Nachname:	Matrnr:	25.3.2011 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem $2\ddot{x} + 3x - 5y = \cos t - 5\sin t$, $2\ddot{y} - 5x + 3y = -5\cos t + \sin t$.

   (a) (3) Das System kann in der Form $A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = \vec{a}\cos t + \vec{b}\sin t$ für skalare 2×2-Matrizen A, B, C, $\vec{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^2$ angeschrieben werden.
   Man gebe die Matrizen A, B, C, sowie Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ an.

   (b) (3) In der allgemein gehaltenen Gleichung $A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = \vec{a}\cos t + \vec{b}\sin t$ möchte jemand eine Lösung durch den Ansatz $\vec{x} = \vec{u}\cos t + \vec{v}\sin t$ mit $\vec{u}$, $\vec{v}$ Vektoren im $\mathbb{R}^2$ auffinden. Welches Gleichungssystem in $\vec{u}$, $\vec{v}$ entsteht?

   (c) (1) Man finde $\vec{u}$ und $\vec{v}$ im vorliegenden Beispiel.

   (d) (2) Wie lautet die Lösung $\vec{x}$ in der Form $x(t) =?$ bzw. $y(t) =?$.

   (e) (1) Zeigen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösung durch Probe.

2. Es sei auf $\mathbb{R}^4$ das übliche innere Produkt durch $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \sum_{i=1}^4 a_i b_i$ gegeben. Weiters seien

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (2) Ist U ein Orthonormalsystem (kurz ONS)? Begründen Sie die Antwort.

   (b) (3) Man gebe ein ONS V mit $\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(V)$ an.

   (c) (3) Für $\vec{u} \in U$ berechne man die Größen $\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle$.

   (d) (2) Man bestimme $\vec{y} \in \mathcal{L}(U)$ mit $\|\vec{a} - \vec{y}\|$ minimal.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y, z) = x + y + z\cos z$ und die Gleichung $f(x, y, z) = 0$.

   (a) (1) Man bestimme die Ableitungen f_x, f_y und f_z.

   (b) (3) Zeigen Sie, daß durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung $U(0, 0)$ eine Funktion $h(x, y)$ mit $f(x, y, h(x, y)) = 0$ für alle $(x, y) \in U(0, 0)$ und $h(0, 0) = 0$ bestimmt ist.

   (c) (4) Man bestimme $h_x(0, 0)$ und $h_y(0, 0)$.

   (d) (2) Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene an die durch $f(x, y, z) = 0$ bestimmte Fläche im Punkt $(0, 0, 0)$.

4. Im $\mathbb{R}^3$ sei K die beschränkte Schnittfigur, welche von einem Teil einer Kugeloberfläche (Radius $=1$) und einem Drehparaboloid mit der Gleichung $z=x^2+y^2$ begrenzt wird und nicht negative z-Koordinaten besitzt.

   (a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

   (b) (6) Es soll $J := \int_K f(x,y,z)\, d(x,y,z)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_A d(x,y) \int_?^? f(x,y,z)\, dz$$

   ausgedrückt werden.

Nachname:	Matrnr:	21.1.2011 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) (4) Man bestimme das charakteristische Polynom von A
   Antwort: Die Blockstruktur der 2×2-Blöcke ergibt $(\lambda^2 - 2\lambda + 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 16\lambda^2 - 22\lambda + 15$
   (b) (3) Man bestimme alle Eigenwerte von A
   Antwort: Man muß nur quadratische Gleichungen lösen: Es ergeben sich $1 \pm i\sqrt{2}$ und $2 \pm i$
   (c) (3) Für welche $\vec{b} \in \mathbf{C}^4$ ist die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
   Antwort: Für alle, da A regulär ist.

2. Es sei auf $I\!R^4$ das übliche innere Produkt durch $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \sum_{i=1}^{4} a_i b_i$ gegeben. Weiters seien
$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) (2) Ist U ein Orthonormalsystem (kurz ONS)? Begründen Sie die Antwort.
   Antwort: N: Es liegt zwar ein Orthogonalsystem vor, jedoch müßten alle Vektoren in U Länge 1 haben. Der erste der Vektoren hat Länge $\sqrt{3}$
   (b) (3) Man gebe ein ONS V mit $\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(V)$ an.
   Antwort: Man erkennt schnell, daß U ein Orthogonalsystem ist. Die Längen der Vektoren sind der Reihe nach $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ und 1. Somit kann als Antwort
$$V = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$
   gegeben werden.
   (c) (3) Für $\vec{u} \in U$ berechne man die Größen $\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle$.
   Antwort: Es ergibt sich (nach Nummerierung der Elemente in U in der angegebenen Reihenfolge)
$$\langle \vec{u}_1, \vec{a} \rangle = 1, \langle \vec{u}_2, \vec{a} \rangle = 2, \langle \vec{u}_3, \vec{a} \rangle = -1$$

(d) (2) Man bestimme $\vec{y} \in \mathcal{L}(U)$ mit $\|\vec{a} - \vec{y}\|$ minimal.
Antwort: Dazu muß man wissen, daß

$$\vec{y} := \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle \vec{u}_i, \vec{a} \rangle}{\|\vec{u}_i\|^2} \vec{u}_i$$

(die verallgemeinerte Fourierreihe) diese Aufgabe löst. Aus dem bereits Berechneten ergibt sich

$$\vec{y} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Zwischen den "Größen" x, y, z bestehe die Beziehung $-1 + x + yz + z^3 = 0$. Jemand möchte $z(x, y)$ näherungsweise in der Form $z(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots$ darstellen.

