Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierungstechnik
am 11.12.2009

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	9	11	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, nicht auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an,

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich und

... kreuzen Sie hier an, an welchem der folgenden Termine Sie **nicht** zur mündlichen Prüfung antreten können

☐ Fr, 18.12.09 ☐ Mo, 21.12.09

Viel Erfolg!

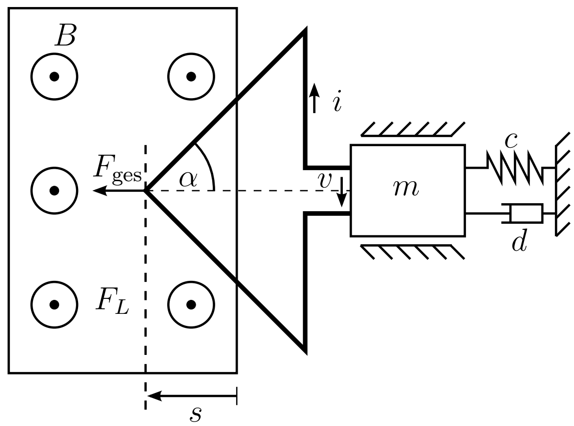


Abbildung 1: Dreiecksförmige Leiterschleife im Magnetfeld.

1. Gegeben ist eine dreiecksförmige Leiterschleife, die teilweise in ein Magnetfeld mit der konstanten magnetischen Flussdichte B eingetaucht ist, siehe Abbildung 1. Die Leiterschleife ist fest mit einer Spannungsquelle (Spannung v) verbunden, die mit einem linearen Feder-/Dämpfersystem (Federkonstante c, Ruhelage der Feder bei $s = 0$, Dämpfungskonstante d) gegenüber dem Inertialsystem gelagert ist. Die Masse der Leiterschleife sei gegenüber der Masse m der Spannungsquelle vernachlässigbar klein. An der Spitze der vom Strom i durchflossenen Leiterschleife greift die Kraft $F_{\text{ges}} = F_{\text{ext}} + F_m$ an, wobei F_m die magnetische Kraft und F_{ext} eine externe Kraft bezeichnen. Die Induktivität der Leiterschleife beträgt L, der elektrische Widerstand R.

   a) Bestimmen Sie mit Hilfe des verketteten Flußes $\psi = BA(s) + Li$ und des Induktionsgesetzes $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi = -Ri + v$ die Gleichung für die Stromdynamik, wobei $A(s)$ die im Magnetfeld eingetauchte Fläche der Leiterschleife darstellt. 1.5 P.|

   b) Die magnetische Koenergie berechnet sich zu $\bar{W}_m = \int \psi \mathrm{d}i$. Berechnen Sie daraus die magnetische Kraft $F_m = \frac{\partial \bar{W}_m}{\partial s}$. 1.5 P.|

   c) Geben Sie das Gesamtmodell des Systems in der nichtlinearen Zustandsdarstellung 2 P.|

   $$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= h(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

   an. Wählen Sie hierbei den Zustandsvektor $\mathbf{x} = [s,\ w,\ i]^T$ mit der Geschwindigkeit w, dem Eingangsvektor $\mathbf{u} = [v,\ F_{\text{ext}}]^T$ und dem Ausgang $y = F_m$.

   d) Berechnen Sie eine allgemeine Ruhelage $\mathbf{x}_R$ des Systems für einen beliebigen Eingang $\mathbf{u}_R \neq \mathbf{0}$ und $s > 0$. Bestimmen Sie die Federkonstante c so, dass für eine verschwindende Kraft $F_{\text{ext}} = 0$ und eine konstante Spannung $v = v_0$ eine solche Ruhelage existiert. 2.5 P.|

   e) Linearisieren Sie das nichtlineare Zustandsmodell um eine allgemeine Ruhelage $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$ und geben Sie es in der Zustandsdarstellung an: 2.5 P.|

   $$\begin{aligned} \Delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}, \quad \Delta\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_R \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T\Delta\mathbf{x} + \mathbf{d}^T\Delta\mathbf{u} \end{aligned}$$

2. Die Aufgabenteile a) und b) können unabhängig von den Aufgabenteilen c) und d) gelöst werden.

   a) Gegeben ist eine Strecke $G_2(s)$ mit dem im folgenden Bode-Diagramm dargestellten Übertragungsverhalten. 3 P.

