

### 3.2 Betragsoptimum

Das Betragsoptimum orientiert sich im Gegensatz zum symmetrischen Optimum nur am Amplitudenfrequenzgang (Betragsfrequenzgang) der Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises und wird typischerweise für  $PT_n$ -Strecken mit reellen, stabilen Streckenpolen verwendet. Für diese Strecken resultiert dieses Verfahren auch sicher in einem stabilen Regelkreis. Für andere Strecken muß die Stabilität des entstehenden Regelkreises noch geprüft werden, da das Entwurfsverfahren die Durchtrittssteigung der Schleifenverstärkung  $F_O$  (bei Phasenminimumsystemen also die Stabilitätsreserve) nicht berücksichtigt.

Idealerweise sollte beim Betragsoptimum

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{F_O}{1 + F_O} \right| = \frac{1}{|1 + 1/F_O|} = 1 \quad \text{für alle } \omega \quad (22)$$

gelten, was bei Phasenminimumsystemen (keine Pole/Nullstellen in der rechten Halbebene) sofort auf

$$T(j\omega) = 1 \quad \text{für alle } \omega \quad (23)$$

führen und dadurch mit

$$y(t) = y_{ref}(t) \quad (24)$$

ein ideales Führungsverhalten des Regelkreises ergeben würde. Gleichung (22) zeigt allerdings, daß diese Forderung nur für  $F_O \rightarrow \infty$  möglich wäre. Folglich beschränkt man sich darauf,  $|T(j\omega)| \approx 1$  zumindest in einem möglichst breiten Frequenzbereich von  $\omega=0$  beginnend zu erreichen.

Betrachtet man

$$|T(j\omega)| = \frac{|Z_T(j\omega)|}{|N_T(j\omega)|} = \frac{c_0 + c_1\omega^2 + c_2\omega^4 + \dots + c_p\omega^{2p}}{d_0 + d_1\omega^2 + d_2\omega^4 + \dots + d_q\omega^{2q}} = \frac{C(\omega)}{D(\omega)} \quad (25)$$

$p \dots$  Zählerordnung von  $F_O$   
 $q \dots$  Nennerordnung von  $F_O$   
 $p \leq q$

so wird dieses Ziel erreicht, in dem man Zähler- und Nennerpolynome  $C(\omega)$  und  $D(\omega)$  von  $\omega=0$  ausgehend möglichst in Deckung bringt, d.h. die Koeffizienten  $c_i$  und  $d_i$  mit der niedrigsten Ordnung beginnend möglichst weit (entsprechend der Zahl der freien Reglerparameter) gleichsetzt<sup>2</sup>. Aus der Lösung dieses Koeffizientenvergleichs kann man dann die Werte der freien Reglerparameter berechnen. Die Koeffizienten  $c_0$  und  $d_0$  sind automatisch gleich, sofern die Schleifenübertragungsfunktion integrales Verhalten ausweist (d.h.  $F_O(j0) = \infty \Rightarrow T(j0) = 1$ , siehe Gl.(25) und Gl.(22)).

Praktisch existieren für gebräuchliche Regelstrecken bereits Tabellen, aus denen man die Reglerkonfiguration und die Bestimmungsgleichungen für die Reglerparameter entnehmen kann (siehe Abb. 8 - für  $PT_n$ -Strecken sind Näherungsformeln angegeben! - bzw. Abb. 9 mit allgemeinerer Streckendarstellung und exakter Lösung).

