

Bitte die Lösungen mit Vorsicht genießen. Fehler bitte hier <http://www.et-forum.org/index.php?showtopic=6011> melden!

Und viel Erfolg bei der Prüfung.

1 Klausur vom 7. März 2008

Aufgabe 1 .

a) .

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

$$y = g(\mathbf{x}, u)$$

$$C_2(u_{c2}) = C_{20} + C_{21} u_{c2}^2, \quad C_{20}, C_{21} > 0$$

$$\mathbf{x} = [u_{c1}, u_{c2}]^T$$

$$y = R_2 i_2 + u_{c2}$$

$$-i_2 = \underbrace{\frac{u}{R_0}}_{i_0} + \underbrace{\frac{u - u_{c1}}{R_1}}_{i_1} = i_0 + i_1$$

$$y = g(\mathbf{x}, u) := u_{c2} - \frac{R_2}{R_0} u + \frac{R_2}{R_1} u_{c1} - \frac{R_2}{R_1} u$$

$$C_1 \dot{u}_{c1} = i_1$$

$$\Rightarrow \dot{u}_{c1} = \frac{u - u_{c1}}{R_1 C_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (C_2(u_{c2}) u_{c2}) = (2C_{21} u_{c2}^2 + C_2(u_{c2})) \dot{u}_{c2} = i_2$$

$$\Rightarrow \dot{u}_{c2} = -\frac{1}{2C_{21} u_{c2}^2 + C_2(u_{c2})} \left(\frac{u}{R_0} - \frac{u - u_{c1}}{R_1} \right)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_{c1} \\ \dot{u}_{c2} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) := \begin{bmatrix} \frac{u}{R_1 C_1} - \frac{u_{c1}}{R_1 C_1} \\ -\frac{1}{2C_{21} u_{c2}^2 + C_2(u_{c2})} \left(\frac{u}{R_0} - \frac{u - u_{c1}}{R_1} \right) \end{bmatrix}$$

b) .

Bestimmen aller Ruhelagen für $u = 0$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

$$0 = \frac{u}{R_1 C_1} - \frac{u_{c1}}{R_1 C_1} \Rightarrow u = u_{c1} = 0$$

$$0 = -\frac{1}{2C_{21}u_{c2}^2 + C_2(u_{c2})} \left(\frac{u}{R_0} + \frac{u - u_{c1}}{R_1} \right) \Rightarrow u_{c2} \text{ beliebig}$$

Linearisieren um die Ruhelage $u = u_{c1} = u_{c2} = 0$

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial}{\partial u_{c1}} f_{u_{c1}}(\mathbf{x}, u) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} & \left. \frac{\partial}{\partial u_{c2}} f_{u_{c1}}(\mathbf{x}, u) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} \\ \left. \frac{\partial}{\partial u_{c1}} f_{u_{c2}}(\mathbf{x}, u) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} & \left. \frac{\partial}{\partial u_{c2}} f_{u_{c2}}(\mathbf{x}, u) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ \frac{1}{C_{20} R_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial}{\partial u} f_{u_{c1}}(\mathbf{x}, u) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} \\ \left. \frac{\partial}{\partial u} f_{u_{c2}}(\mathbf{x}, u) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ -\frac{1}{C_{20} R_1} - \frac{1}{R_0 C_{20}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial}{\partial u_{c1}} g(\mathbf{x}, u) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} & \left. \frac{\partial}{\partial u_{c2}} g(\mathbf{x}, u) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = \left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, u=u_R} = -\frac{R_2}{R_0} - \frac{R_2}{R_1}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ \frac{1}{C_{20} R_1} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ -\frac{1}{C_{20} R_1} - \frac{1}{R_0 C_{20}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \mathbf{x} - \underbrace{\left(\frac{R_2}{R_0} + \frac{R_2}{R_1} \right)}_d$$

c) .

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d$$

$$s\mathbf{1} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ -\frac{1}{C_{20} R_1} & s \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{s}{C_1 R_1}} \begin{bmatrix} s & 0 \\ \frac{1}{C_{20} R_1} & s + \frac{1}{C_1 R_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s + \frac{1}{C_1 R_1}} & 0 \\ \frac{1}{C_{20} R_1 s^2 + s \frac{C_{20}}{C_1}} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s C_1 R_1 + 1} & 0 \\ \frac{1}{C_{20} C_1 R_1^2 s^2 + s C_{20} R_1} & \frac{1}{s C_1 R_1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T (s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \frac{R_2}{s C_1 R_1^2 + R_1} + \frac{1}{C_{20} C_1 R_1^2 s^2 + s C_{20} C_1} - \left(\frac{R_2}{R_0} + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

Weiter auflösen und dann Koeffizientenvergleich. Ergibt aber riesige unhandliche Terme.

d) .

$$\mathcal{R} = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} & -\frac{1}{(C_1 R_1)^2} \\ -\frac{1}{C_{20} R_1} - \frac{1}{R_1 C_{20}} & -\frac{1}{C_1 C_{20} R_1^2} \end{bmatrix}$$

rang(\mathcal{R}) = 2 \Rightarrow vollst. Erreichbar

Aufgabe 2 .

a) .

Linearität (S.19, Definition 2.1.):

$$\mathbf{h}(a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2, \mathbf{0}, t) = a\mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{0}, t) + b\mathbf{h}(\mathbf{x}_2, \mathbf{0}, t)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{0}, a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2, t) = a\mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_1, t) + b\mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_2, t)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, t) + \mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{u}, t)$$

Zeitinvarianz (S. 21, Definition 2.2.):

$y(t)$ für Anfangswert $x(t_0)$ und Eingang $u(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$
 $\Rightarrow y(t-T)$ für Anfangswert $x(t_0+T)$ und Eingang $u(\tau-T)$, $t_0+T \leq \tau \leq t+T$

b) .

S. 96, Definition 4.1/Satz 4.1:

A) $1 + K(s)G(s) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(s) < 0$

B) Im Produkt $K(s)G(s)$ treten keine Pol/Nullstellenkürzungen für Pole oder Nullstellen $s : i$ mit $\operatorname{Re}(s_i) \geq 0$ auf.

c) .

$$A(s) = \frac{K}{s^2 + 1}$$

$$B(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$w = (y - w)B(s) \Rightarrow w = y \frac{B(s)}{1 + B(s)}$$

$$y = (r - w)A(s) = rA(s) - yA(s) \frac{B(s)}{1 + B(s)}$$

$$\begin{aligned} y \left(1 + \frac{A(s)B(s)}{1 + B(s)} \right) &= rA(s) = \frac{\frac{K}{s^2+1} + \frac{K}{s^2+1} \frac{1}{s} \frac{1}{s^2+2s+2}}{1 + \frac{1}{s} \frac{1}{s^2+2s+2} + \frac{K}{s^2+1} \frac{1}{s} \frac{1}{s^2+2s+2}} = \\ &= \frac{Ks(s^2 + 2s + 2) + K}{(s^2 + 1)s(s^2 + 2s + 2) + (s^2 + 1) + K} = \frac{Ks(s^2 + 2s + 2) + K}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + (1 + K)} \end{aligned}$$

Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{l|llll} s^5 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ s^4 & 2 & 3 & 1+K & 0 \\ s^3 & \frac{3}{2} & \frac{3-K}{2} & 0 & \\ s^2 & 1 + \frac{2}{3}K & 1+K & 0 & \\ s^1 & -\frac{K(3+K)}{3+2K} & 0 & & \\ s^0 & 1+K & & & \end{array}$$

$$1 + \frac{2}{3}K > 0 \Rightarrow K > -\frac{3}{2}$$

$$-\frac{K(3+K)}{3+2K} > 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} < K < 0 \text{ oder } K < -3$$

$$1 + K > 0 \Rightarrow K > -1$$

$$\Rightarrow -1 < K < 0$$

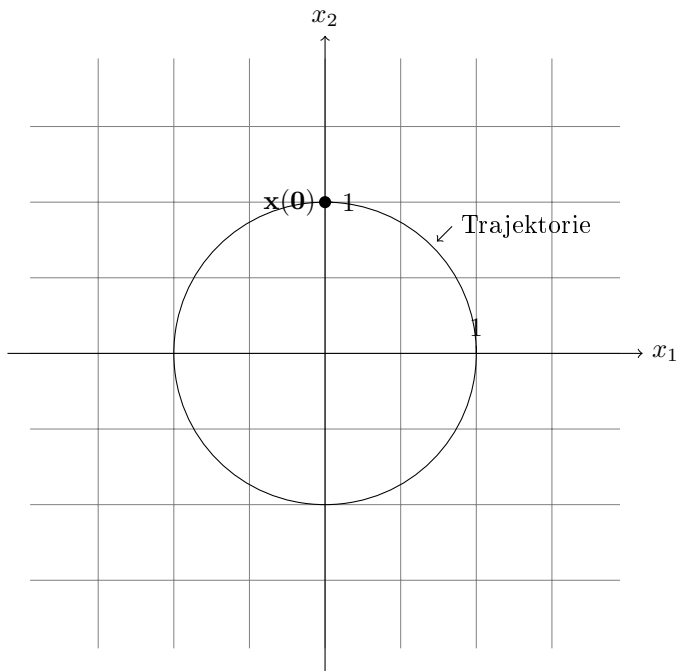
d) .

