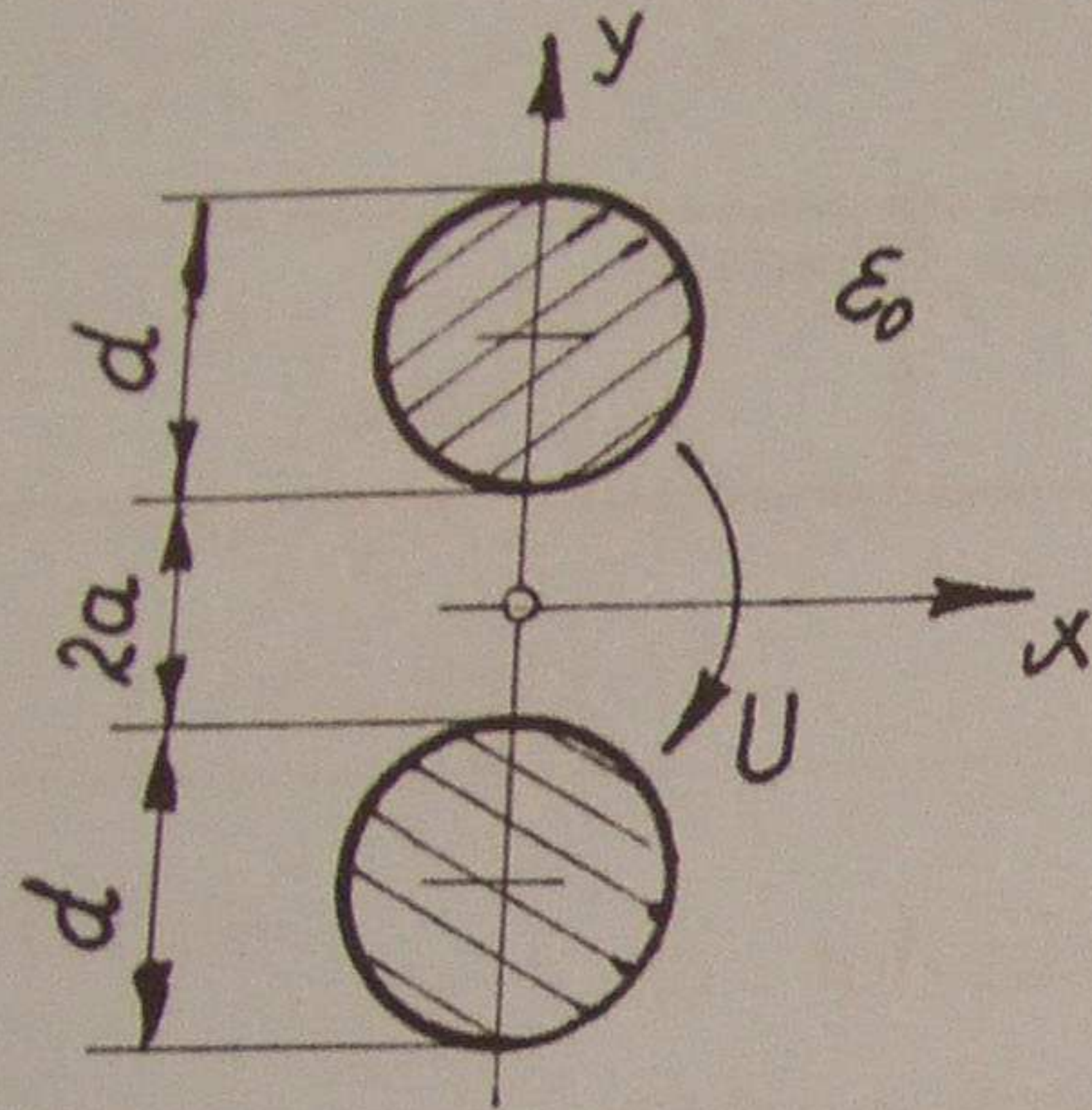
$$\vec{e}_y = \sin(\alpha) \vec{e}_\varrho + \cos(\alpha) \vec{e}_\alpha$$

bestehen.