   (a) (3) Man bestimme $z(0, 0)$ und a_{00}.
   Antwort: Da $-1 + 0 + 0 \cdot z(0, 0) + z(0, 0)^3 = 0$ gilt, ist $z(0, 0) = 1$ und somit $z(0, 0) = a_{00} = 1$

   (b) (3) Man bestimme $z_y(0, 0)$ und a_{01}.
   Antwort: Implizites Differenzieren führt auf $0 + z + yz_y + 3z^2 z_y = 0$, und da $z(0, 0) = 1$ ist, findet man $z_y(0, 0) = -\frac{1}{3}$. Somit ist $a_{01} = -\frac{1}{3}$

   (c) (3) Man bestimme $z_{xy}(0, 0)$.
   Antwort: Durch implizites Differenzieren findet man zunächst $6zz_y z_x + 3z^2 z_{xy} + z_x + yz_{xy} = 0$, sowie $z_x(0, 0) = -\frac{1}{3}$. Danach findet man $z_{xy}(0, 0) = -\frac{1}{9}$

   (d) (1) Man gebe a_{11} an.
   Antwort: Hat man $z(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots$, so ergäbe sich $-\frac{1}{9} = z_{xy}(0, 0) = 2a_{11}$, somit ist $a_{11} = \frac{1}{2} z_{xy}(0, 0) = -\frac{1}{18}$

4. Ein Körper K wird durch die Ungleichungen $0 \leq y$, $x + y \leq 2$ und $x^2 + z^2 \leq 1$ beschrieben.

   (a) (4) Skizzieren Sie den Bereich K. (Hinweis: die Draufsicht in Richtung z-Achse und die Seitenansicht in Richtung y-Achse sind hilfreich.)
   Antwort: Ein Kreiszylinder mit Radius 1 und y-Achse als Mittelachse von der Höhe 2 wird unter einem Winkel von 45 Grad von der Ebene $x + y = 2$ abgeschnitten

   (b) (4) Man forme $J = \int_K f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ in ein iteriertes Integral der Form

$$J = \int_B d(x, z) \int_?^? f(x, y, z)\, dy$$

   um und gebe die den Bereich B in der (x, z)-Ebene bestimmenden Ungleichungen an.
   Antwort: Es ist $J = \int_{x^2+z^2 \leq 1} d(x, z) \int_0^{2-x} f(x, y, z)\, dy$.

(c) (2) Man bestimme das Volumen von K.

Antwort: Kann elementar sofort eingesehen werden: Volumen eines Zylinders mit Radius 1 und Höhe 2, also 2π

Nachname:	Matrnr:	3.12.2010 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x - 4y + 5e^{2t} \\ \dot{y} &= 2x + 3y - 3e^{2t} \end{aligned}$$

Dieses System läßt sich unter Benützung von Matrizen und Vektoren in der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}e^{2t}$ anschreiben.

(a) (2) Wie lauten A und $\vec{b}$?
Antwort: Es ist $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

(b) (1) Auf welches lineare Gleichungssystem für den unbekannten Vektor $\vec{u} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ mit u und v reell führt der Lösungsansatz $\vec{x} = \vec{u}e^{2t}$?
Antwort: $2\vec{u} = A\vec{u} + \vec{b}$

(c) (4) Geben Sie einen Lösungsvektor $\vec{x}(t)$ des Systems an.
Antwort: Die Lösung ist nicht eindeutig, z.B. ist $\vec{x}(t) = \frac{e^{2t}}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ eine Lösung

(d) (3) Falls die Matrix A auf Diagonalgestalt D gebracht werden kann, so geben Sie alle Möglichkeiten von D an.
Antwort: Man berechnet die Eigenwerte zu $\{-1, 1\}$ und da diese verschieden sind, kann D die Gestalt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ bzw. $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ haben.

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) (5) Man bestimme alle Eigenwerte von A.
Antwort: Die Blockstruktur 2×2-Block links oben, und der 3×3-Block

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & -5 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 5 & -3-\lambda \end{pmatrix},$$

der selbst eine Blockstruktur aufweist, ergeben das charakteristische Polynom in bereits faktorisierter Form, nämlich $p(\lambda) = -(\lambda^2 + 4\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda - 1)$. Hier liest man als Lösungen für die Eigenwerte $\{-1, -3, -1, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})\}$ als Wurzeln der Faktoren ab.

(b) (4) Für den Eigenwert mit höchster arithmetischer Vielfachheit gebe man eine Basis des zugehörigen Eigenraumes, sowie dessen Dimension an.

Antwort: Der gefragte Eigenwert ist -1 und hat arithmetische Vielfachheit 2. Man findet $(0, 0, 1, 0, 0)^T$ als mögliche Basis des Eigenraumes und die Dimension des Eigenraumes ist 1

(c) (1) Ist die Matrix diagonalisierbar? Begründung?

Antwort: Nein, sonst hätte -1 auch geometrische Vielfachheit 2

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y, z) = \frac{1-x^2+y^2-z^5}{1+x^2+y^2+z^2}$.

(a) (1) Man bestimme $f(0, 0, 0)$.

Antwort: $f(0, 0, 0) = 1$

(b) (3) Man bestimme $f_x(0, 0, 0)$, $f_y(0, 0, 0)$ und $f_z(0, 0, 0)$.

Antwort: Sind alle Null

(c) (5) Man bestimme das Taylorpolynom von f mit Anschlußstelle $(x_0, y_0, z_0) := (0, 0, 0)$ bis einschließlich Glieder 2.ter Ordnung.

Antwort: Benützen der geometrischen Reihe ergibt zunächst $f(x, y, z) = (1-(x^2 - y^2 + z^5))(1 - (x^2 + y^2 + z^2) + o(3))$ und "Ausmultiplizieren" das Taylorpolynom $T_2(x, y, z) = 1 - 2x^2 - z^2$

(d) (1) Geben Sie die Hessematrix an der Stelle $(0, 0, 0)$ an.

Antwort: Es ergibt sich $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4. Im $I\!R^3$ sei T das Tetraeder mit den Eckpunkten $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 0)$ und $D(0, 0, 1)$

(a) (2) Eine Skizze möge angefertigt werden.

(b) (5) Es soll $J := \int_T f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_K d(x, y) \int_?^? f(x, y, z)\, dz$$

ausgedrückt werden. Skizze des ebenen Bereichs K.

Antwort: $K = \{(x, y) \mid \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$, $J = \int_K d(x, y) \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}} f(x, y, z)\, dz$

(c) (3) Man berechne das Volumen von T.

Antwort: 2, weil $1/6$ des Volumens des Quaders $1 \times 3 \times 4$. Das gleiche Resultat ergibt sich durch explizite Berechnung von $\int_K d(x, y) \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}} dz$.