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad x_1(0) = 0$$

$$\dot{x}_2 = x_1, \quad x_2(0) = 1$$

offensichtliche Lösung:

$$x_1(t) = \sin(t), \quad x_2(t) = \cos(t)$$

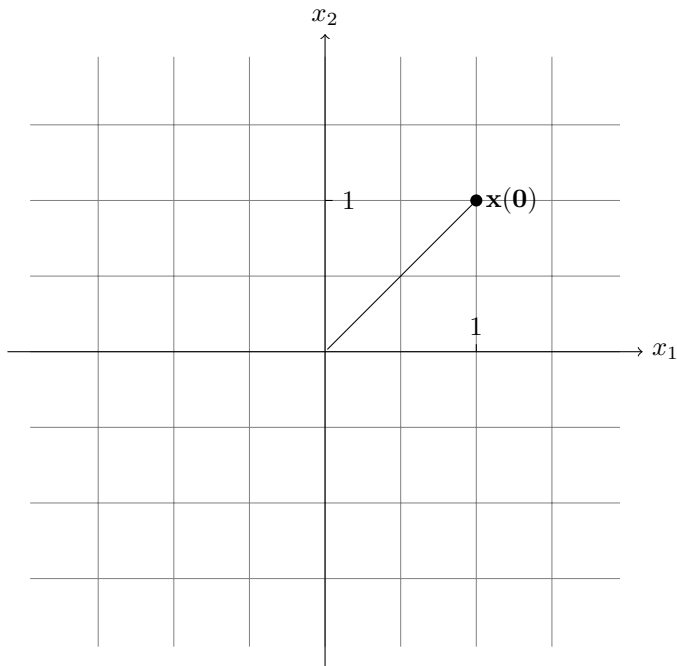


$$\dot{x}_1 = -\pi x_1, \quad x_1(0) = 1$$

$$\dot{x}_2 = -\pi x_2, \quad x_2(0) = 1$$

offensichtliche Lösung:

$$x_1(t) = x_2(t) = \exp(-\pi t)$$



Aufgabe 3 .

a) .

Die Ausgangsfolge (u_k) erhält man durch Faltung der Eingangsfolge (y_k) mit der Impulsantwort (g_k) ($(y_k) = (u_k) * (g_k)$). Nun kann man an der Ausgangsfolge erkennen, dass die Eingangsfolge verzögert und gedämpft wird. Also muss die Impulsantwort bei $k = 0$ $g_0 = 0$ sein und bei $k = 1$ einen Wert $g_1 < 1$ haben. Mittels $3g_1 = 1,5$ lässt sich dieser Wert zu $g_1 = \frac{1}{2}$ ermitteln. Der dritte Wert der Ausgangsfolge $y_3 = -\frac{1}{4}$ ist jedoch ungleich $u_2g_1 = -1$. Daraus ergibt sich, dass es noch einen weiteren Verzögerungsterm bei $k = 2$ geben muss, der sich über $u_2g_1 + u_1g_2 = -\frac{1}{4}$ zu $g_2 = \frac{1}{4}$ ermitteln lässt. Weiters sieht man an $u_3g_1 + u_2g_2 = 0 = y_3$ und $u_3g_2 = \frac{1}{4}$ dass es keine weiteren Überlagerungen mehr gibt. Die Impulsantwort muss also die Form $(g_k) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \dots)$ haben, was Abbildung 5. (ii) entspricht.

b) .

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & : k = 0 \\ 0 & : k \neq 0 \end{cases}$$

$$g_k = \frac{1}{2}\delta_{k-1} + \frac{1}{4}\delta_{k-2}$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{z^2} = \frac{2z + 1}{4z^2}$$

c) .

BIBO-Stabilität anhand der Impulsantwort (Satz 6.5, S. 146)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < \infty \Rightarrow \text{BIBO-Stabil}$$

BIBO-Stabilität anhand der Übertragungsfunktion (Satz 6.6, S. 147)

$$4z^2 = 0 \Rightarrow z_{p1,2} = 0 < 1 \Rightarrow \text{BIBO-Stabil}$$

d) .

Allgemein: $(y_k) = (A_0 |G(e^{I\omega_0 T_a})| \sin(\omega_0 T_a k + \varphi_0 + \arg(G(e^{I\omega_0 T_a}))))$ (6.77), s: 147

$$u_k = 2 \sin(k \frac{\pi}{2}) - 1^k \quad -1^k \text{ als Sinus mit Frequenz } \omega_0 = 0 \text{ behandeln.}$$

$$(y_k) = \left(2 |G(e^{I \frac{\pi}{2}})| \sin(k \frac{\pi}{2} + \arg(G(e^{I \frac{\pi}{2}}))) - |G(e^{I0})| 1^k \right)$$

$$\text{für } \omega_0 T_a = \frac{\pi}{2} :$$

$$G(e^{I\omega_0 T_a}) = G(I) = -\frac{2I+1}{4} = -\frac{1}{4} - I \frac{1}{2}$$

$$|G(e^{I\omega_0 T_a})| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\arg(G(e^{I\omega_0 T_a})) = \arctan(2) - \pi$$

$$\text{für } \omega_0 T_a = 0 :$$

$$G(e^{I0}) = G(1) = \frac{3}{4}$$

$$(y_k) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \sin(k \frac{\pi}{2} + \arctan(2 - \pi)) - \frac{3}{4} 1^k \right)$$

e) .

Die Abtastung entspricht einer Abbildung $z = \exp(sT_a)$.**Aufgabe 4 .**

$$G(s) = \frac{0,5}{s \left(\frac{s}{2} + 1 \right)}$$

a) .

Was versteht man unter einer phasenminimalen Übertragungsfunktion?

S. 73, **Def. 3.6.**: Pol-, Nullstellen in der linken Halbebene.Ist $G(s)$ phasenminimal?

$$\text{Pole: } 0 = s \left(\frac{s}{2} + 1 \right) \Rightarrow s_{p1} = 0$$

$$0 = \frac{s}{2} + 1 \Rightarrow s_{p2} = -2$$

Nullstellen: Keine

 $s_{p1} = 0$ liegt nicht in der linken Halbebene \Rightarrow nicht phasenminimal

b) .

$$G(I\omega) = \frac{0,5}{I\omega \left(\frac{I\omega}{2} + 1\right)} = \frac{1}{2} \left(I\omega - \frac{\omega^2}{2}\right)^{-1}$$

$$|G(I\omega)|_{\text{dB}} = \underbrace{-40\text{dB} \log(\sqrt{2})}_{-6,0206\text{dB}} - 20\text{dB} \log\left(\sqrt{\left[\left(-\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^2 + \omega^2}\right)$$

$$\omega_k = \sqrt{2}, \quad \xi_k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|G(I\omega)|_{\text{dB}} = -6,0206\text{dB} - 20\text{dB} \log\left(\sqrt{\left[\left(-\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^2 + \left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) =$$

$$= -6,0206\text{dB} - \begin{cases} 20\text{dB} \log(\omega) : & \frac{\omega}{\omega_k} \ll 1 \\ 20\text{dB} \log(\sqrt{3}) : & \frac{\omega}{\omega_k} = 1 \\ 40\text{dB} \log\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right) : & \frac{\omega}{\omega_k} \gg 1 \end{cases}$$

$$\arg(G(I\omega)) = \underbrace{\arg\left(\frac{1}{2}\right)}_0 - \arg\left(I\omega - \left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2\right) =$$

$$= -\arctan\left(\frac{\omega}{-\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) = -\arctan\left(-\frac{2}{\omega}\right) = \begin{cases} -90^\circ : & \frac{\omega}{\omega_k} \ll 1 \\ -\arctan(-\sqrt{2}) : & \frac{\omega}{\omega_k} = 1 \\ -180^\circ : & \frac{\omega}{\omega_k} \gg 1 \end{cases}$$

c) .