Ein dickwandiger, dielektrischer Kreiszyylinder ist radial starr mit $\mathcal{P} = |\vec{P}| = \text{const}$ elektrisch polarisiert, sonst aber ladungsfrei. Angenommen, der Zylinder rotiert in bezug auf ein Inertialsystem (Laborsystem) mit der Winkelgeschwindigkeit Ω (nichtrelativistisch) um seine raumfeste Achse.

- (i) Bestimmen Sie die zugehörigen Felder der elektrischen Polarisation und der Magnetisierung bezüglich des Laborsystems.
- (ii) Berechnen Sie daraus die effektive Strom- und Ladungsverteilung, die im Laborsystem beobachtet wird.



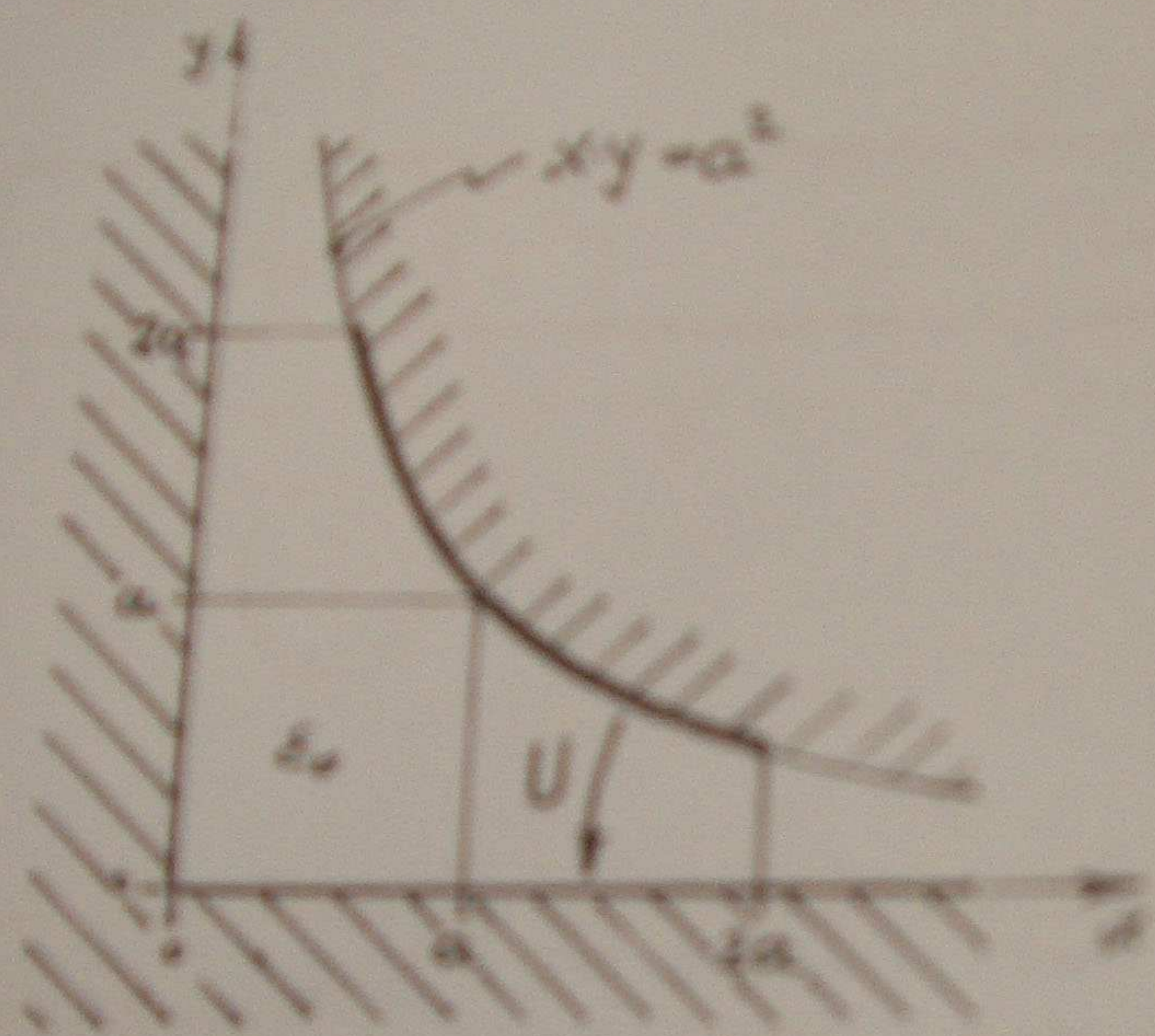
In der Mittenebene zweier parallel in Luft verlaufender metallener Kreiszyylinder, zwischen denen die elektrische Spannung U liegt, bildet sich die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(x) = \frac{E_0 \vec{e}_y}{1 + [x/\sqrt{a(a+d)}]^2}$$