Nachname:	Matrnr:	3.9.2010 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & E \\ F & G \end{pmatrix},$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C := \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},\quad 0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und X, Y, U, V jeweils 2×2-Matrizen sein sollen.

(a) (1) Geben Sie an, wieviele Zeilen und Spalten die Blockmatrix $\begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix}$ hat.

Antwort: Aufgrund der Blockstruktur ist es eine 4×4-Matrix

(b) (3) Welche Möglichkeiten hat man für die Zeilen- und Spaltenzahl der Lösungsmatrix. Geben Sie ein Begründung für alle von Ihnen gefundenen Möglichkeiten.

Antwort: Es handelt sich um 4×4-Matrizen. Die gesuchte Matrix muß 4 Zeilen haben, damit die Multiplikation auf der linken Seite möglich ist und 4 Spalten, damit rechts eine 4-spaltige Matrix das Ergebnis sein kann.

(c) (6) Man berechne die Matrizen Y und U. (Hinweis: Blockstruktur beachten).

Antwort: Man findet die Matrizengleichungen $AX + BU = I$, $AY + BV = O$, $0X + CU = 0$ und $0Y + CV = G$. Da C regulär ist, ergibt sich aus der 3.ten Gleichung $U = 0$. Danach ergibt die 1.te Gleichung $X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Die 4.te Gleichung ergibt $V = C^{-1}G = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nun ergibt die 2.te Gleichung $Y = -A^{-1}BV = \begin{pmatrix} -25 & -30 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$.

2. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) (3) Man berechne den Wert der Determinante von A.

Antwort: Die Blockstruktur ergibt $\det A = (-1) \times \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \times 2 \times (-4) = 8$.

(b) (2) Man ermittle die Spur von A.

Antwort: Die Spur als Summe der Diagonalelemente ist $(-1)+(-1)+4+1+0 = 3$.

(c) (3) Wenn das charakteristische Polynom von A in der Form $p = \lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5$ angeschrieben ist, wie lauten a_1 und a_5?

Antwort: Es ist a_1 der negative Wert der Spur, also $a_1 = -3$ und a_5 der negative Wert der Determinante, also $a_5 = -8$.

(d) (2) Geben Sie mindestens 3 Eigenwerte von A an. Antwort: Die Blockstruktur läßt die Berechnung aller Eigenwerte in einfacher Weise zu: Die 3×3-Determinante hat selbst Unterblöcke, aus denen -1 und die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ bestimmbar sind, also kann $\{-1, 1, 2\}$ als Antwort auf die Frage gegeben werden.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = \ln(xye^{x^2+y^2})$.

(a) (3) Man skizziere den Definitionsbereich von f in $I\!R^2$.

(b) (4) Man bestimme $f_x(1,1)$ und $f_y(1,1)$.

Antwort: Es ist $f(x,y) = \ln x + \ln y + x^2 + y^2$ im ersten Quadranten. Somit ist $f_x = \frac{1}{x} + 2x$ und somit $f_x(1,1) = f_y(1,1) = 3$ aus Symmetriegründen

(c) (3) Man bestimme $f_{xx}(1,1)$.

Antwort: Die Umformung von f beachtend, ergibt sich $f_{xx} = -\frac{1}{x^2} + 2$, somit $f_{xx}(1,1) = 1$

4. Es sei K die Menge im ersten Quadranten, die durch die x-Achse sowie die Gerade mit der Gleichung $y = x$ begrenzt wird und deren Punkte (x,y) der Bedingung $xy \leq 1$ genügen.

(a) (4) Eine Skizze der Figur K möge angefertigt werden.

(b) (4) Es soll $J := \int_K f(x,y)\, d(x,y)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? dy \int_?^? f(x,y)\, dx$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Es ergibt sich $J = \int_0^1 dy \int_y^{\frac{1}{y}} f(x,y)\, dx$

(c) (2) Jemand führt durch $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ Polarkoordinaten ein, sodaß das Integral in ein iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? d\phi \int_?^? g(r,\phi)\, dr$$

überführt wird. Man bestimme $g(r, \phi)$ und die Integralgrenzen.
Antwort: Die Funktionaldeterminante ist r, es ist $g(\phi, r) = f(r\cos\phi, r\sin\phi)r$ und

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\cos\phi\sin\phi}}} g(\phi, r)\, dr.$$

Nachname:	Matrnr:	29.7.2010 M2-ET (Herfort)

1. Auf dem reellen Vektorraum aller kubischen Polynome sei eine Abbildung $\Phi(p) = x^2p'' + 2xp' - p$ (p kubisches Polynom) gegeben.

   (a) (3) Zeigen Sie, daß die Abbildung Φ linear ist.
   Antwort: Es ist $\Phi(p+q) = x^2(p+q)'' + 2x(p+q)' - (p+q) = x^2p'' + x^2q'' + 2xp' + 2xq' - p - q = x^2p'' + 2xp' - p + x^2q'' + 2xq' - q = \Phi(p) + \Phi(q)$.
   Weiters ist für $r \in I\!R$ stets $\Phi(rp) = x^2(rp)'' + 2x(rp)' - rp = r(x^2p'' + 2xp' - q) = r\Phi(p)$. Somit ist Φ linear.

   (b) (5) Bezüglich der kanonischen Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ im Raum der kubischen Polynome soll eine Matrixdarstellung von Φ angegeben werden.
   Antwort: Diagonalmatrix $diag(-1, 1, 5, 11)$. Wie bekommt man z.B. die 3.te Spalte? Indem man Φ auf das 3.te Basiselement, nämlich x^2 anwendet, ergibt sich zunächst $\Phi(x^2) = 5x^2$. Nun drückt man $\Phi(x)$ als Linearkombination der Basis, d.i. von $1, x, x^2, x^3$ aus, und bekommt

   $$\Phi(x^2) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 5 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3.$$

   Die Koeffizienten in Reihenfolge der Basiselemente als Spalte gelesen, ergeben $(0, 0, 5, 0)^T$ und das ist die 3.te Spalte der Matrixdarstellung.

   (c) (2) Warum gibt es für beliebiges kubisches Polynom q eine kubische Polynomlösung p von $x^2p'' + 2xp' - p = q$?
   Antwort: Weil die Matrix invertierbar ist.