$$\omega_c t_r \approx 1,5$$

$$\Rightarrow \omega_c = 1,5\text{s}^{-1}$$

$$\Phi_+ \approx 70^\circ$$

$$\Rightarrow \Phi = 60^\circ$$

i)

$$d = 0$$

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{V_R}{2} \frac{1 + \frac{s}{2}}{s(\frac{s}{2} + 1)(1 + sT_R)} = \frac{V_R}{2} \frac{1}{s(1 + sT_R)}$$

$$\Phi - \pi = \arg(L(I\omega_c)) = \arg\left(\frac{V_R}{2} \frac{1}{I\omega_c(1 + I\omega_c T_R)}\right) = \underbrace{\arg\left(\frac{V_R}{2}\right)}_0 - \underbrace{\arg(I\omega_c)}_{90^\circ} - \arg(1 + I\omega_c T_R) =$$

$$= -90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega_c T_R}{1}\right) = 60^\circ - 180^\circ$$

$$\Rightarrow T_R = \frac{\tan(30^\circ)}{\omega_c} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} 0\text{dB} &= |L(I\omega_c)|_{\text{dB}} = 20\text{dB} \log\left(\left|\frac{V_R}{2} \frac{1}{I\omega_c(1 + I\omega_c T_R)}\right|\right) = \\ &= \log\left(\frac{V_R}{2}\right) - \log(|I\omega_c - \omega_c^2 T_R|) = \log\left(\frac{V_R}{2}\right) - \log(\sqrt{\omega_c^2 - (\omega_c^2 T_R)^2}) \\ \Rightarrow \frac{V_R}{2} &= \sqrt{\omega_c^2 - (\omega_c^2 T_R)^2} \\ \Rightarrow V_R &= 2\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

ii)

Siehe Seite 109

(A) Verstärkung V und Totzeit T_t positiv.

$$V = 2\sqrt{3} \geq 0, \quad T_t = 0 \geq 0$$

(B) $\text{grad}(n_L(s)) + \rho > \text{grad}(z_L(s))$

$$1 + 1 = 2 > 0$$

(C) $n_L(s)$ -Hurwitzpolynom und $\rho \in \{0, 1, 2\}$.

$\text{grad}(n_L(s)) = 1 \leq 2 \Rightarrow$ Hinreichende Bedingung: Alle Koeffizienten vorhanden und Vorzeichen gleich.

Koeffizienten: 1, T_R vorhanden und gleiches Vorzeichen

$$\rho = 1 \in \{0, 1, 2\}$$

(D) Bodediagramm schneidet die 0dB-Linie nur einmal.

Ja, da man $L(I\omega)$ in Punkt i so dimensioniert hat und $\text{grad}(z_L(s)) = 0$ ist(E) Die Ortskurve von $L(I\omega)$ umkreist den Nullpunkt höchstens einmal vollständig.

siehe Punkt iii

iii)

$$L(I\omega) = \frac{\sqrt{3}}{I\omega(1+I\omega T_R)} = \frac{\sqrt{3}}{I\omega - \omega^2 T_R} \underbrace{\frac{-\omega^2 T_R - I\omega}{-\omega^2 T_R - I\omega}}_{\text{c.c.}} = -\frac{\omega^2 \frac{2}{3} + I\omega\sqrt{3}}{\omega^2 + \omega^4 \frac{4}{27}} =$$

$$= -\frac{\cancel{\omega^2} \frac{2}{3}}{\cancel{\omega^2} (\omega^2 \frac{4}{27} + 1)} + I \frac{-\sqrt{3}\cancel{\omega}}{\cancel{\omega} (\omega^3 \frac{4}{27} + \omega)}$$

$$\text{Re}(L(I\omega)) = -\frac{2}{\omega^2 \frac{4}{9} + 3}$$

$$\text{Im}(L(I\omega)) = -\frac{\sqrt{3}}{\omega (\omega^2 \frac{4}{27} + 1)}$$

$$\omega = 1$$

$$\text{Re}(L(I)) = -\frac{2}{\frac{4+27}{9}} = -\frac{18}{31}$$

$$\text{Im}(L(I)) = -\frac{\sqrt{3}}{\frac{4+27}{27}} = -\frac{27\sqrt{3}}{31}$$

$$\omega = \sqrt{3}$$

$$\text{Re}(L(I\sqrt{3})) = -\frac{2}{\frac{4}{3} + \frac{9}{3}} = -\frac{6}{13}$$

$$\text{Im}(L(I\sqrt{3})) = -\frac{1}{\frac{4}{9} + \frac{9}{9}} = -\frac{9}{13}$$

$$\omega \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \text{Re}(L(I\omega)) \rightarrow -0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \text{Im}(L(I\omega)) \rightarrow -0$$

$$\omega \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} \text{Re}(L(I\omega)) \rightarrow -0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} \text{Im}(L(I\omega)) \rightarrow +0$$

$$\omega \rightarrow +0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \text{Re}(L(I\omega)) = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \text{Im}(L(I\omega)) \rightarrow -\infty$$

$$\begin{aligned}\omega &\rightarrow -0 \\ \lim_{\omega \rightarrow -0} \operatorname{Re}(L(I\omega)) &= -\frac{2}{3} \\ \lim_{\omega \rightarrow -0} \operatorname{Im}(L(I\omega)) &\rightarrow +\infty\end{aligned}$$

2 Klausur vom 4. April 2008

Aufgabe 1 .

a) .

i)

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= \alpha(u(t) + v(t) - w(t) + y(t)) = \alpha(u(t) + v(t) - w(t) + \sin(v(t))) \\ \dot{v}(t) &= w(t) - v(t) \\ y(t) &= \sin(v(t))\end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} w(t) - v(t) \\ \alpha(u(t) + v(t) - w(t) + \sin(v(t))) \end{bmatrix}$$

$$y = g(\mathbf{x}, u) = \sin(v(t))$$

ii)

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 0)$$

$$0 = w(t) - v(t) \Rightarrow w(t) = v(t)$$

$$0 = \alpha \left(\underbrace{u(t)}_0 + \underbrace{v(t) - w(t)}_0 + \sin(v(t)) \right) \Rightarrow v(t) = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow w(t) = v(t) = \pi n$$

iii)

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}, u = 0$$

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}, u=0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \alpha(1 + \cos(v(t)))|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}, u=0} & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2\alpha & -\alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}, u=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}, u) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}, u=0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d = \left. \frac{\partial}{\partial u} g(\mathbf{x}, u) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}, u=0} = 0$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2\alpha & -\alpha \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = [1 \ 0] \Delta \mathbf{x}$$

Die Ruhelage ist global asymptotisch stabil, wenn die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} einen negativen Realteil besitzen. (Satz 3.4. S.47)

$$\det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}] = (-1 - \lambda)(-\alpha - \lambda) - 2\alpha = \lambda^2 + (1 + \alpha)\lambda - \alpha = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1 + \alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 + \alpha)^2}{4} + \alpha} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \alpha}{2} > \pm \sqrt{\frac{(1 + \alpha)^2}{4} + \alpha}$$

$$\Rightarrow 1 > \pm \sqrt{\left(\frac{(1 + \alpha)^2}{4} + \alpha\right) \frac{4}{(1 + \alpha)^2}} = \pm \sqrt{\frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2} + 1}$$

$$\Rightarrow 0 > \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}$$

$$\Rightarrow \alpha < 0, \alpha \neq -1$$

b) .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u_k$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

i)

$$\mathbf{x}_{k=1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_0} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u_0 = \begin{bmatrix} 4 + u_0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{k=2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 + u_0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k=1}} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} 4 + u_0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u_0 + u_1 \\ -1 - \frac{1}{4}u_0 - \frac{1}{2}u_1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u_0 + u_1 \Rightarrow -4 - \frac{1}{2}u_0 = u_1$$

$$1 = -1 - \frac{1}{4}u_0 - \frac{1}{2}u_1 \Rightarrow 2 + \frac{1}{2}u_1 = \cancel{2} - \frac{1}{4}u_0 = -\frac{1}{4}u_0$$

$$\Rightarrow u_0 = \alpha, u_1 = -4$$

ii)

$$\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u_0 + u_1 \Rightarrow -3 - \frac{1}{2}u_0 = u_1$$

$$2 + \frac{1}{2}u_1 = -\frac{1}{4}u_0 \Rightarrow 2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4}u_0 = -\frac{1}{4}u_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \text{Widerspruch! Nicht erreichbar!}$$

iii) TODO...