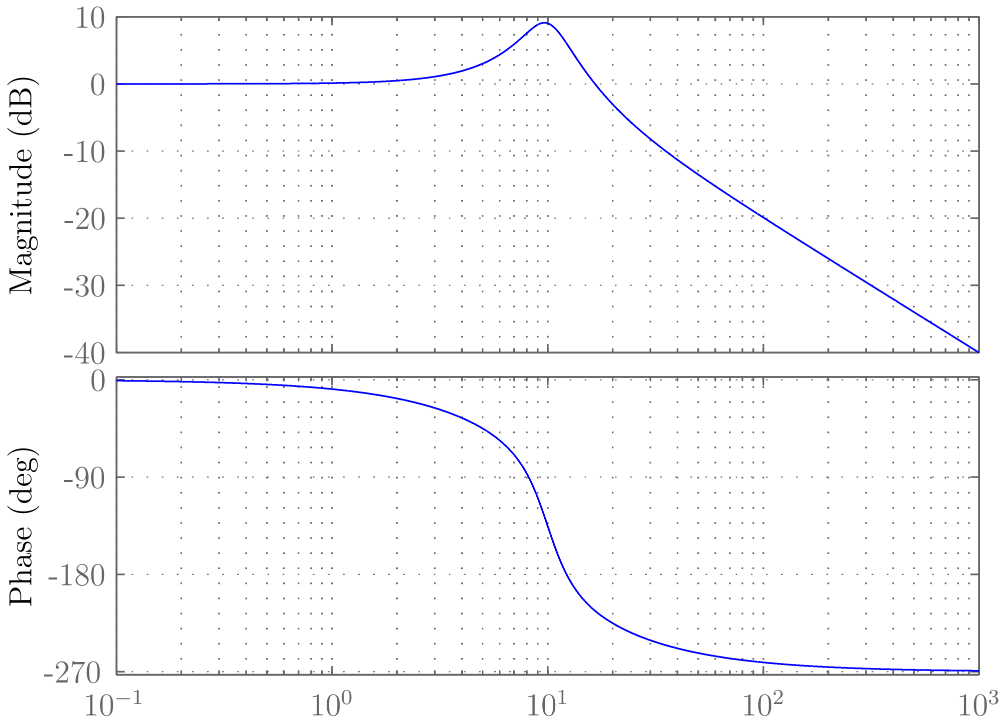
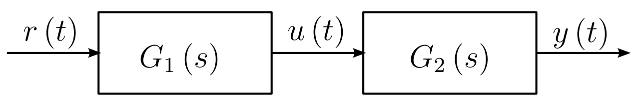


Abbildung 2: Bode-Diagramm von $G_2(s)$.

Betrachten Sie das System



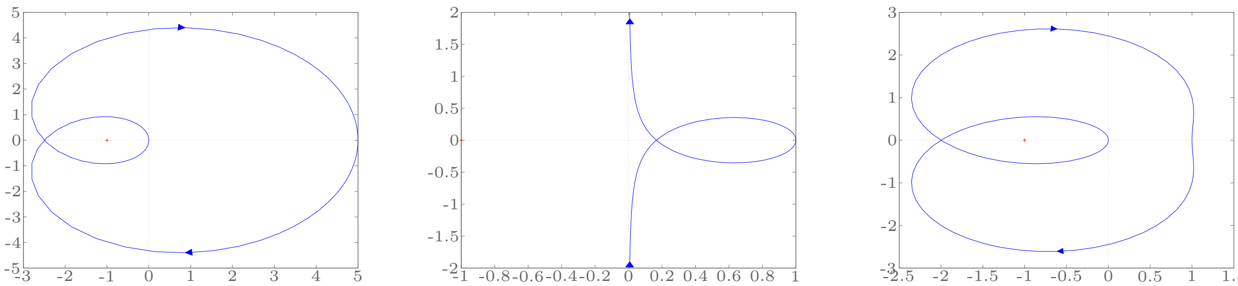
mit der Übertragungsfunktion

$$G_1(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 100} \; .$$

   i) Bestimmen Sie für einen rampenförmigen Verlauf der Eingangsgröße $r(t) = t\sigma(t)$ die stationäre Lösung
      - der Größe $u_\infty = \lim_{t\to\infty} u(t)$ und
      - der Größe $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$.

   ii) Berechnen Sie für einen harmonischen Verlauf der Eingangsgröße $r(t) = 5\sin(10t)$ die eingeschwungene Lösung von $u(t)$ und $y(t)$.

b) Welche der hier abgebildeten Ortskurven entspricht der Strecke $G_2(s)$? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie insbesondere an, warum die anderen Ortskurven nicht in Frage kommen. 2 P.|



(a) (b) (c)

c) Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen hinsichtlich Linearität und Zeitvarianz: 2 P.|

i)

$$5\ddot{y} - \frac{2}{5}\dot{y}y = 5tu$$

ii)

$$10\dot{y} - \frac{y}{1+t} = \int_0^t \sqrt{2}u(\tau)d\tau$$

d) Geben Sie für die Differentialgleichungen aus c) die Zustandsraumdarstellung 3 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t\right)$$

an.