2. Gegeben sei die Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

   (a) (5) Man bestimme alle Eigenwerte von A.
   Antwort: Die Blockstruktur 2×2-Block links oben, und der 3×3-Block

   $$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & -5 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 5 & -3-\lambda \end{pmatrix},$$

   der selbst eine Blockstruktur aufweist, ergeben das charakteristische Polynom in bereits faktorisierter Form, nämlich $p(\lambda) = -(\lambda^2 + 4\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$. Hier liest man als Lösungen für die Eigenwerte $\{-1, -3, -1, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})\}$ als Wurzeln der Faktoren ab.

(b) (5) Für den betragsgrößten Eigenwert gebe man eine Basis des zugehörigen Eigenraumes, sowie dessen Dimension an.

Antwort: Der betragsgrößte Eigenwert ist -3. Man findet $(5,-5,24,1,10)^T$ als Eigenvektor und die Dimension des Eigenraumes ist 1

3. Es sei durch $144 = -3x^2 + 23y^2 + 26\sqrt{3}xy$ die Gleichung eines Kegelschnittes in der Ebene gegeben.

   (a) (6) Man gebe eine Drehmatrix O an, sodaß nach Koordinatentransformation $\vec{x} = O\vec{u}$ die Gleichung die Gestalt

   $$1 = \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}$$

   hat, wobei $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Welche Werte haben a und b?

   Antwort: $a = 2, b = 3$. Als Drehmatrix eignet sich $O = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) (3) Man gebe den Drehwinkel der Matrix O und die Richtungen und Längen der Achsen des Kegelschnittes an. Liegt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel vor?

   Antwort: Der Drehwinkel ist 60^o. Er ergibt sich aus der Gleichung $1 = O_{11}+O_{22} = 2\cos\phi$. Die Richtungen der Halbachsen stimmen mit den Spalten von O überein.

   (c) (1) Man skizziere den Kegelschnitt in der (x,y)-Ebene samt Asymptoten.

   Hinweis: Hauptachsentransformation.

   Antwort: Der Drehwinkel ist 60^o, wobei das (u,v)-System entgegen dem Uhrzeiger in das (x,y)-System gedreht wird. Im (u,v)-System hat man in u-Richtung a und in v-Richtung b abzutragen und bekommt damit die Halbachsen der Hyperbel. Etc.

4. Es sei K die Menge im ersten Quadranten, deren Punkte (x,y) den Ungleichungen $(2+y)^2 \leq x$ und $4y+5 \geq x$ genügen.

   (a) (4) Eine Skizze der Figur K möge angefertigt werden.

   Antwort: Eine nach rechts geöffnete Parabel, eine Gerade, die in $(1,-1)$ und $(9,1)$ die Parabel schneidet, und die x-Achse beranden den Bereich

   (b) (4) Es soll $J := \int_K f(x,y)\,d(x,y)$ als iteriertes Integral der Form

   $$J = \int_?^? dy \int_?^? f(x,y)\,dx$$

   ausgedrückt werden.

   Antwort: Es ergibt sich $J = \int_0^1 dy \int_{(2+y)^2}^{4y+5} f(x,y)\,dx$

   (c) (2) Man berechne den Flächeninhalt von K.

   Antwort: Es ist $\int_0^1 dy \int_{(2+y)^2}^{4y+5} dx = \cdots = \frac{2}{3}$

Nachname:	Matrnr:	30.3.2010 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} + 2\dot{y} - x + 2y &= -2 \\ 2\dot{x} - 3\dot{y} + 8x &= 10e^t \end{aligned}$$

Dieses System läßt sich unter Benützung von Matrizen und Vektoren im $I\!R^2$ in der Form $A\dot{\vec{x}} + B\vec{x} = \vec{b}e^t + \vec{c}$ anschreiben.

(a) (4) Wie lauten A, B, $\vec{b}$ und $\vec{c}$?

Antwort: Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) (4) Auf welches System linearer Gleichungen für $\vec{u}$, $\vec{v}$ im $I\!R^2$ führt der Lösungsansatz $\vec{x}(t) = \vec{u}e^t + \vec{v}$?

Antwort: $(A + B)\vec{u} = \vec{b}$ und $B\vec{v} = \vec{c}$

(c) (2) Ermitteln Sie eine partikuläre Lösung des Systems und überprüfen Sie diese.

Antwort: Wenn man den Ansatz verwendet, findet man $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Im $I\!R^4$ sind die Vektoren $\vec{a} := (1, 0, 0, 1)^T$, $\vec{b} := (1, -1, 1, -1)^T$ und $\vec{c} := (1, 1, -1, 0)^T$ gegeben.

(a) (4) Man ermittle eine Orthogonalbasis des Teilraumes $U = \mathcal{L}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Antwort: Man erkennt sofort, daß $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt. Somit genügt es, die übliche Formel $\vec{c} - P_{\mathcal{L}(\vec{a},\vec{b})}(\vec{c}) = \vec{c} - \frac{(\vec{c},\vec{a})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} - \frac{(\vec{c},\vec{b})}{||\vec{b}||^2}\vec{b}$ zu verwenden, um den dritten Vektor der Orthogonalbasis von U, nämlich $\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu finden.

(b) (3) Man bestimme die Orthogonalprojektion von $\vec{c}$ in den von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugten linearen Teilraum.

Antwort: Es ist dies geradewegs jener Vektor, den man von $\vec{c}$ in (a) abgezogen hat, nämlich $\frac{(\vec{c},\vec{a})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} + \frac{(\vec{c},\vec{b})}{||\vec{b}||^2}\vec{b} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) (3) Man ermittle eine Orthonormalbasis des Teilraumes $W := \mathcal{L}(\vec{a}, \vec{c})$.

Antwort: Es ergibt sich $\vec{c} - \frac{(\vec{c},\vec{a})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} = \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als in W liegender auf $\vec{a}$ orthogonaler Vektor. Nach Normieren ergibt sich als Orthonormalbasis von W

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x,y) := \frac{1}{x^2+2xy+2y^2+4x+6y+5}$.