Aufgabe 2 .

a) .

$$t_r = 1, \quad = 10\%, \quad e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$$

$$\omega_c t_r \approx 1,5 \Rightarrow \omega_c = 1 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\Phi = 60^\circ$$

Wegen der Regelabweichung e_∞ brauchen wir integrales Verhalten beim Regler, daher wählen wir den PI-Regler.

$$R(s) = \frac{V_I}{s}(1 + sT_I)$$

$$R(I\omega_c) = R(I) = -IV_I(1 + IT_I) = V_I(T_I - I)$$

Um eine Phasenreserve Φ von 60° zu erreichen, müssen wir $G(s)$ um 60° bei $\omega = \omega_c$ absenken

$$\arg(R(I\omega_c)) = \arctan\left(-\frac{1}{T_I}\right) = -60^\circ$$

$$\Rightarrow \tan(-60^\circ) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} = -\frac{1}{T_I} \Rightarrow T_I = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Um einen Nulldurchgang bei ω_c zu haben, müssen wir mit dem Regler die Verstärkung bei $\omega = \omega_c$ um ungefähr 6dB absenken

$$|R(I\omega_c)|_{\text{dB}} = 20 \text{ dB} \log(|V_I(T_I - I)|) = -6 \text{ dB} \approx 20 \text{ dB} \log(2^{-1})$$

$$V_I \sqrt{T_I^2 + 1} = V_I \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_I = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

b) .

$$R(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 1}$$

i)

$$e(t) = t\sigma(t) \Leftrightarrow \hat{e}(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$u_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{u}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1/s^2}{s^2 + 2s + 1} = 1$$

$$y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{y}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{u}(s)G(s) = \underbrace{u_\infty}_1 \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

Aus Abbildung 3 ablesen:

$$\text{Phase: } \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(I\omega) \rightarrow 0$$

$$\text{Verstärkung: } \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(I\omega) \approx 25 \text{ dB} = 10^{\frac{25}{20}}$$

$$\Rightarrow y_\infty = 10^{\frac{25}{20}} = 25 \text{ dB}$$

ii)

$$e(t) = 5 \sin(t), \quad \omega_0 = 1, \quad A_0 = 5$$

$$|R(I\omega_0)| = |R(I)| = \left| \frac{I}{j^2 + 2j + 1} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\arg(R(I)) = 0$$

$$u(t) = A_0 |R(I)| \sin(\omega_0 t + \arg(R(I))) = \frac{5}{2} \sin(t)$$

$$y(t) = |G(I\omega_0)| \frac{5}{2} \sin(\omega_0 t + \arg(G(I\omega_0))) = 10^{\frac{6}{20}} \frac{5}{2} \sin(t - 48^\circ)$$

Aufgabe 3 .

a) .

$$\text{s-Bereich: } G(s) = \frac{a(s)}{b(s)}$$

$$\text{grad}(a(s)) \leq \text{grad}(b(s))$$

$$\text{z-Bereich: } G(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$$

$$\text{grad}(a(z)) \leq \text{grad}(b(z))$$

$$\text{q-Bereich: } \lim_{q \rightarrow \Omega_0} |G^\#(q)| < \infty$$

b) .

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u$$

i)

Nicht asymptotisch stabil, da die Eigenwerte von \mathbf{A} nicht kleiner als 0 sind.

ii)

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 = 0$$

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}(t) = \exp(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}t)$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{V}^{-1}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{V}\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{V}\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{z}_0 = 0$$

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\tilde{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{z}_0 \Rightarrow 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{z}_0$$

q.e.d.

iii)

Ja

iv)

$$\Phi(t) = 2\tilde{\Phi}(t) = 2 \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

v)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Phi(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}^k k \frac{t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \mathbf{A} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \mathbf{A} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} = \mathbf{A} \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{A}\Phi(t) \end{aligned}$$

q.e.d.

vi)

$$u(t) = \sigma(t-1) - \sigma(t-2), \quad \mathbf{x}(t_1 = 3s) = 0$$

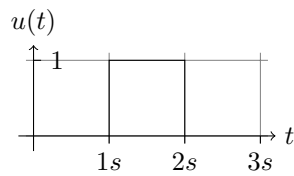
$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \begin{bmatrix} u(\tau) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau$$

 $t = 3s$:

$$\mathbf{x}(t = 3s) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 4 .

a) .

$$\begin{aligned}
 y_k &= 3x_k && \Leftrightarrow y_z(z) = 3x_z(z) \\
 x_{k+1} &= -\frac{1}{2}x_k + u_k \\
 x_k &= -\frac{1}{2}x_{k-1} + u_{k-1} && \Leftrightarrow x_z(z) = -\frac{1}{2}z^{-1}x_z(z) + z^{-1}u_z(z) \\
 u_k &= k_1x_k + k_2\xi_k && \Leftrightarrow u_z(z) = k_1x_z(z) + k_2\xi_z(z) \\
 \xi_{k+1} &= a\xi_k + k_2e_k \\
 \xi_k &= a\xi_{k-1} + k_2e_{k-1} && \Leftrightarrow \xi_z(z) = az^{-1}\xi_z(z) + 2z^{-1}e_z(z) \\
 e_k &= r_k - y_k && \Leftrightarrow e_z(z) = r_z(z) - y_z(z) = r_s \frac{z}{z-1} - y_z(z) \\
 r_k &= r_s(1^k) && \Leftrightarrow r_z(z) = r_s \frac{z}{z-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xi_z(z) &= \frac{2z^{-1} \left(r_s \frac{z}{z-1} - y_z(z) \right)}{1 - az^{-1}} \\
 u_z(z) &= k_1x_z(z) + \frac{2k_2z^{-1} \left(r_s \frac{z}{z-1} - y_z(z) \right)}{1 - az^{-1}} \\
 x_z(z) &= \frac{2k_2z^{-2} \left(r_s \frac{z}{z-1} - y_z(z) \right)}{(1 - az^{-1}) \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} - z^{-1}k_1 \right)} \\
 y_z(z) &= \frac{6k_2z^{-2} \left(r_s \frac{z}{z-1} - y_z(z) \right)}{(1 - az^{-1}) \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} - z^{-1}k_1 \right)} = \\
 &= \frac{6k_2z^{-2} r_s \frac{z}{z-1}}{(1 - az^{-1}) \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} - z^{-1}k_1 \right)} - \frac{6k_2z^{-2}}{(1 - az^{-1}) \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} - z^{-1}k_1 \right)} y_z(z) \\
 y_z(z) &= \frac{6k_2z^{-2} \left(r_s \frac{z}{z-1} \right)}{(1 - az^{-1}) \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} - z^{-1}k_1 \right)} \frac{1}{1 + \frac{6k_2z^{-2}}{(1 - az^{-1}) \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} - z^{-1}k_1 \right)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} y_k &= r_s = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)y_z(z) = \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \cancel{(z-1)} \frac{6k_2z^{-2} r_s \cancel{\frac{z}{z-1}}}{(1 - az^{-1}) \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} - z^{-1}k_1 \right)} \frac{1}{1 + \frac{6k_2z^{-2}}{(1 - az^{-1}) \left(1 + \frac{1}{2}z^{-1} - z^{-1}k_1 \right)}} = \\
 &= \underbrace{\frac{6k_2z^{-2}}{(1-a) \left(1 + \frac{1}{2} - k_1 \right)}}_1 \frac{1}{1 + \frac{6k_2}{(1-a) \left(1 + \frac{1}{2} - k_1 \right)}} r_s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{6k_2}{\left(\frac{1}{2} - k_1\right)(1-a) + 6k_2} \\
 \cancel{6k_2} &= \left(\frac{1}{2} - k_1\right)(1-a) + \cancel{6k_2} \\
 0 &= \left(\frac{1}{2} - k_1\right)(1-a)a \qquad \qquad \qquad = 1
 \end{aligned}$$

b) .

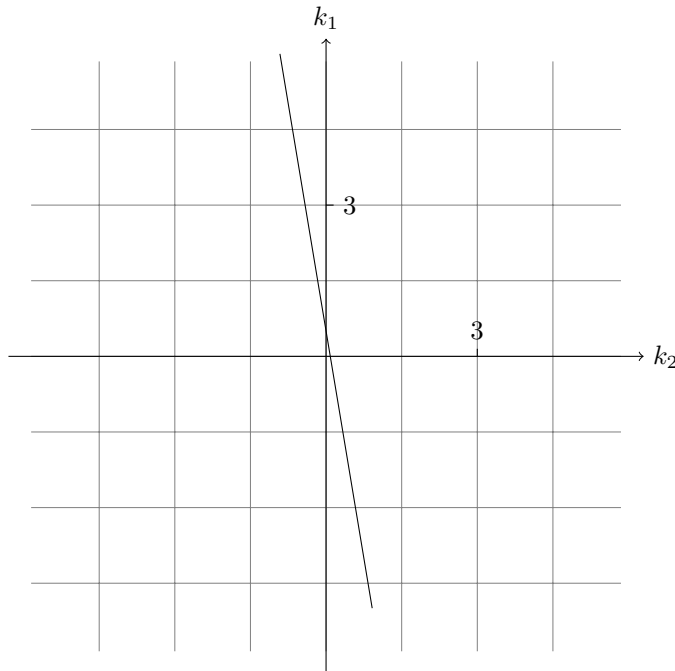
stationärer Zustand: (x_s, ξ_s)

$$(r_k) = (r_s), \quad k_1 \neq 0, \quad k_2 \neq 0$$

$$\begin{aligned}
 x_s &= -\frac{1}{2}x_s + u_k \Rightarrow x_s = \frac{2}{3}u_k \\
 \xi_s &= a\xi_s + 2e_k \Rightarrow 0 = e_k = (r_s - 3x_s) \\
 \Rightarrow x_s &= \frac{r_s}{3} \\
 u_s &= k_1x_s + k_2\xi_s \\
 x_s &= \frac{2}{3}(k_1x_s + k_2\xi_s) \\
 \Rightarrow \xi_s &= \frac{x_s(1 - \frac{2}{3}k_1)}{k_2} = \frac{r_s(1 - \frac{2}{3}k_1)}{3k_2}
 \end{aligned}$$

c) .