$$\text{mit } E_0 = \frac{1}{\sqrt{1+d/a} \ln(\sqrt{1+a/d} + \sqrt{a/d})} \cdot \frac{U}{2a}$$

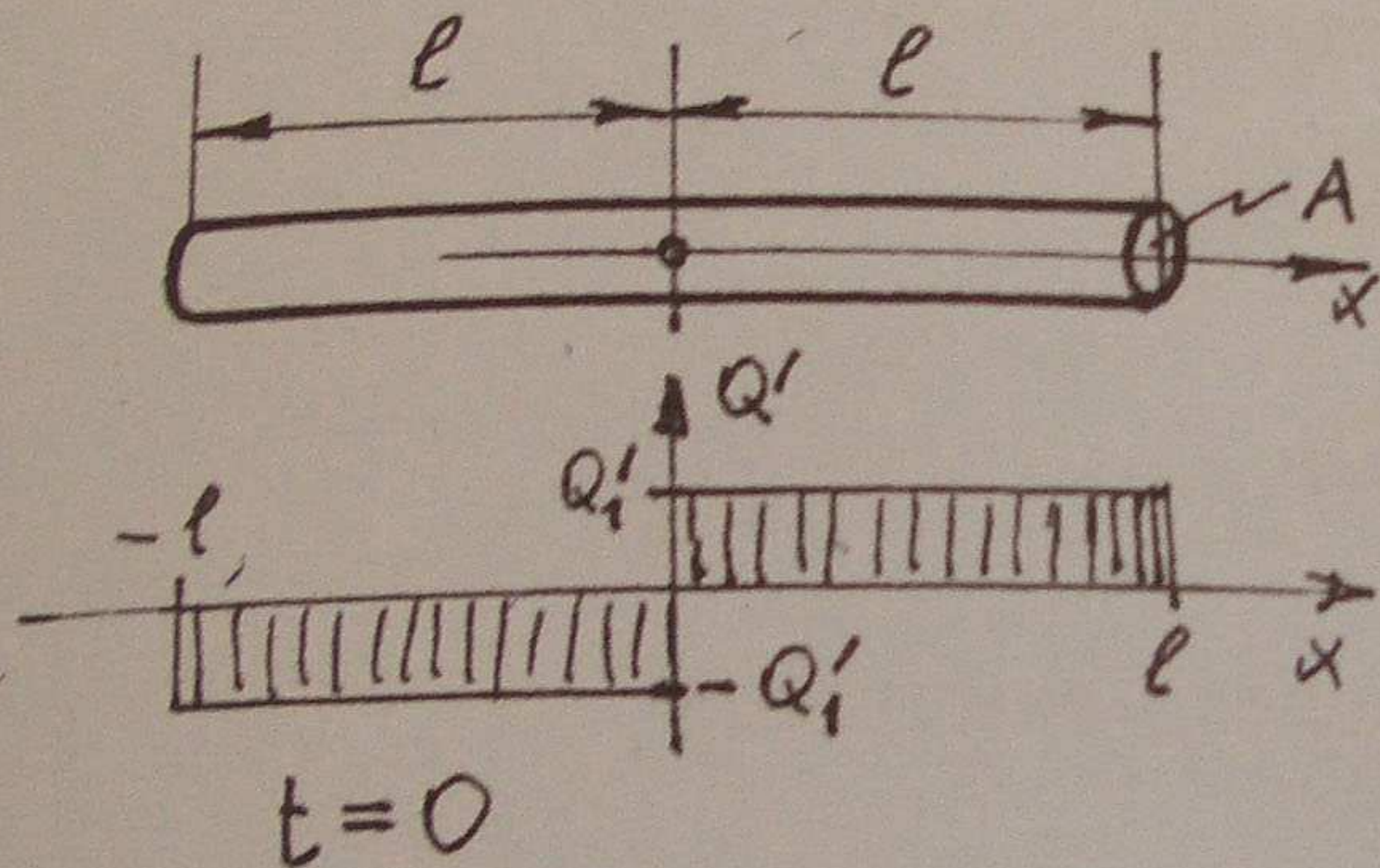
aus. Berechnen Sie die längenbezogene Kraft, die der obere Zylinder auf den unteren ausübt.