Tabelle 7/3. Einstellregeln zum Betragsoptimum

Strecke $F_0(s)$	Regler $G_R(s)$	Einstellregeln
$\frac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots}$	PI $\frac{r_0 + r_1 s}{2s}$	$r_0 = a_0 \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_1 a_2 - a_0 a_3}, r_1 = a_1 \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_1 a_2 - a_0 a_3} - a_0$
$\frac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots}$	PID $\frac{r_0 + r_1 s + r_2 s^2}{2s}$	$r_0 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_0^2 & -a_0 & 0 \\ -a_1^2 + 2a_0 a_2 & -a_2 & a_1 \\ a_1^2 + 2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 & -a_4 & a_3 \end{vmatrix}$ $r_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & a_0^2 & 0 \\ a_2 & -a_1^2 + 2a_0 a_2 & a_1 \\ a_3 & a_1^2 + 2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 & a_3 \end{vmatrix}$ $r_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & -a_0 & a_0^2 \\ a_2 & -a_2 & -a_1^2 + 2a_0 a_2 \\ a_3 & -a_4 & a_1^2 + 2a_0 a_4 - 2a_1 a_3 \end{vmatrix}$ $D = \begin{vmatrix} a_1 & -a_0 & 0 \\ a_2 & -a_2 & a_1 \\ a_3 & -a_4 & a_3 \end{vmatrix}$
$\frac{K_R}{\prod_{v=1}^n (1 + T_v s)}$ $T_1 \gg T_2 = \sum_{v=2}^n T_v$	PI $K_R \frac{1 + T_R s}{s}$	$K_R = \frac{1}{2K_0 T_R}, T_R = T_1$
$\frac{K_R}{\prod_{v=1}^n (1 + T_v s)}$ $T_1, T_2 \gg T_R = \sum_{v=3}^n T_v$ 2 große Zeitkonstanten	PI $K_R \frac{1 + T_R s}{s}$	$K_R = \frac{1}{2K_0} \frac{T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2}{(T_1 + T_2) T_1 T_2}$ $T_R = \frac{(T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}{T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2}$
	PID $K_R \frac{(1 + T_{R1} s)(1 + T_{R2} s)}{s}$	$K_R = \frac{1}{2K_0 T_R}, T_{R1} = T_1, T_{R2} = T_2$

Abb. 9 - Betragsoptimum nach [FÖLLINGER, Tab. 7.3]

<sup>2</sup> Im besten Fall können in den Polynomen  $C(\omega)$  und  $D(\omega)$   $q-1$  Koeffizienten gleichgesetzt werden, d.h. der Regler benötigt  $q-1$  freie Parameter. Setzt man den Regler mit  $q$  statt mit  $q-1$  freien Parametern an, so kann man zwar formal auch die Koeffizienten von  $\omega^{2q}$  gleichsetzen und somit theoretisch  $|T(j\omega)| = 1$  erreichen. Man erkaufte das aber wie schon angeführt entsprechend Gl. (22) mit einer unendlich hohen Schleifenverstärkung  $F_0(j\omega) \rightarrow \infty$ .

Verglichen mit dem Symmetrischen Optimum zeigt das Betragsoptimum bei gleicher Streckenkonfiguration (PT<sub>n</sub> mit reellen Polen) ein deutlich geringeres Überschwingen von  $\Delta h = 4,7\%$ . Tatsächlich entspricht das Betragsoptimum hier etwa einer Aufhebungskompensation (siehe Abschnitt 4.1) der größten Streckenzeitkonstante  $T_1 > T_2 > \dots > T_N$  und einem Verhältnis von Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  zur nächsthöheren Knickfrequenz der Strecke  $\omega_K = 1/T_2$  von etwa  $\omega_D/\omega_K \approx 0,5$  (exakt 0,455).