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= -\frac{1}{2}x_k + u_k \\
u_k &= k_1x_k + k_2\xi_k \\
\Rightarrow x_{k+1} &= \left(k_1 - \frac{1}{2}\right)x_k + k_2\xi_k \\
\xi_{k+1} &= a\xi_k + 2e_k = a\xi_k + 2r_k - 2y_k = \underbrace{a}_1 \xi_k - 6x_k + 2r_k \\
\mathbf{x}_k &= [x_k, \xi_k]^T \\
\mathbf{x}_{k+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 - \frac{1}{2} & k_2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\Gamma} r_k \\
y_k &= [3, 0] \mathbf{x}_k \\
\det(\Phi - \lambda \mathbf{1}) &= \left(k_1 - \frac{1}{2} - \lambda\right)(1 - \lambda) + 6k_2 = \\
&= \lambda^2 - \left(\frac{1}{2} + k_1\right)\lambda + \left(k_1 - \frac{1}{2} + 6k_2\right) \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{1 + 2k_1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + 2k_1}{4}\right)^2 - k_1 - 6k_2 + \frac{1}{2}} \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \left(\frac{1 + 2k_1}{4}\right)^2 &= \left(\frac{1 + 2k_1}{4}\right)^2 - k_1 - 6k_2 + \frac{1}{2} \\
\Rightarrow k_1 &= -6k_2 + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$



d) .

Da ein Dead-Beat-Regler entworfen wurde (Eigenwerte bei 0), braucht das System n gleich 2 Schritte.

e) .

Separationstheorem:

Das Separationsprinzip beantwortet die Frage, wo die Eigenwerte des geschlossenen Kreises liegen, wenn man Zustandsregler und Beobachter getrennt entwirft. (S. 208 Kapitel 8.4)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{e}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma \mathbf{k}^T & \Gamma \mathbf{k}^T \\ \mathbf{0} & \Phi + \hat{\mathbf{k}} \mathbf{c}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r_k$$

$$y_k = [\mathbf{c}^T \quad \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(z\mathbf{1} - \Phi) = \det(z\mathbf{1} - (\Phi + \Gamma \mathbf{k}^T + \Phi + \hat{\mathbf{k}} \mathbf{c}^T)) \det(z\mathbf{1} - (\Phi + \hat{\mathbf{k}} \mathbf{c}^T))$$

q.e.d.

3 Klausur vom 20. Juni 2008

Aufgabe 1 .

ACHTUNG: Fehler in der Ableitung! Wird (hoffentlich) noch korrigiert!

a) .

$$\mathbf{x} = [i_L, u_C]^T$$

$$u_L = \frac{d}{dt} (L(i_L)i_L) = L(i_L)\dot{i}_L + i_L \frac{d}{dt} L(i_L) = L(i_L)\dot{i}_L + 2L_1 i_L^2$$

$$\Rightarrow \dot{i}_L = \frac{1}{L(i_L)} (u_L - 2L_1 i_L^2)$$

$$i_C = \frac{d}{dt} (C u_C) = C \dot{u}_C$$

$$\Rightarrow \dot{u}_C = \frac{i_C}{C}$$

$$u_L = u_s - i_1 R \quad i_1 = i_L - i_2 \Rightarrow u_L = u_s - i_L R + i_2 R$$

$$u_C + i_2 R = i_1 R = i_L R - i_2 R \Rightarrow i_2 = \frac{i_L R - u_C}{2R}$$

$$\Rightarrow u_L = u_s + \frac{1}{2} i_L R - \frac{1}{2} u_C$$

$$\Rightarrow \dot{i}_L = \frac{1}{L(i_L)} \left(u_s + \frac{1}{2} i_L R - \frac{1}{2} u_C - 2L_1 i_L^2 \right)$$

$$i_C = i_2 + i_3 = \frac{u_s - u_C}{R} + i_2 = \frac{1}{2R} (2u_s - 3u_C + i_L R)$$

$$\dot{u}_C = \frac{1}{2RC} (2u_s - 3u_C + i_L R)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{u}_C \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u_s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L(i_L)} (u_s + \frac{1}{2}i_L R - \frac{1}{2}u_C - 2L_1 i_L^2) \\ \frac{1}{2RC} (2u_s - 3u_C + i_L R) \end{bmatrix}$$

$$y = g(\mathbf{x}, u) = \underbrace{[0, \quad 1]}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}$$

b) .

$$u = u_R = 0$$

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u_s)$$

$$\Rightarrow u_C = \frac{R}{3} i_L$$

$$i_L \left(2L_1 i_L + \frac{2}{3} R \right) = 0$$

$$i_{L,R1} = 0 \quad u_{C,R1} = 0$$

$$i_{L,R2} = -\frac{R}{3L_1} \quad u_{C,R1} = -\frac{R^2}{9L_1}$$

c) .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial i_L} f_{i_L} & \frac{\partial}{\partial u_C} f_{i_L} \\ \frac{\partial}{\partial i_L} f_{u_C} & \frac{\partial}{\partial u_C} f_{u_C} \end{bmatrix} \Big|_{u=u_R, \mathbf{x}=\mathbf{x}_R} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2L_1 i_L}{L^2(i_L)} (u_s + \frac{1}{2}i_L R - \frac{1}{2}u_C - 2L_1 i_L^2) - \frac{1}{L(i_L)} (4L_1 i_L + \frac{R}{2}) & -\frac{1}{2L(i_L)} \\ \frac{1}{2C} & -\frac{3}{2RC} \end{bmatrix} \Big|_{u=u_R, \mathbf{x}=\mathbf{x}_R}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L(i_L)} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \Big|_{u=u_R, \mathbf{x}=\mathbf{x}_R}$$

Aufgabe 2 .

$$G(s) = \frac{1}{s(0.5s + 1)}$$

a) .

$$\begin{aligned}
|G(I\omega)|_{\text{dB}} &= -20\text{dB} \log(|I\omega|) - 20\text{dB} \log\left(\left|\frac{1}{2}I\omega + 1\right|\right) = \\
&= -20\text{dB} \log \omega - 20\text{dB} \log\left(\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1}\right) = \\
&= \begin{cases} -20\text{dB} \log(\omega) : & \omega \ll 2 \\ -20\text{dB} \log(\omega) - 3.0103\text{dB} : & \omega = 2 \\ -40\text{dB} \log(\omega) : & \omega \gg 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\arg(G(I\omega)) &= -\arg(I\omega) - \arg\left(I\frac{1}{2}\omega + 1\right) = \\
&= \begin{cases} -90^\circ : & \omega \ll 2 \\ -135^\circ : & \omega = 2 \\ -180^\circ : & \omega \gg 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

b) .

$$\begin{aligned}
t_r = 1.5 &\Rightarrow \omega_C = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\
= 30\% &\Rightarrow \Phi = 40^\circ \\
e_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)|_{r(t)=\sigma(t)} = 0
\end{aligned}$$

Da integrierendes Verhalten in der Strecke, $e_\infty = 0$ bereits erfüllt $L(I\omega)$... Offene Regelkreis $R(I\omega)$... Geschlossene Regelkreis

$$\begin{aligned}
|L(I\omega_C)|_{\text{dB}} = 0 &= -20\text{dB} \log\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) + 20\text{dB} \log(|R(I)|) \\
\Rightarrow |R(I\omega_C)| &= \frac{\sqrt{5}}{2} = \Delta a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\arg(L(I\omega_C)) = -140^\circ &= -90^\circ - 25^\circ + \arg(R(I)) = -115^\circ + \arg(R(I)) \\
\Rightarrow \arg(R(I)) &= -25^\circ = \Delta\varphi
\end{aligned}$$

Lag-Entwurf:

$$\begin{aligned}
R_{\text{Lag}}(s) &= \frac{1 + sT}{1 + s\eta T}, \eta > 1 \\
T &= \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{1 + \tan^2(-25^\circ)} - 1}{\omega_C \tan(-25^\circ)} = \frac{\sqrt{\frac{25}{16}} - 1}{-0.5} = -\frac{1}{2} \\
\eta &= \frac{\omega_c T - \tan(-25^\circ)}{\omega_C T (1 + \omega_C T \tan(-25^\circ))} = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow R(s) = 1 - \frac{1}{2}s$$

Um $R(s)$ zu realisieren muss man noch einen Realisierungsterm $R'(s) = \frac{1}{s+T_R}$ hinzunehmen, der schnell abklingt (und somit den Regler nicht wesentlich beeinflusst).

c) .

$$d(t) = 0.5 \sin(4t) + 0.1\sigma(t), \quad r(t) = 0$$

$$T_{d,y} = \frac{G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{1}{\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s + 1}$$

$$|T_{d,y}(I\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4}}}$$

$$\arg(T_{d,y}(I\omega)) = -\arctan\left(-\frac{\frac{\omega}{2}}{1 - \frac{1}{2}\omega^2}\right)$$

$$y(t) = \frac{|T_{d,y}(I4)|}{2} \sin(4t + \arg(T_{d,y}(I4))) + 0.1\sigma(t)$$

$$\text{abs}T_{d,y}(I4) = \frac{1}{\sqrt{53}}$$

$$\arg(T_{d,y}(I4)) = \pi - \arctan\left(\frac{2}{7}\right)$$

Aufgabe 3 .

a) .