   (a) (4) Man bestimme alle Punkte $\vec{x}_0$ mit $\nabla g(\vec{x}_0) = \vec{0}$, wobei $g := 1/f$ ist.
   Antwort: Es ist $\nabla g = 2\begin{pmatrix} x+y+2 \\ x+2y+3 \end{pmatrix}$ und einzig mögliche Lösung $\vec{x}_0 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) (3) Für den in (a) gefundenen Kandidaten $\vec{x}_0$ betrachte man die Funktion $h(\vec{u}) := f(\vec{x}_0 + \vec{u})$. Wenn $\vec{u} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ist, wie lautet die Funktion $h(u,v)$?
   Antwort: Es ist dies der Ausdruck $h(u,v) = \frac{1}{u^2+2uv+2v^2}$

   (c) (3) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von h beziehungsweise f. (Ignorierbarer Hinweis: man überprüfe, ob der Nenner von h positiv definit ist)
   Antwort: Es ist $u^2 + 2uv + 2v^2$ positiv definit, weil die Hauptminoren 1, 1 lauten, somit beide positiv sind. Es ergibt sich $D(h) = I\!R^2 \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ und daraus wegen $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{u}$ sofort $D(f) = I\!R^2 \setminus \{\vec{x}_0\}$

4. Von einer Vollkugel im $I\!R^3$ mit Mittelpunkt $M(2,0,0)$ und Radius 2 wird ein Kreiszylinder mit Mittelachse die z-Achse und Radius $r = 2\sqrt{2}$ "weggefräst" (ein Bohrer mit Radius r wird entlang der z-Achse senkrecht geführt, wobei ein Teil der Vollkugel entsprechend entfernt wird).

   (a) (4) Skizzieren Sie die Ansicht des entstehenden Bereichs in Richtung x-Achse, und z-Achse, und verfertigen Sie eine Skizze einer Schrägansicht.
   Antwort: Im Grundriß sieht man den von $x^2 + y^2 = 8$ und $(x-2)^2 + y^2 = 2$ begrenzten "Sichelmond". Im Kreuzriß (Projektion in die (x,z)-Ebene) sieht man eine vom Kreis $(x-2)^2 + z^2 = 2$ und der Parabel $x = 2 + \frac{1}{4}y^2$ begrenzte Figur.

   (b) (2) Bestimmen Sie eine möglichst kleine Zahl von Ungleichungen, welchen die Punkte des Bereichs genügen müssen.
   Antwort: $(x-2)^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ und $x^2 + y^2 \geq 8$

   (c) (2) Welchen Bedingungen genügen die Punkte der Projektion W des Bereichs in die (y,z)-Ebene in Richtung der x-Achse?
   Antwort: $16(y^2 + z^2) + z^4 \leq 64$

(d) (1) Bestimmen Sie $a(y,z)$ und $b(y,z)$ in der expliziten Formel zur Volumsberechnung

$$V = \int_W d(y,z) \int_{a(y,z)}^{b(y,z)} dx$$

Antwort: $V = \int_{16(y^2+z^2)+z^4 \leq 64} d(y,z) \int_{\sqrt{8-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2-z^2}} dx$

(e) (1) Man gebe y- und z-Koordinate des Schwerpunkts an.

Antwort: Beide Koordinaten müßen aus Symmetriegründen Null sein

Nachname:	Matrnr:	15.2.2010 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem $2\ddot{x}+3x-5y=4e^{-t}$, $2\ddot{y}-5x+3y=4e^{-t}$.

   (a) (3) Das System kann in der Form $A\ddot{\vec{x}}+B\dot{\vec{x}}+C\vec{x}=\vec{a}e^{-t}$ für skalare 2×2-Matrizen A, B, C, $\vec{x}:=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und Vektor $\vec{a}$ im $I\!R^2$ angeschrieben werden.
   Man gebe die Matrizen A, B, C, sowie den Vektor $\vec{a}$ an.
   Antwort: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\ddot{x}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{\vec{x}}+\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\vec{x}=4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}$

   (b) (3) In der allgemein gehaltenen Gleichung $A\ddot{\vec{x}}+B\dot{\vec{x}}+C\vec{x}=\vec{a}e^{-t}$ möchte jemand eine Lösung durch den Ansatz $\vec{x}=\vec{u}e^{-t}$ mit $\vec{u}$ Vektor im $I\!R^2$ auffinden. Welches Gleichungssystem für $\vec{u}$ entsteht?
   Antwort: Man findet durch "Koeffizientenvergleich der Terme mit e^{-t}" recht schnell $(A-B+C)\vec{u}=\vec{a}$.

   (c) (2) Finden Sie eine Lösung des homogenen Systems der Form $\vec{x}(t)=\vec{u}e^{\lambda t}$ mit negativem λ.
   Antwort: Man findet $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}$.

   (d) (2) Falls möglich, finde man eine Lösung $\vec{x}(t)=\vec{u}e^{-t}$ für das inhomogene System. Falls dies nicht möglich ist, gebe man eine Begründung.
   Antwort: Nicht lösbar: es ist -1 ein "verallgemeinerter Eigenwert", d.h. es ist für $\lambda:=-1$ eine nicht triviale Lösung des homogenen Systems in der Form $\vec{x}(t)=\vec{u}e^{-t}$. Somit liegt *Resonanz* vor. Das erkennt man auch, weil $A-B+C=O$ auf der linken Seite entsteht.

2. Es sei $f: I\!R^3 \to I\!R^3$ durch die Vorschrift $f(\vec{x}):=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\times\vec{x}$ gegeben. Diese Abbildung ist linear.

   (a) (3) Bezüglich der kanonischen Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist die zugehörige Matrix A zu ermitteln.
   Antwort: Man wendet f auf die Basisvektoren an und bekommt der Reihe nach die Spalten von A, in unserem Fall ist $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) (2) Man bestimme den Kern von f.

Antwort: Alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, was nicht verwundert!

(c) (2) Man bestimme das Bild von f.

Antwort: Es ist dies der zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonale Raum, eine Basis ist z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) (2) Man bestimme alle Lösungen $\vec{x}$ von $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Antwort: $\vec{x} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{u}$, wobei $\vec{u} \in \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp}$ beliebig wählbar ist.

(e) (1) Welchen Rang hat A, welche Dimension haben Kern und Bild von A.