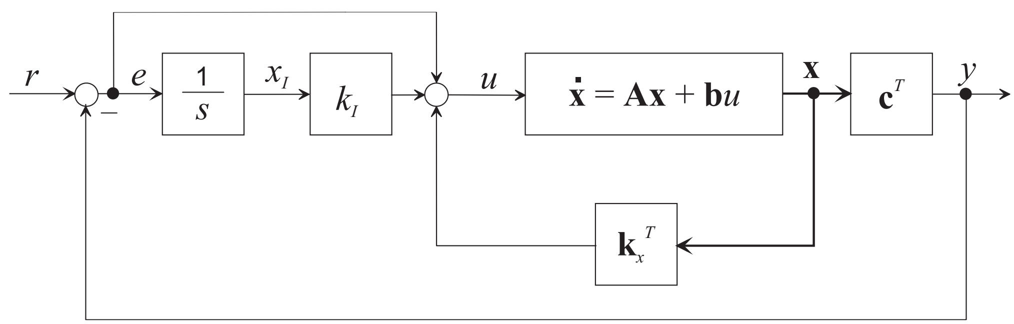
3. a) Gegeben ist das vollständig beobachtbare System 2 P.|

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k \ .$$

Weisen Sie mit Hilfe des PBH-Eigenvektortests nach, dass das System nicht vollständig erreichbar ist.

b) Berechnen Sie das zum System aus Aufgabe (a) duale System. Welche Aussagen können Sie bezüglich der Erreichbarkeit/Beobachtbarkeit und bezüglich des Eingangs-/Ausgangsverhaltens des primalen und dualen Systems treffen? 1 P.|

c) Gegeben ist der geschlossene Regelkreis 5 P.|



mit der Strecke

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dem Rückführvektor $\mathbf{k}_x^T = [k_1,\ k_2]$ und der Konstanten k_I.

- Geben Sie den geschlossenen Kreis mit dem Zustand $\mathbf{x}_g = \begin{bmatrix}\mathbf{x}^T, & x_I\end{bmatrix}^T$ in der Form

$$\dot{\mathbf{x}}_g = \mathbf{A}_g \mathbf{x}_g + \mathbf{b}_g r$$

an.

- Berechnen Sie die Konstanten k_1, k_2 und k_I so, dass die Pole des geschlossenen Kreises bei $\{-1, -1, -2\}$ liegen.
Hinweis: Berechnen Sie dazu zunächst das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}_g$!

d) Auf welchem Prinzip beruht die Zulässigkeit des getrennten Entwurfes eines Zustandsreglers und -beobachters. Was besagt dieses Prinzip bezüglich der Lage der Pole des geschlossenen Kreises? 1 P.|

4. Lösen Sie folgende Teilaufgaben:

   a) Geben Sie die Eigenschaften der Transitionsmatrix an. 1 P.|

   b) Gegeben ist die Transitionsmatrix eines autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ \frac{21}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t} - 12e^{-2t} & -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

   - Geben Sie die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ des Systems sowie deren Eigenwerte an. 2 P.|
   - Beweisen Sie die folgende Aussage 2 P.|

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \ .$$

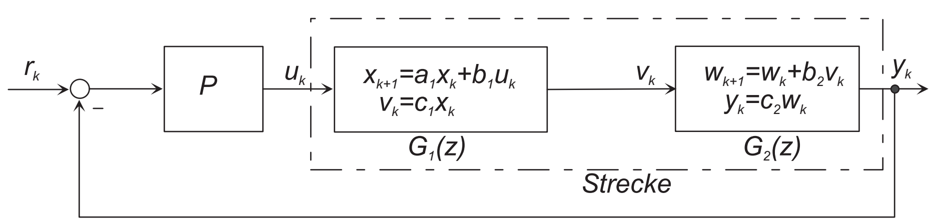
     Können Sie damit eine Aussage über die Stabilität der Ruhelage treffen? Wie lautet die Ruhelage und ist diese eindeutig?
   - Gegeben ist der Zustand $\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-3} \end{bmatrix}$ zur Zeit $t = 1$. Berechnen Sie den Zustand des Systems zur Zeit $t = 0$. 1 P.|

   c) Gegeben ist das autonome System 2 P.|

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \ .$$

   Geben Sie einen Anfangswert $\mathbf{x}_0$ und eine skalare Funktion $\alpha(t)$ derart an, dass sich die Lösung des Systems in der Form $\mathbf{x}(t) = \alpha(t)\mathbf{x}_0$ darstellt.

   d) Gegeben ist der folgende Regelkreis: 3 P.|



   Die Strecke wird mit einem $P-$Regler geregelt. Geben Sie mit Hilfe des Jury-Schemas Bedingungen dafür an, in welchem Wertebereich der Parameter P eingestellt werden darf, damit die Führungsübertragungsfunktion $T_{r,y}(z)$ des Regelkreises BIBO-stabil ist. Berechnen Sie dazu zunächst die Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{y_z(z)}{u_z(z)}$ der Strecke und setzen Sie dann die folgenden Parameter ein.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.5 & b_2 &= 1 \\ b_1 &= 1 & c_2 &= 1 \\ c_1 &= 1 \end{aligned}$$

   Hinweis: Sie müssen die Ungleichungen des Jury-Schemas **nicht** lösen!