1. Beobachtbarkeitsmatrix:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{\Phi}^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = n$$

2. PBH-Rang-Test

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ s\mathbf{1} - \mathbf{A} \end{bmatrix} = n$$

3. PBH-Eigenvektortest

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{v}_i \neq 0$$

b) .

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{T}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad \hat{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \Rightarrow \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}_i = \lambda_i \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}_i}_{\mathbf{u}_i}$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{v}_i \neq 0 \Rightarrow \mathbf{c}^T \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}_i}_{\mathbf{u}_i} \neq 0$$

q.e.d.

c) .

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = (2 - \lambda)(4 - \lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 \neq 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 5} = 3 \pm 2$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 5$$

$$\mathbf{w}_1^T \mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{w}_1^T = \mathbf{w}_1^T$$

$$[w_1, w_2] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = [w_1, w_2] = [2w_1 + w_2, 3w_1 + 4w_2]$$

$$2w_1 + w_2 = w_1 \Rightarrow w_2 = -w_1$$

$$3w_1 + 4w_2 = w_2 \Rightarrow w_2 = -w_1$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_1^T \mathbf{b} = [\alpha, -\alpha] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

\(\Rightarrow\) System ist nicht vollständig erreichbar!

d) .

$$(\mathbf{w}_i^T \mathbf{A})^T = (\lambda_i \mathbf{w}_i^T)^T = \mathbf{A}^T \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i \quad \text{q.e.d.}$$

e) .

$$y_{k+3} + 3 \sin(y_{k+2}) + 5\sqrt{u_k} = \frac{\pi}{10} \exp y_{k+1}$$

Substituieren:

$$y_k = w_k$$

$$y_{k+1} = v_k$$

$$y_{k+2} = z_k$$

$$w_{k+1} = y_{k+1} = v_k$$

$$v_{k+1} = y_{k+2} = z_k$$

$$z_{k+1} = y_{k+3} = \frac{\pi}{10} \exp y_{k+1} - 3 \sin(y_{k+2}) - 5\sqrt{u_k}$$

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \begin{bmatrix} v_k \\ z_k \\ \frac{\pi}{10} \exp y_{k+1} - 3 \sin(y_{k+2}) - 5\sqrt{u_k} \end{bmatrix}$$

f) .

Nyquist-Kriterium:

(A) Erfüllt, da der Punkt für $\omega = 0$ im positiven liegt.(B) Erfüllen $L_1(I\omega)$, $L_2(I\omega)$, da sie für $\omega \rightarrow \infty$ gegen 0 gehen.

(C) Erfüllen ebenfalls beide (siehe Angabe). (D) Erfüllen ebenfalls beide.

(E) Erfüllen ebenfalls beide.

$L_1(I\omega)$ hat beim schneiden der 0-dB-Linie bzw. des Einheitskreises einen Phasenwinkel von ungefähr $\arg(L_1(I\omega_c)) \approx -225^\circ$. Daher ist die Phasenreserve $\Phi = \arg(L_1(I\omega_c)) + \pi \approx -45^\circ$ kleiner als 0 und der geschlossene Regelkreis nicht BIBO-Stabil.

$L_2(I\omega)$ hat beim schneiden der 0-dB-Linie bzw. des Einheitskreises einen Phasenwinkel von ungefähr $\arg(L_2(I\omega_c)) \approx -90^\circ$. Daher ist die Phasenreserve $\Phi = \arg(L_2(I\omega_c)) + \pi \approx 90^\circ$ größer als 0 und der geschlossene Regelkreis BIBO-Stabil.

Aufgabe 4 .

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ -8 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Gamma} u_k$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow n = 3$$

a) .

$$\mathcal{R}(\Phi, \Gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow nicht regulär, da 0-Zeile \Rightarrow nicht vollständig erreichbar

4 Klausur vom 10. Oktober 2008

Aufgabe 1 .

a) .

Eingang: u_L

$$i_L R_L + \frac{d}{dt}(L(z)i_L) = i_L R_L + \dot{i}_L L(z) + i_L \frac{d}{dz} L(z) = i_L R_L + \dot{i}_L L(z) + i_L N^2 \frac{\mu_0 A}{z^2} = u_L$$

$$\Rightarrow \dot{i}_L = \frac{u_L - i_L(R_L + N^2 \frac{\mu_0 A}{z^2})}{L(z)}$$

$$F_G - F_A = m_B \ddot{z} = m_B g - \frac{1}{2} \mu_0 A \frac{N i_L^2}{z}$$

$$\dot{z} = v$$

$$\dot{v} = g - \frac{\mu_0 A N i_L^2}{2z m_B}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v \\ z \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_L - i_L(R_L + N^2 \frac{\mu_0 A}{z^2})}{L(z)} \\ g - \frac{\mu_0 A N i_L^2}{2z m_B} \\ v \end{bmatrix}$$

b) .

TODO...

Aufgabe 2 .

a) .

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma u_k, \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0$$

$$y_k = \mathbf{c}^T \mathbf{x}_k$$

trivial:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma u_k, \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0$$

$$\hat{y}_k = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k + du_k$$

$$\mathbf{e}_{k+1} = \Phi \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$$

Wenn das System stabil ist.

vollständig:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi \hat{\mathbf{x}}_k + \Gamma u_k + \hat{\mathbf{k}}(\hat{y}_k - y_k), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0$$

$$\hat{y}_k = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}_k + du_k$$

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\Phi + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{c}^T)\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$$

Wenn das System vollständig beobachtbar ist.

b) .

$$\mathcal{O}(\mathbf{C}, \Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathcal{O}\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 + 2v_2 + 3v_3 \\ 4(v_1 + v_2 + v_3) \end{bmatrix}$$

$$v_1 = -v_2, \quad v_1 = 3v_3, \quad \frac{1}{4} = 3v_3 - 3v_3 + v_3$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\hat{p}_{g,soll}(z) = z^3 \quad (\text{Dead-Beat-Regler})$$

$$\hat{\mathbf{k}} = -\Phi^3 \hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{21}{4} \\ \frac{9}{4} \\ \frac{11}{4} \\ -\frac{11}{4} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_e = (\Phi + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} -\frac{17}{4} & -\frac{21}{4} & 2 \\ \frac{9}{4} & \frac{17}{4} & 1 \\ -\frac{7}{4} & -\frac{11}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{k+1} = \Phi_e \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{0} = \mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0$$

c) .

Das Dualitätsprinzip besagt, dass eine skalare Übertragungsfunktion $G(s)$ bzw. $G(z)$ unverändert bleibt, wenn man sie transponiert. Das primale und duale System besitzen also die gleiche Übertragungsfunktion.

Primale System:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_p &= \mathbf{A}\mathbf{x}_p + \mathbf{b}u \\ y_p &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}_p + du\end{aligned}$$

Duale System:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{A}^T \mathbf{x}_d + \mathbf{c}u \\ y_p &= \mathbf{b}^T \mathbf{x}_p + du\end{aligned}$$

d) .

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma u_k \\ y_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k\end{aligned}$$

Erweitertes System:

$$\begin{aligned}w_{k+1} &= \alpha w_k \\ \mathbf{z}_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ w_k \end{bmatrix} \\ \mathbf{z}_{k+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha \end{bmatrix} \mathbf{z}_k + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= [\mathbf{C} \quad 0] \mathbf{z}_k\end{aligned}$$

Aufgabe 3 .

a) .

(a)

$$\frac{1}{s}G(s) = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow t$$

die passende Sprungantwort ist also (2).

(c)

Schwach-Dämpfung, wie man an der großen Überhöhung beim Knick erkennen kann. Die passende Sprungantwort ist also (1).

(b)

Wegen der Verstärkung $V = 1$ ist die passende Sprungantwort (4).

(d)

Wegen der Verstärkung $V = 10$ ist die passende Sprungantwort (3).

b) .