#### 4.1 Aufhebungskompensation (Pol-Nullstellen-Kompensation)

Um den Abfall des Amplitudengangs der Schleifenverstärkung  $F_O$  von  $\omega=0$  beginnend möglichst lange auf -20 dB/Dekade zu halten, kann es sinnvoll sein, die größten Zeitkonstanten der Strecke durch Reglernullstellen zu kompensieren (Pol-Nullstellenkompensation). Dazu kann z.B. ein PI- oder ein PID( $T_1$ )-Regler verwendet werden:

$$\text{Strecke: } G(s) = \frac{K_S}{(1+sT_1)(1+sT_2)\cdots(1+sT_n)} \quad T_1 > T_2, T_3, \dots, T_n \quad (26)$$

$$\text{Regler: } K(s) = K_R(1+1/sT_I) = K_R \frac{1+sT_I}{sT_I} \quad \text{mit } T_I = T_1$$

Die Aufhebung der größten Streckenzeitkonstante bewirkt eine Kompensation der durch eben diese Streckenzeitkonstante sonst verursachten Phasenzunahme (bzw. des zusätzlichen Abfall des Amplitudengangs). Der Einfluß der weiteren Streckenzeitkonstanten auf Phase und Verstärkung bleibt allerdings unberücksichtigt.

Diese Maßnahme ermöglicht es, bei gleichem Phasenrand die Durchtrittsfrequenz im Vergleich mit einem reinen I-Regler zu höheren Werten hin zu verschieben.

#### 4.2 Kompensation (Betragsanpassung) nach LATZEL

Bessere Ergebnisse als die Methode der Aufhebungskompensation bringt die Methode der Betragsanpassung nach LATZEL. Bei diesem Verfahren wird nicht nur der Einfluß einzelner Pole, sondern der Einfluß aller Pole der Regelstrecke bei der Korrektur des Amplitudengangs berücksichtigt.

Grundlegende Idee ist es, (bei einer proportionalen Strecke) die Reglernullstelle eines PI-Reglers  $s_0$  genau auf die Frequenz  $\omega_{3dB}$  zu legen, bei der (durch den Einfluß aller Streckenpole) die Streckenverstärkung  $|G(j\omega_{3dB})|$  gegenüber ihrem Stationärwert  $|G(0)|$  um 3dB abgefallen ist:

$$\frac{|G(j\omega_{3dB})|}{|G(j0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong -3dB \quad (27)$$

Die Reglernullstelle  $s_0 = -j\omega_{3dB}$  kompensiert (gegenüber einem reinen I-Regler) den durch den Einfluß aller Streckenpole hervorgerufenen Abfall der Schleifenverstärkung an der Stelle  $\omega_{3dB}$  exakt<sup>3</sup>.

Erweitert man den Regler mit einer zweiten Nullstelle (PID-Regler), so kann man den Abfall der Schleifenverstärkung bei zwei Frequenzen exakt kompensieren. Man wählt die Nullstellen des PID-Reglers so, daß der Verstärkungsabfall der Strecke sowohl bei der Frequenz  $\omega_{3dB}$  (ursprünglich -3dB Abfall) als auch bei der Frequenz  $\omega_{6dB}$  (ursprünglich -6dB Abfall) exakt - und dazwischen zumindest annähernd - kompensiert wird. Dies führt allerdings im allgemeinen auf ein nur mehr numerisch lösbares Gleichungssystem zur Bestimmung der Reglernullstellen, die dabei auch komplexe Werte annehmen können (komplex konjugiertes Nullstellenpaar).

<sup>3</sup> Besitzt die Strecke nur 1 Zeitkonstante (PT1), so führen Pol-Nullstellenkompensation und Betragsanpassung nach LATZEL natürlich auf das selbe Ergebnis, da bei einem PT1 die (Grenz-)Frequenz  $\omega_{3dB}$  ja gleich der Lage der Polstelle  $1/T_1$  ist:

$$\left. \frac{1}{1+sT_1} \right|_{s=-j\omega_{3dB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_{3dB} = 1/T_1$$