Antwort: A hat Rang 2, der Kern Dimension 1, und das Bild Dimension 2. Wieder einmal bestätigt sich 1+2=3!

3. Es sollen die Seitenlängen a, b, c eines rechteckigen Quaders (Streichholzschachtel!) mit gegebener Oberfläche $O = 1$ derart bestimmt werden, daß das Volumen möglichst groß ist.

(a) (5) Die Aufgabe ist als Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen zu beschreiben.

Antwort: $f(a, b, c) = abc$ unter den Nebenbedingungen $g(a, b, c) := 2(ab + ac + bc) - 1 = 0$ und $a \geq 0$,$b \geq 0$, sowie $c \geq 0$ zu maximieren.

(b) (5) Man ermittle alle Kandidaten von Lösungen.

Antwort: Die durch die Nebenbedingung gegebene Fläche hat keine singulären Punkte, deshalb findet man alle Kandidaten mittels Lagrangeverfahren: $F(a, b, c, \lambda) = abc - \lambda(2(ab + ac + bc) - 1)$. Differenzieren nach a, b, c und Nullsetzen ergeben $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Ein ebenes Plättchen B werde in der (x, y)-Ebene durch $B := \{(x, y) \mid 0 \leq y^2 \leq x \leq y\}$ beschrieben.

(a) (3) Eine Skizze möge angefertigt werden.

(b) (2) Man berechne die von B eingenommene Fläche A.

Antwort: $\frac{1}{6}$

(c) (5) Man berechne die Koordinaten des Schwerpunkts unter der Annahme homogener Massendichte. (Zur Erinnerung, der Schwerpunkt wird durch $\vec{S} := \frac{1}{A} \int_B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} d(x, y)$ berechnet.)

Antwort: $\vec{S} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Nachname:	Matrnr: (bitte deutlich)	11.12.2009 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y + z - 1\\ \dot{y} &= 2x + y + 3z - 1\\ \dot{z} &= 4x - y + 7z - 1\end{aligned}$$

   (a) (2) Das System läßt sich in der kompakten Form

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$$

   anschreiben. Wie lauten die Matrix A und der Vektor $\vec{b}$?
   Antwort: Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   (b) (2) Man bestimme den Rang von A, sowie jenen der erweiterten Matrix $(A|\vec{b})$.
   Antwort: Beide Matrizen haben Rang 2

   (c) (4) Man bestimme alle Lösungen $\vec{x}$ des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} + \vec{b} = \vec{0}$.
   Antwort: Elimination liefert als allgemeine Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} u$, wobei $u \in \mathbb{R}$ beliebig wählbar ist. (Anmerkung: diese Darstellung der allgemeinen Lösung ist nicht eindeutig. Die partikuläre Lösung kann von der hier gefundenen um eine Lösung der homogenen Gleichung abweichen, diese wiederum durch ein Vielfaches des hier gefundenen Vektors ausgedrückt werden)

   (d) (2) Welche stationären Lösungen $\dot{\vec{x}} = \vec{0}$ hat das Differentialgleichungssystem? (Jede solche Lösung ist durch $\dot{\vec{x}} = \vec{0}$ bestimmt)
   Antwort: Jede solche Lösung $\vec{x}$ ist zugleich Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} + \vec{b} = \vec{0}$. Die Antwort lautet gleich zu jener in c)

   (e) (1) Geben Sie alle stationären Lösungen $\vec{x}$ des DGL-Systems mit $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an.
   Antwort: Um stationäre Lösung zu sein, muß diese Lösung *konstant* sein. Damit ist sie Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} + \vec{b} = \vec{0}$. Einsetzen zeigt, daß dies der Fall ist, also ist die gesuchte Lösung gleich $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} u$

2. Es seien $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ Vektoren im $I\!R^{12}$ und man kennt die Werte der inneren Produkte $\vec{a}\cdot\vec{a} = 4$, $\vec{b}\cdot\vec{b} = 9$, $\vec{c}\cdot\vec{c} = 16$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, $\vec{a}\cdot\vec{c} = 4$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$.

   (a) (1) Man berechne den Wert des inneren Produkts $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$.
   Antwort: -5

   (b) (4) Man zeige, daß die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sind.
   Antwort: Aus $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$ ergibt sich durch Bilden der inneren Produkte mit jeweils $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ das Gleichungsystem

   $$4\lambda + 0\mu + 4\nu = 0,\ \ 0\lambda + 9\mu + 0\nu = 0,\ \ 4\lambda + 0\mu + 16\nu = 0,$$

   woraus sich sofort $\lambda = \mu = \nu = 0$ ergibt, also die lineare Unabhängigkeit der Vektoren

   (c) (5) Mittels Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren soll von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ausgehend, ein Orthogonalsystem (OGS) ermittelt werden. Die Vektoren des OGS sind als Linearkombinationen der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ anzuschreiben.
   Antwort: $\vec{u}_1 = \vec{a}$. $\vec{u}_2 = \vec{b} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a} = \vec{b}$. $\vec{u}_3 = \vec{c} - \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a} - \frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b} = \vec{c} - \frac{4}{4}\vec{a} - \frac{0}{16}\vec{b} = -\vec{a} + \vec{c}$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{1+xy}{\cos(x+2y)}$

   (a) (3) Man skizziere die Menge $A := \{(x, y) \mid |x + 2y| < \frac{\pi}{2}\}$ und zeige, daß A im Definitionsbereich von f liegt.
   Antwort: Es entsteht ein "Streifen", der von Geraden begrenzt wird, die jeweils durch $(\frac{\pi}{2}, 0)$ und $(0, \frac{\pi}{4})$ bzw. $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ und $(0, -\frac{\pi}{4})$ laufen. Die Funktion ist dort wohldefiniert, weil der Nenner nicht verschwinden kann.