Man kann zwei Knickpunkte erkennen (bzw. Wendepunkte im Phasendiagramm): bei 10 rad/s, bei 100 rad/s.

−20dB/Dekade bis 10 rad/s

−60dB/Dekade bis 100 rad/s

−40dB/Dekade danach.

Überschwinger bei $\omega = 10\text{rad/s}$ ist ungefähr 12dB

$$G(s) = VG_1(s)G_2(s)G_3(s)$$

$$G_1(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \arg(G_1(I\omega)) = -90^\circ, \quad |G_1(I\omega)|_{\text{dB}} = -20\text{dB} \log(\omega)$$

$$G_2(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{10^2} + 2\xi \frac{s}{10} + 1}$$

$$|G_2(I\omega)|_{\text{dB}} = -20\text{dB} \log\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{10}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{10}\right)^2}\right)$$

$$|G_2(I\omega)|_{\text{dB}} = 0\text{dB}, \quad \text{für: } \omega \ll 10$$

$$|G_2(I\omega)|_{\text{dB}} = 12\text{dB} \approx 4 \cdot 20\text{dB} \log \sqrt{2} = -40\text{dB} \log(\sqrt{2\xi_k})$$

$$G_3(s) = \frac{s}{100} + 1$$

$V = 10$ für die Verschiebung.

c) .

$$\omega \rightarrow 0 \quad |G(I\omega)|_{\text{dB}} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow |G(I\omega)| \rightarrow 1$$

\Rightarrow (c) fällt raus

$$\omega \rightarrow \infty \quad |G(I\omega)|_{\text{dB}} \rightarrow -\infty$$

$$\Rightarrow |G(I\omega)| \rightarrow 0$$

$\omega_C = 1$ Knick

$$\arg(G(I\omega)) = -90^\circ$$

\Rightarrow arg muss beim Schnitt mit dem Einheitskreis -90° betragen

\Rightarrow (b) fällt raus.

Alternativ verläuft nur (a) von 0° nach -180° .

Aufgabe 4 .

a) .

$$\text{für zeitkont. (S. 74): } g(t) = \frac{d}{dt}h(t) \\ \Rightarrow (g_k) = (\Delta h_k)$$

$$(h_k) = (0; 0,3; 0,8; 0,95; 1; 1; \dots) \\ \Rightarrow (g_k) = (0; 0,3; 0,5; 0,15; 0,05; 0; 0; \dots)$$

Polstellen im Einheitskreis \Rightarrow BIBO-Stabil

b) .

$$z_0 = -1 \\ \Rightarrow z_G(z) = z + 1$$

$$z_p = 0,2 \pm i0,2 \\ \Rightarrow z_p = \underbrace{-\frac{p}{2}}_{0,2} \pm \underbrace{\sqrt{0,04 - q}}_{\sqrt{-0,04}} \\ \Rightarrow n_G(z) = z^2 - 0,4z + 0,08$$

$$G(z) = V \frac{z + 1}{z^2 - 0,4z + 0,08}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (h_k) = 1 \\ \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1} z \cancel{1} \frac{z}{z \cancel{1}} V \frac{z + 1}{z^2 - 0,4z + 0,08} = V \frac{2}{1 - 0,4 + 0,08} = 1 \\ \Rightarrow V = \frac{0,68}{2} = 0,34$$

$$g(z) = 0,34 \frac{z + 1}{z^2 - 0,4z + 0,08}$$

c) .

$$T_a = 2$$

$$(u_k) = u(k2) = (5 \sin(\frac{\pi}{2}k) + \frac{1}{2}\sigma(k2))$$

$$\omega_0 T_a = \frac{\pi}{2}$$

$$|G(e^{j\frac{\pi}{2}})| = \left| 0,34 \frac{I+1}{-1 - I0,4 + 0,08} \right| = \dots$$

$$\arg(G(e^{j\frac{\pi}{2}})) = 135^\circ$$

$$\omega_0 T_a = 0$$

$$|G(1)| = \frac{0,68}{1,6}$$

$$\arg G(1) = 0$$

$$(y_k) = \left(5 |G(e^{j\frac{\pi}{2}})| \sin(\frac{\pi}{2}k + 135^\circ) + \frac{0,34}{1,6} \right)$$

d) .

$$G(s) = \frac{4}{s+1}$$

$$R(z) = \frac{z}{z-1+k}$$

$$\frac{z-1}{z} \mathbf{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s(s^2+1)} \right\} \Big|_{t=kT_a} \right\}$$

$$\frac{4}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s}$$

$$\Rightarrow 4 = s \underbrace{(A+B)}_0 + \underbrace{B}_4$$

$$\Rightarrow A = -4$$

$$\frac{4}{s} - \frac{4}{s+1} \Leftrightarrow 4 \frac{z}{z-1} - 4 \frac{z}{z - \exp(-\ln(2))} = 4 \frac{z}{z-1} - 4 \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$G(s) \Leftrightarrow G(z) = 4 - 4 \frac{z-1}{z - \frac{1}{2}}$$

$$R(z)G(z) = \frac{4z(z - \frac{1}{2}) - 4z(z-1)}{(z - \frac{1}{2})(z-1+k)}$$

$$T_{r,y} = \frac{R(z)G(z)}{1 + R(z)G(z)} = \frac{4z(z - \frac{1}{2}) - 4z(z-1)}{z^2 + (k - \frac{11}{2})z + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k)}$$

Jury-Verfahren

z^2	$a_{2,2} = 1$ $a_{2,0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k$	$a_{2,1} = k - \frac{11}{2}$ $a_{2,1} = k - \frac{11}{2}$	$a_{2,0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k$ $a_{2,2} = 1$ $\lambda_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k$
z^1	$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k\right)^2$ $\left(k - \frac{11}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k\right)$	$\left(k - \frac{11}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k\right)$ $1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k\right)^2$	0 0 $\lambda_n = \frac{\left(k - \frac{11}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k\right)^2}$
z^0	$\frac{\left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k\right)^2\right)^2 - \left(k - \frac{11}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k\right)^2}$		

$$a_{1,2} > 0$$

$$\begin{aligned}
 & 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k\right)^2 > 0 \\
 \Rightarrow & -\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{2}k + \frac{3}{4} > 0 \\
 \Rightarrow & k^2 - 2k - 3 < 0 \\
 \Rightarrow & k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4} \\
 \Rightarrow & -1 < k < 1
 \end{aligned}$$

$$a_{0,2} > 0$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k\right)^2\right)^2 - \left(k - \frac{11}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k\right) > 0 \\
 \Rightarrow & -\frac{3}{4}k^2 + \frac{9}{4}k + \frac{14}{4} > 0 \\
 \Rightarrow & k^2 - 3k - \frac{14}{3} < 0 \\
 \Rightarrow & k_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{41}{3}} \\
 & \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{41}{3}} > 1 \\
 & \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{41}{3}} < -1 \\
 \Rightarrow & -1 < k < 1
 \end{aligned}$$

e) .

$$\lambda_j' = \exp(\lambda_j T_a)$$

5 Klausur vom 12. Dezember 2008

Aufgabe 1 .

a) .

$$\begin{aligned} \dot{s} &= v \\ m\dot{v} &= F - dv - cs \\ A\dot{h} &= q_{in} - q_1 \\ \Rightarrow \dot{h} &= \frac{1}{A} (q_{in} - bs\sqrt{2gh}) \\ \mathbf{x} &= [s, v, h]^T \\ y = q_{out}(t) &= q_1(t-T)bs(t-T)\sqrt{2gh(t-T)} \\ \text{Totzeit: } T &= \frac{l}{\frac{d_B}{2}\omega_B} \end{aligned}$$

b) .

$$\begin{aligned} \text{Ruhelage: } q_{in,R}, F_R \\ 0 &= v_R \\ 0 &= F_R - dv_R - cs_R \\ 0 &= q_{in,R} - bs_R\sqrt{2gh_R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_R &= \frac{F_R}{c} \\ h_R &= \frac{1}{2g} \left(\frac{cq_{in,R}}{bF_R} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \mathbf{x} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, \mathbf{u}=\mathbf{u}_R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{d}{m} & 0 \\ -b\frac{\sqrt{2gh_R}}{A} & 0 & -\frac{bs_Rg}{A\sqrt{2gh_R}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \mathbf{u} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, \mathbf{u}=\mathbf{u}_R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{A} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}^T &= \left. \frac{\partial}{\partial g} \mathbf{x} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R, \mathbf{u}=\mathbf{u}_R} = [b\sqrt{2gh_r}, 0, bs_R\frac{g}{2gh_R}] \end{aligned}$$

c) .

$$G(s) = \exp(-sT)$$

Aufgabe 2 .

$$G(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{100} + \frac{s}{10}} = \frac{10}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)}$$

a) .

b) .