Abb. 10 zeigt dieses Verfahren für die proportionale Strecke  $G(s)$  bzw. den PI-Regler  $K(s)$

$$G(s) = \frac{1}{(1+s \cdot 1)(1+s \cdot 0,9)(1+s \cdot 0,5)(1+s \cdot 0,2)} \quad (28)$$

$$K(s) = \frac{1+sT_i}{sT_i} = \frac{1+s/\omega_{3dB}}{s/\omega_{3dB}}$$

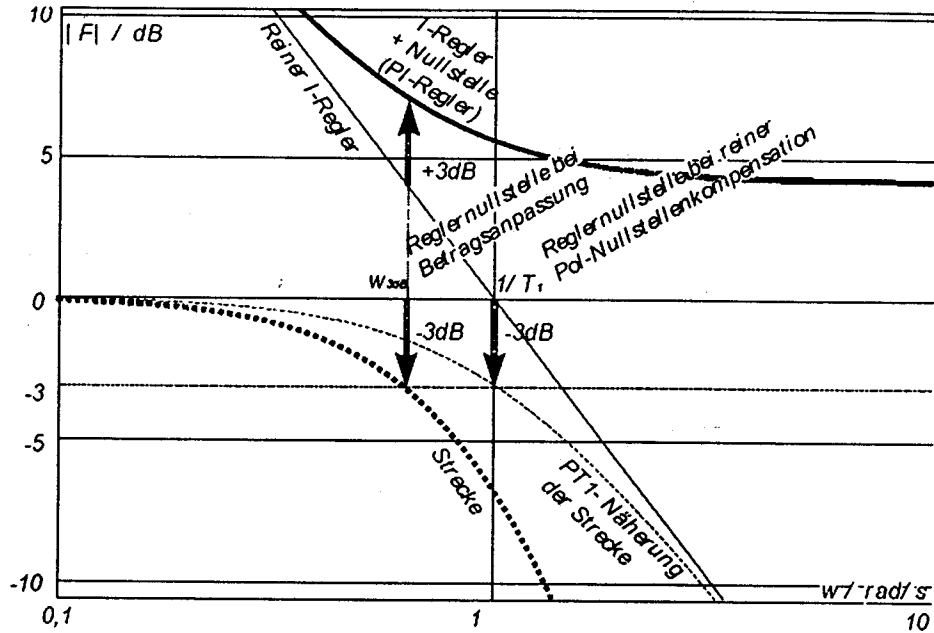


Abb. 10 - Betraganpassung nach LATZEL

Bei reiner Pol-Nullstellenkompensation der größten Zeitkonstante  $T_1 = 1$  würde die Frequenz  $1/T_1$  der Reglernullstelle  $-1/T_1$  des PI-Reglers entsprechen. Betrachtet man die tatsächliche Strecke in Abb. 10 so erkennt man, daß die Kompensation des Verstärkungsabfalls erst zu spät einsetzt.

Bei der Betraganpassung nach LATZEL hingegen versetzt man unter Berücksichtigung des Einfluß der schnelleren Streckenzeitkonstanten die Reglernullstelle  $-1/T_1$  zur Frequenz  $\omega_{3dB}$ , wodurch die Kompensation des Verstärkungsabfalls durch die Nullstelle gerade rechtzeitig beginnt.

Vergleicht man die Pol-Nullstellenkompensation und die Methode der Betraganpassung beim Reglerentwurf für die Strecke nach Gl. (28), so zeigt sich erwartungsgemäß, daß bei Entwurf auf gleichen Phasenrand (d.h. etwa gleiches Überschwingen) die Methode der Betraganpassung zu einer kürzere Anstiegszeit der Führungssprungantwort führt, während bei Entwurf auf gleiche Durchtrittsfrequenz (d.h. etwa gleiche Anstiegszeit) der Entwurf über die Betraganpassung ein wesentlich geringeres Überschwingen aufweist (Abb. 11).

Deutlich treten die Vorteile der Betraganpassung vor allem bei Strecken hervor, die mehrere große Zeitkonstanten der selben Größenordnung oder sogar Mehrfachpole aufweisen, da hier der Effekt der aufsummierten Wirkungen der Zeitkonstanten auf den Verstärkungsabfall am stärksten in Erscheinung tritt.