   (b) (4) Man bestimme die Hessematrix $H(f)$ an der Stelle $(0, 0)$.
   Antwort: $H(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Beim Differenzieren darf man sich halt nicht verrechnen. Etwas einfacher ist Reihenentwicklung:

   $$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1+xy}{1-\frac{1}{2}(x+2y)^2+\cdots} \\ &= (1 + xy)(1 + \tfrac{1}{2}(x + 2y)^2 + \cdots) \\ &= 1 + xy + \tfrac{1}{2}(x^2 + 4xy + 4y^2) + \cdots \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}(x^2 + 6xy + 4y^2) + \cdots \end{aligned}$$

   Hiebei sind Glieder ab dritter Ordnung vernachlässigt worden. Hieraus liest man aus der aus den quadratischen Gliedern bestehenden *quadratischen Form* (unter Weglassung des Vorfaktors $\frac{1}{2}$) die Hessematrix ab

   (c) (3) Man beweise bzw. widerlege, daß f an der Stelle $(0, 0)$ ein lokales Maximum besitzt.
   Antwort: Es ist zwar $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$, jedoch hat die Hessematrix die Hauptminoren $1 > 0$ und $\det H(f) = 4 - 9 = -5 < 0$, also liegt ein *Sattelpunkt* auf dem Graphen bei $(0, 0)$ vor, sodaß es sich um kein Extremum handelt

4. Im $\mathbb{R}^2$ sei K die ebene Figur, welche im ersten Quadranten durch die Bedingungen $x^2 + y^2 \leq 3$, $xy \geq 1$ bestimmt ist.

   (a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

   (b) (6) Es soll $J := \int_K f(x,y)\,d(x,y)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? dx \int_?^? f(x,y)\,dy$$

   ausgedrückt werden.

   Antwort: Als Skizze erhält man ein unter 45 Grad geneigtes "linsenartiges" Gebilde. Als Ergebnis findet man das umgeformte Integral

$$J = \int_{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}^{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}} dx \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Nachname:	Matrnr: (bitte deutlich)	30.10.2009 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) (4) Man bestimme das charakteristische Polynom von A
   Antwort: Die Blockstruktur der 2×2-Blöcke ergibt $(\lambda^2 - 2\lambda + 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 16\lambda^2 - 22\lambda + 15$
   (b) (3) Man bestimme alle Eigenwerte von A
   Antwort: Man muß nur quadratische Gleichungen lösen: Es ergeben sich $1 \pm i\sqrt{2}$ und $2 \pm i$
   (c) (3) Für welche $\vec{b} \in \mathbf{C}^4$ ist die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
   Antwort: Für alle, da A regulär ist.

2. Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem
$$\begin{array}{lcl} \dot{x} + 2\dot{y} - x + 2y & = & t \\ 2\dot{x} - 3\dot{y} + 8x & = & e^t \end{array}$$
   Dieses System läßt sich unter Benützung von Matrizen und Vektoren in der Form $A\dot{\vec{x}} = B\vec{x} + \vec{b}(t)$ anschreiben.
   (a) (4) Wie lauten A, B und $\vec{b}$?
   Antwort: Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$
   (b) (6) Wie kann das System in der Form $\dot{\vec{x}} = C\vec{x} + \vec{c}(t)$ dargestellt werden? Wie lauten C und $\vec{c}(t)$?
   Antwort: Da A invertierbar ist, ergibt sich $\dot{\vec{x}} = A^{-1}(B\vec{x} + \vec{b}(t))$. Es ist $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Somit ist $C = A^{-1}B = \cdots = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -13 & -6 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}(t) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$.

3. Jemand benötigt von der Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(x, y, z) = \frac{1+x+2z-4y^2}{3-4x+z^3}$ mit Anschlußstelle $P(0, 0, 0)$ nachstehende Koeffizienten:

(a) (1) Wie lautet das konstante Glied?

Antwort: $\frac{1}{3}$

(b) (3) Wie lauten die Koeffizienten von x, y und z?

Antwort: $\frac{7}{9}, 0, \frac{2}{3}$

(c) (6) Wie lauten die Koeffizienten von xy, yz und z^2?

Antwort: Alle Null

Anmerkung: Es ist $f(x,y,z) = \frac{1}{3}(1+x+2z-4y^2)\frac{1}{1-\frac{4}{3}x+o(3)} = \frac{1}{3}(1+x+2z-4y^2)(1+\frac{4}{3}x+o(3))$ (geometrische Reihe $\frac{1}{1-t} = 1+t+o(t^2)$ mit $t := \frac{4}{3}x+o(3)$ verwenden). Hierin soll $o(3)$ alle Glieder von der Ordnung mindestens 3 bedeuten. Nach Ausmultiplizieren ergeben sich die gesuchten Koeffizienten wie oben angegeben.

vgl. auch 6.9 in

http://www.math.tuwien.ac.at/~herfort/ET/M2_SS07/UE_ANGABEN/ue_alles.pdf

4. Es sei K die Menge der Punkte $P(x,y)$, deren Koordinaten den Ungleichungen $x^2+y^2 \leq 1$ und $x+y \geq 1$ genügen.

(a) (4) Eine Skizze der Figur K möge angefertigt werden.

Antwort: K ist jener Kreisabschnitt des Einheitskreises, der von der durch Punkte $(1,0)$ und $(0,1)$ verlaufenden Sehne abgetrennt wird

(b) (4) Es soll $J := \int_K f(x,y)\,d(x,y)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? dy \int_?^? f(x,y)\,dx$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Es ergibt sich $J = \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$

(c) (2) Man berechne den Flächeninhalt von K.

Antwort: Der Viertelkreis hat Fläche $\frac{1}{4}1^2\pi = \frac{\pi}{4}$ und das Dreieck Fläche $\frac{1}{2}$. Als Flächeninhalt von K findet man somit $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

Nachname:	Matrnr:	8.10.2009 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem $2\ddot{x}+3x-5y=\cos t-5\sin t$, $2\ddot{y}-5x+3y=-5\cos t+\sin t$.