Hinweis: $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan(x) + \text{const.}$



Die Skizze zeigt den Querschnitt durch eine zylindrische Struktur, bei der zwei Metall Elektroden - die eine mit gleichseitig hyperbolischer Kontur, die andere eine geradwinklige Ecke bildend - einander gegenüberstehen. Nebenberechnung der elektrischen Feldstärke und des Flussbezogen auf die Länge in z-Richtung, der an dem stark ausgezogenen Teil der hyperbolischen Kontur austritt, wenn zwischen den Elektroden die Spannung U liegt.

Hinweis: Die Verwendung des elektrischen Vektorpotentials erweist sich zur Flussberechnung als bequem.



Die beiden Hälften eines Stabes (Länge 2ℓ Querschnittsfläche A) aus schwach elektrisch leitfähigem Material (Konduktivität γ , Permittivität ϵ) sind entgegengesetzt gleichförmig geladen (längenbezogene Ladung Q'). Berechnen Sie für die nachfolgende Relaxation die elektrische Stromdichte $\vec{J}(x, t)$,
 $-l \leq x \leq l, \quad t \geq 0.$

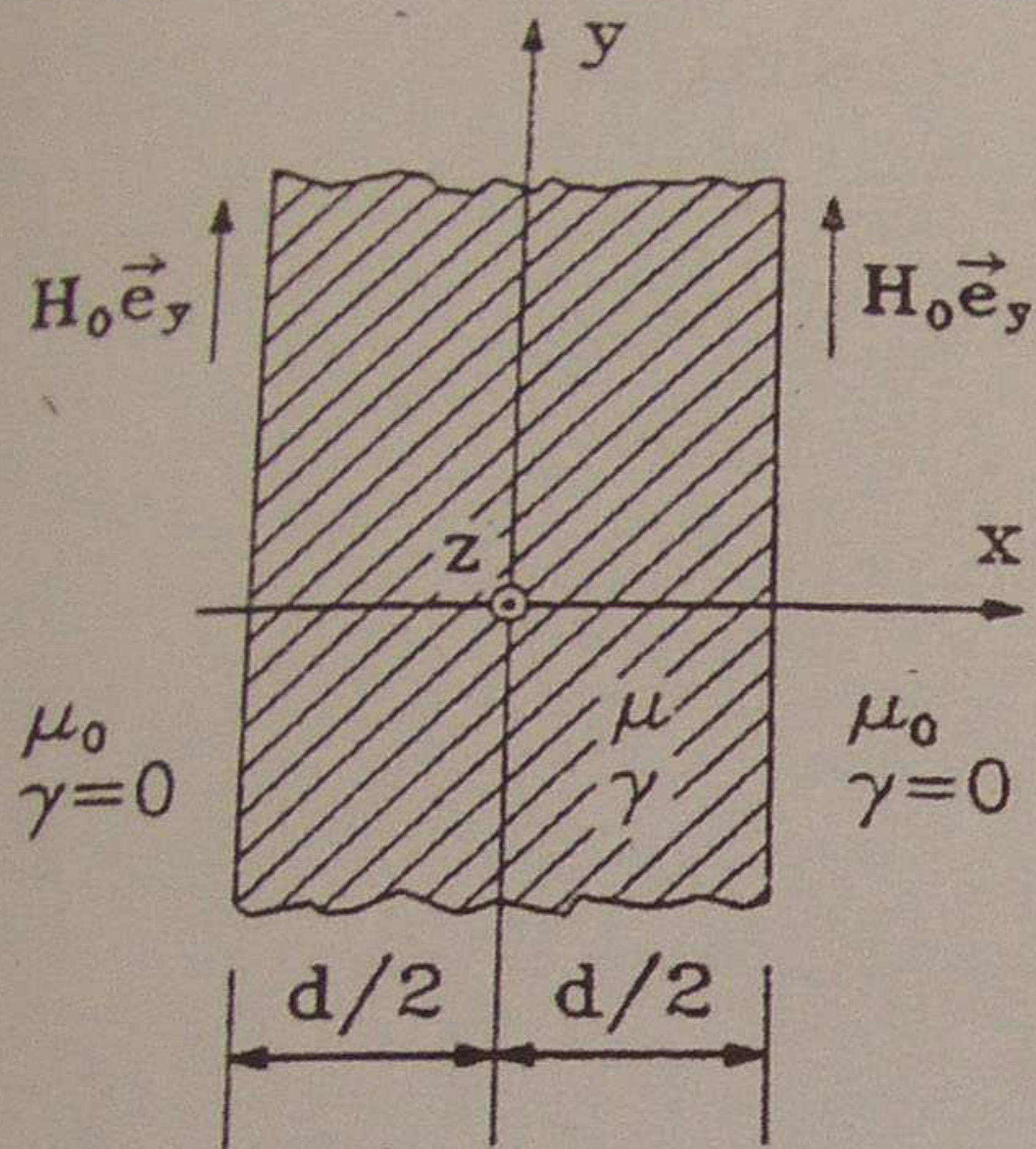
Magnetisches Vektorpotential 3:

Ein ebenes magnetisches Feld wird in einer gewissen Umgebung der z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems durch die Flußdichte

$$\vec{B} = \frac{B_0}{a} (x \vec{e}_x - y \vec{e}_y)$$

beschrieben.

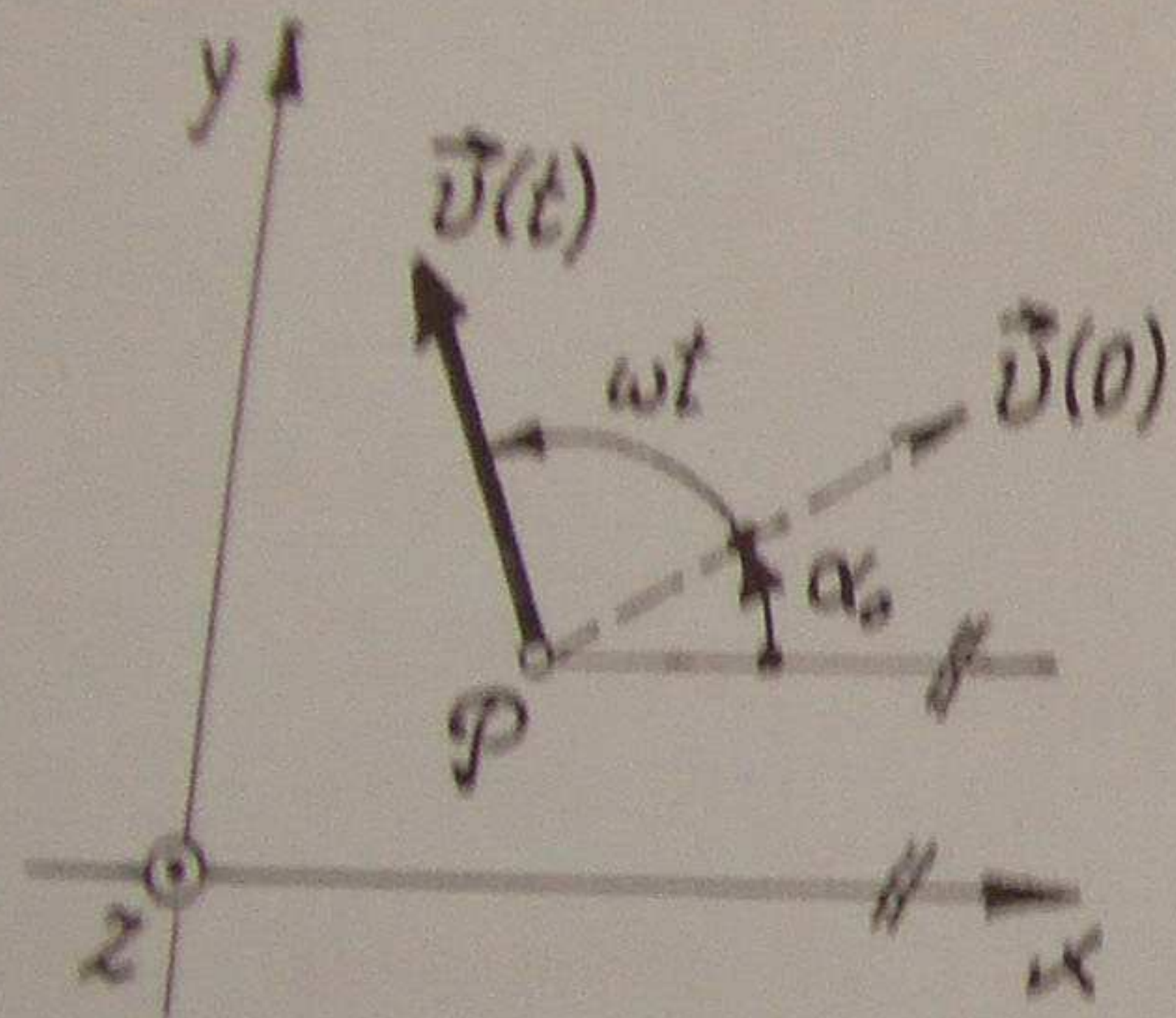
- (i) Geben Sie ein zugehöriges, Maxwell-geeichtes magnetisches Vektorpotential an.
- (ii) Skizzieren Sie den Verlauf der magnetischen Flußdichtelinien in der xy-Ebene.
- (iii) Welche einfache Anordnung von Linienströmen erzeugt in erster Näherung das angegebene Feld im sonst leeren Raum.



An einer magnetisierbaren und elektrisch leitfähigen Schicht der Dicke d mit Abmessungen in y - und z -Richtung $\gg d$ liegt beidseitig tangential eine zeitlich sinusförmige, magnetische Feldstärke. Für die flächenbezogenen Wirbelstromverluste in der Schicht ergibt sich

$$P'' = \frac{\hat{H}_0^2 d}{\gamma \delta^2} \operatorname{Re} \left[j \frac{\tan(kd/2)}{kd/2} \right] = \frac{\hat{H}_0^2 \sinh(d/\delta) - \sin(d/\delta)}{\gamma \delta \cosh(d/\delta) + \cos(d/\delta)},$$