i)

$$\omega_C = \frac{1.5}{t_r} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Phi = 70^\circ - 25^\circ = 45^\circ$$

$$e_\infty = 0 \Rightarrow \text{Integralanteil}$$

ii)

$$\arg(G(I\omega_c)) = 0 - (\arctan(-1) + \pi) = -135^\circ$$

\Rightarrow Keine Phasenhebung nötig!

$$|G(I\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Regler: } R(s) = V$$

$$V |G(I\omega_c)| \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow V = \sqrt{2}$$

c) .

$$d(t) = \frac{1}{4}\sigma(t) + \frac{1}{2}\sin(5t)$$

$$T_{d,y} = \frac{G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{1}{\frac{s^2}{100} + \frac{s}{10} + \sqrt{2}}$$

$$y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s T_{d,y} \underbrace{\frac{1}{s} \frac{1}{4}}_{\frac{1}{4\sqrt{2}}} + \frac{1}{2} |T_{d,y}(I5)| \sin(5t + \arg(T_{d,y}(I5)))$$

d) .

$$R(s) = \frac{s-1}{s}, \quad G(s) = \frac{s+3}{s^2+s-2} = \frac{s+3}{(s-1)(s+2)}$$

i)

Ist $T_{r,y}$ BIBO-Stabil?

$$T_{r,y} = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+3}$$

$s^2 + 3s + 3$ ist ein Hurwitzpolynom, da 2. Ordnung und alle Koeffs größer als 0

$\Rightarrow T_{r,y}$ ist BIBO-Stabil!

ii)

geschlossener Regelkreis intern stabil?

$$R(s)G(s) = \frac{\cancel{s-1}}{s} \frac{s+3}{(s+2)(\cancel{s-1})}$$

 \Rightarrow Nicht intern stabil!
Aufgabe 3 .

a) .

Linearitar (S.19, Definition 2.1.):

$$\mathbf{h}(a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2, \mathbf{0}, t) = a\mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{0}, t) + b\mathbf{h}(\mathbf{x}_2, \mathbf{0}, t)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{0}, a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2, t) = a\mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_1, t) + b\mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_2, t)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, t) + \mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{u}, t)$$

Zeitinvarianz (S. 21, Definition 2.2.):

 $y(t)$ fur Anfangswert $x(t_0)$ und Eingang $u(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$ $\Rightarrow y(t-T)$ fur Anfangswert $x(t_0+T)$ und Eingang $u(\tau-T)$, $t_0+T \leq \tau \leq t+T$

b) .

 Σ_1 nicht linear und zeitvariant. Σ_2 linear und zeitvariant.

c) .

$$\det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -3 \\ 0 & \lambda - \alpha + 2 & 0 \\ -\alpha & 0 & \lambda + \alpha + 3 \end{vmatrix} = s^3 + 5s^2 + (6 + 2\alpha - \alpha^2)s - 2\alpha(\alpha - 2)$$

Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{l} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda^1 \\ \lambda^0 \end{array} \left| \begin{array}{ll} 1 & 6 + 2\alpha - \alpha^2 \\ 5 & 6\alpha - 3\alpha^2 \\ 6 + \frac{4}{5}\alpha - \frac{2}{5}\alpha^2 & 0 \\ 6\alpha - 3\alpha^2 & \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 a_{31} &> 0: \\
 0 < \alpha < 2 \\
 a_{21} &> 0: \\
 \alpha^2 - 2\alpha - 15 &< 0 \\
 \Rightarrow -3 < \alpha < 5
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Asymp. Stabil für: $0 < \alpha < 2$
 \Rightarrow BIBO-Stabil.

Aufgabe 4 .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{k+1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\Gamma} u_k \\
 y_k &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^T} \mathbf{x}_k
 \end{aligned}$$

a) .

PBH-Eigenvektortest:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

Eigenvektoren:

$$[w_1, w_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} [0, 0]$$

$$w_1 = 0, \quad w_2 = \alpha$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

PBH-Test:

$$\mathbf{w}_1^T \Gamma = 2\alpha \neq 0$$

$$\mathbf{w}_2^T \Gamma = 3 \neq 0$$

\Rightarrow vollständig erreichbar!

b) .

$$u_k = \mathbf{k}^T \mathbf{x}_k + l r_k$$

$$\text{Pole: } \lambda = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right]$$

$$\text{für } r_k = (1^k): \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = r_k = 1$$

$$\mathcal{R}(\Phi, \Gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_{\text{soll}}(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z - \frac{2}{3}\right) = z^2 \underbrace{-\frac{7}{6}}_{p_1} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{p_0}$$

$$\mathbf{v}_1^T = [0, \quad 1] \mathcal{R}^{-1} = \left[\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{6} \right]$$

$$\mathbf{k}^T = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{6} \right] + \frac{7}{6} \left[\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{6} \right] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \left[\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{6} \right] \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi^2} =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}, \quad -\frac{7}{12} \right]$$

$$l = \frac{1}{\mathbf{c}^T (\mathbf{1} - \Phi - \Gamma \mathbf{k}^T)^{-1} \Gamma} = \frac{1}{12}$$

c) .

$$G(z) = \mathbf{c}^T (z\mathbf{1} - \Phi)^{-1} \Phi = \frac{z+1}{(z-2)(z-1)}$$

d) .

$$x_{k+2} + 2x_{k+1} + x_k = -u_k$$

$$y_k = x_{k+1} + 3x_k$$

Substitution:

$$v_k = x_k$$

$$w_k = x_{k+1}$$

$$v_{k+1} = w_k$$

$$w_{k+1} = -u_k - 2w_k - v_k$$

$$y_k = w_k + 3v_k$$

6 Klausur vom 6. Februar 2009

Aufgabe 1 .

Aufgabe 2 .

a) .

BIBO-Stabilität: Alle Polstellen z_p von $G(z)$ im Einheitskreis liegen ($|z_p| < 1$).
Alle Polstellen q_p von $G^\#(q)$ in der linken offenen q -Halbebene liegen ($\operatorname{Re}(q_p) < 0$).

Sprungfähigkeit:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) \neq 0$$

$$\lim_{q \rightarrow \Omega_0} G^\#(q) \neq 0 \quad \Omega_0 = \frac{2}{T_a}$$

b) .

Φ muss eine nilpotente Matrix sein. Beispiel:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 .

a) .

$$y_1 = (r_1 - y_1)R_1(s)G_1(s)$$

$$y_1(1 + R_1(s)G_1(s)) = r_1R_1(s)G_1(s)$$

$$T_{r_1, y_1}(s) = \frac{R_1(s)G_1(s)}{1 + R_1(s)G_1(s)}$$

$$R_1(s)G_1(s) = \frac{3}{\sqrt{3}s} = \frac{\sqrt{3}}{s}$$

$$T_{r_1, y_1}(s) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{s}}{\frac{s + \sqrt{3}}{s}} = \frac{\sqrt{3}}{s + \sqrt{3}}$$

b) .

$$G_3(s) = T_{r_1, y_1}(s)G_2(s)$$

$$G_2(s) = \frac{10}{1 + s}$$

Aufgabe 4 .

a) .

$$(g_k) = \delta_k + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \sigma[k-2]$$

$$\Leftrightarrow G(z) = 1 - \frac{2}{z - 2z^2}$$

b) .

Ja, da $\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty$. Die geometrische Reihe $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$ konvergiert. Alternativ: Die Polstellen z_p von $G(z)$ sind $z_{p1} = 0$ und $z_{p2} = \frac{1}{2}$ und liegen im Einheitskreis.

c) .

$$(u_k) = 4 \cos\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 1^k$$

$$e^{I\frac{\pi}{2}} = I$$

$$e^{I0} = 1$$

$$(y_k) = 4 |G(I)| \cos\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \arg(G(I))\right) - |G(1)|$$

$$|G(I)| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\arg(G(I)) = \arctan(2)$$

$$|G(1)| = 3$$

d) .

$$\begin{aligned}x_{k+3} - x_{k+2} + 5x_{k+1} - 7x_k &= u_k \\ y_k &= x_{k+2} - 10x_k\end{aligned}$$

Substituieren:

$$\mathbf{x}_k = [a_k, b_k, c_k]$$

$$a_k = x_k$$

$$b_k = x_{k+1}$$

$$c_k = x_{k+2}$$

$$a_{k+1} = x_{k+1} = b_k$$

$$b_{k+1} = x_{k+2} = c_k$$

$$c_{k+1} = x_{k+3} = u_k + \underbrace{x_{k+2}}_{c_k} - 5 \underbrace{x_{k+1}}_{b_k} - 7 \underbrace{x_k}_{a_k}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -5 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u_k$$

$$y_k = c_k - 10a_k$$

$$y_k = \underbrace{[-10 \quad 0 \quad 1]}_{\mathbf{c}^T} \mathbf{x}$$