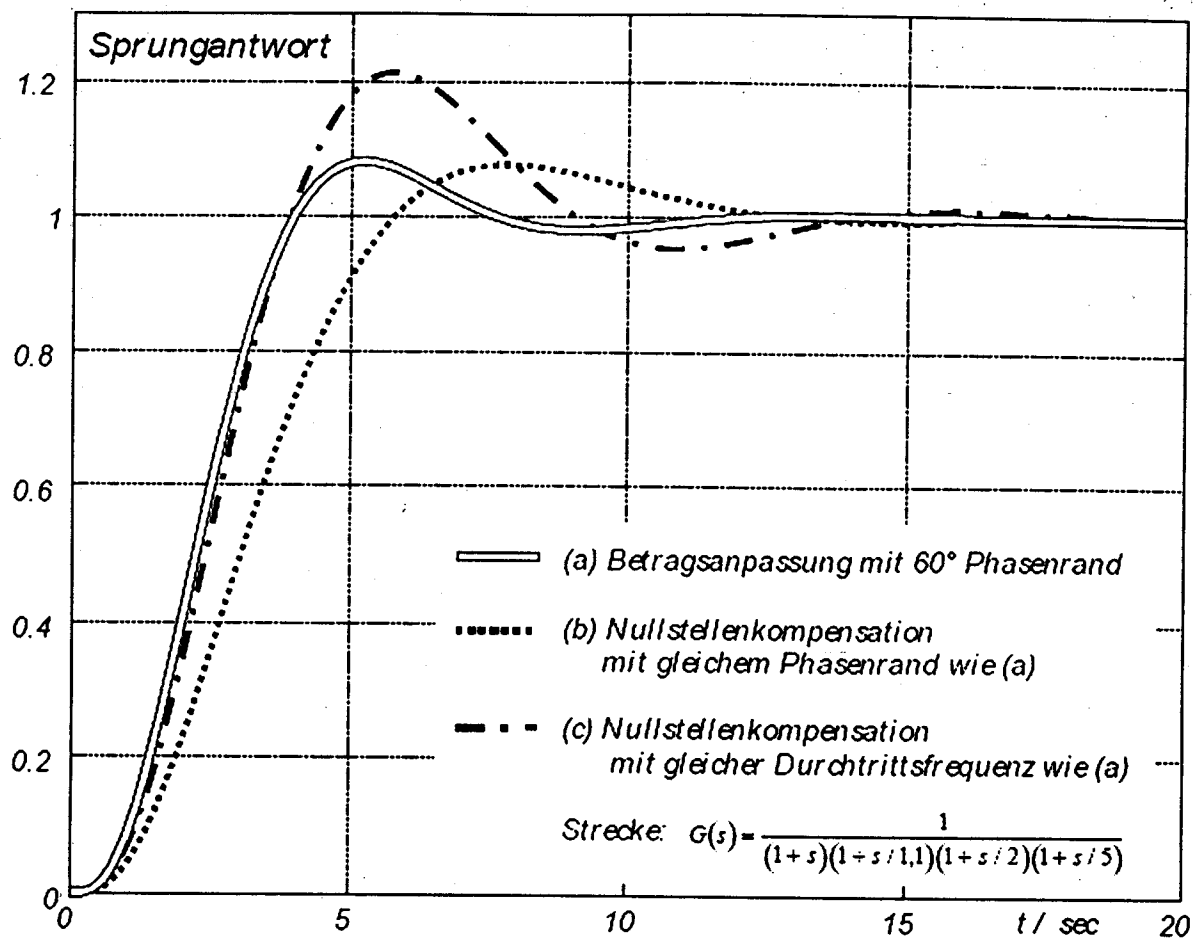


Abb. 11 - Sprungantwort bei Reglerentwurf nach Betragsganpassung (a) und Pol-Nullstellenkompensation (b)