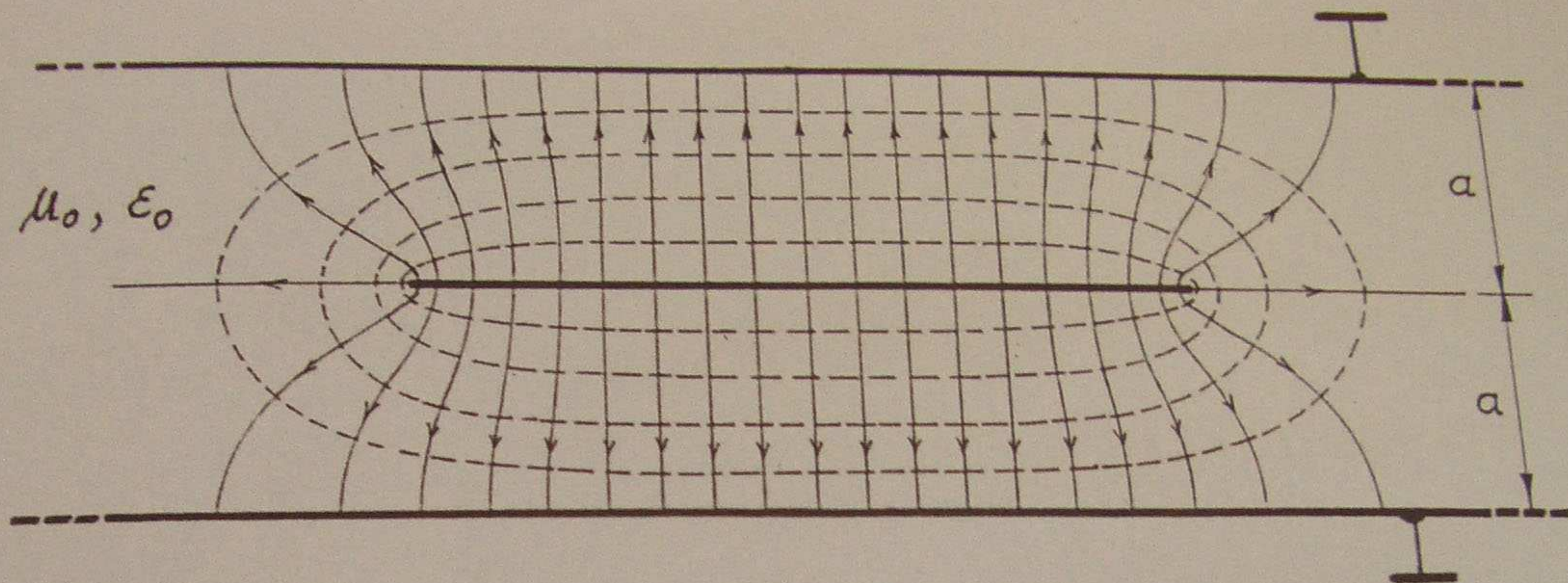
wobei $\delta = \sqrt{2/(\mu\gamma\omega)}$ die Eindringtiefe bedeutet. Für welche Schichtdicke d ist P'' bei festen Werten \hat{H}_0 und ω maximal? Wie groß ist in diesem Fall P'' ?



Ein dem Punkt \mathcal{P} zugeordneter Vektor \vec{D} besitze einen konstanten Betrag und eine Richtung, die parallel zur xy -Ebene mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Stellen Sie den Vektor in der Form

$$\vec{D}(t) = \text{Re}(\underline{\vec{D}} e^{j\omega t})$$

dar, d.h. bestimmen Sie den komplexen, zeitunabhängigen Vektor $\underline{\vec{D}}$.



Das Bild zeigt den Querschnitt eines TEM-Wellenleiters - bestehend aus zwei an Masse liegenden Metallplatten und einem dazwischen liegenden Metallstreifen - zusammen mit dem ebenen elektrostatischen Feld. Zu den konstanten Potentialschritten $\Delta\varphi$ zwischen aufeinanderfolgenden Potentialflächen (strichliert gezeichnet) gehören dabei die längenbezogenen elektrischen Flüsse $\epsilon_0 \Delta\varphi$ der Flußröhren, begrenzt durch die Feldlinien (durchgezogene Linien mit Pfeilen).

Bestimmen Sie die zugehörige TEM-Wellenimpedanz unter der Annahme ideal metallischer Randbedingungen.

Angenommen, f und g sind zwei ausreichend glatte Skalarfelder im dreidimensionalen euklidischen Raum. Formen Sie die beiden Ausdrücke

$$\vec{\nabla} \times (f \underbrace{\vec{\nabla} g}_{\vec{h}}) \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times (g \vec{\nabla} f)$$

um und zeigen Sie, dass sich das Flächenintegral

$$\int_{\mathcal{A}} [(\vec{\nabla} f) \times (\vec{\nabla} g)] \cdot \vec{n} \, dA$$

auf zwei äquivalente Arten als Kurvenintegral über den Rand $\partial\mathcal{A}$ darstellen lässt.