   (a) (3) Das System kann in der Form $A\ddot{\vec{x}}+B\dot{\vec{x}}+C\vec{x}=\vec{a}\cos t+\vec{b}\sin t$ für skalare 2×2-Matrizen A, B, C, $\vec{x}:=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^2$ angeschrieben werden.
   Man gebe die Matrizen A, B, C, sowie Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ an.
   Antwort: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\ddot{\vec{x}}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{\vec{x}}+\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t$

   (b) (3) In der allgemein gehaltenen Gleichung $A\ddot{\vec{x}}+B\dot{\vec{x}}+C\vec{x}=\vec{a}\cos t+\vec{b}\sin t$ möchte jemand eine Lösung durch den Ansatz $\vec{x}=\vec{u}\cos t+\vec{v}\sin t$ mit $\vec{u}$, $\vec{v}$ Vektoren im $\mathbb{R}^2$ auffinden. Welches Gleichungssystem in $\vec{u}$, $\vec{v}$ entsteht?
   Antwort: Man findet durch "Koeffizientenvergleich der Terme in $\cos t$ bzw. $\sin t$" recht schnell $(-A+C)\vec{u}+B\vec{v}=\vec{a}$, $-B\vec{u}+(-A+C)\vec{v}=\vec{b}$.

   (c) (1) Man finde $\vec{u}$ und $\vec{v}$ im vorliegenden Beispiel.
   Antwort: Es ist $\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (d) (2) Wie lautet die Lösung $\vec{x}$ in der Form $x(t)=?$ bzw. $y(t)=?$.
   Antwort: $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$.

   (e) (1) Zeigen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösung durch Probe.

2. Es sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ durch die Vorschrift $f(\vec{x}):=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\times\vec{x}$ gegeben. Diese Abbildung ist linear.

   (a) (3) Bezüglich der kanonischen Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist die zugehörige Matrix A zu ermitteln.
   Antwort: Man wendet f auf die Basisvektoren an und bekommt der Reihe nach die Spalten von A, in unserem Fall ist $A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) (2) Man bestimme den Kern von f.
   Antwort: Alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, was nicht verwundert!

(c) (2) Man bestimme das Bild von f.

Antwort: Es ist dies der zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ orthogonale Raum, eine Basis ist z.B. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) (1) Welchen Rang hat A, welche Dimension haben Kern und Bild von A.

Antwort: A hat Rang 2, der Kern Dimension 1, und das Bild Dimension 2. Wieder einmal bestätigt sich 1+2=3!

3. Es sollen die Seitenlängen a, b, c eines rechteckigen Quaders (Streichholzschachtel!) mit gegebenem Volumen $V = 1$ derart bestimmt werden, daß die Oberfläche möglichst klein ist.

(a) (5) Die Aufgabe ist als Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen zu beschreiben.

Antwort: $f(a,b,c) = ab+bc+ac$ unter den Nebenbedingungen $g(a,b,c) := abc-1 = 0$ und $a \geq 0$,$b \geq 0$, sowie $c \geq 0$ zu minimieren.

(b) (5) Man ermittle alle Kandidaten von Lösungen.

Antwort: Die durch die Nebenbedingung gegebene Fläche hat keine singulären Punkte, deshalb findet man alle Kandidaten mittels Lagrangeverfahren: $F(a,b,c,\lambda) = ab + ac + bc - \lambda(abc - 1)$. Differenzieren nach a, b, c und Nullsetzen ergeben $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Ein ebenes Plättchen B werde in der (x, y)-Ebene durch $B := \{(x,y) \mid 0 \leq x^2 \leq y \leq x\}$ beschrieben.

(a) (3) Eine Skizze möge angefertigt werden.

(b) (2) Man berechne die von B eingenommene Fläche A.

Antwort: $\frac{1}{6}$

(c) (5) Man berechne die Koordinaten des Schwerpunkts unter der Annahme homogener Massendichte. (Zur Erinnerung, der Schwerpunkt wird durch $\vec{S} := \frac{1}{A} \int_B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} d(x,y)$ berechnet.)

Antwort: $\vec{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Nachname:	Matrnr:	18.9.2009 M2-ET (Herfort)

1. Es sei $f(x,y) := x^2 + y^2$ und $g(x,y) = 7x^2 - 2xy + 7y^2 - 1$ gegeben.

   (a) (3) Stellen Sie jene Gleichungen auf, die zur Bestimmung des Minimums von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ nötig sind.

   Antwort:
$$\vec{0} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   (b) (5) Formulieren Sie die Gleichungen in ein Eigenwertproblem um und lösen Sie es.

   Antwort: $\lambda = -\frac{1}{\mu}$ $\mu = 8, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\mu = 6, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) (2) Skizzieren Sie die Menge der Punkte mit $g(x,y) = 0$. Welche geometrische Deutung hat die Aufgabe.

   Antwort: Extrema des Abstandes eines Punktes auf der Ellipse mit der Gleichung $g(x,y) = 0$.

2. Gegeben ist Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) (4) Man bestimme das charakteristische Polynom von A

   Antwort: Die Blockstruktur der 2×2-Blöcke ergibt $(\lambda^2 - 2\lambda + 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 16\lambda^2 - 22\lambda + 15$

   (b) (3) Man bestimme alle Eigenwerte von A

   Antwort: Man muß nur quadratische Gleichungen lösen: Es ergeben sich $1 \pm i\sqrt{2}$ und $2 \pm i$

   (c) (3) Für welche $\vec{b} \in \mathbf{C}^4$ ist die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

   Antwort: Für alle, da A regulär ist.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x,y) := \frac{1}{x^2+2xy+2y^2+4x+6y+5}$.

   (a) (4) Man bestimme alle Punkte $\vec{x}_0$ mit $\nabla g(\vec{x}_0) = \vec{0}$, wobei $g := 1/f$ ist.

   Antwort: Es ist $\nabla g = 2 \begin{pmatrix} x+y+2 \\ x+2y+3 \end{pmatrix}$ und einzig mögliche Lösung $\vec{x}_0 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) (3) Für den in (a) gefundenen Kandidaten $\vec{x}_0$ betrachte man die Funktion $h(\vec{u}) := f(\vec{x}_0 + \vec{u})$. Wenn $\vec{u} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ist, wie lautet die Funktion $h(u, v)$?

Antwort: Es ist dies der Ausdruck $h(u, v) = \frac{1}{u^2+2uv+2v^2}$

(c) (3) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von h beziehungsweise f. (Ignorierbarer Hinweis: man überprüfe, ob der Nenner von h positiv definit ist)

Antwort: Es ist $u^2 + 2uv + 2v^2$ positiv definit, weil die Hauptminoren 1, 1 lauten, somit beide positiv sind. Es ergibt sich $D(h) = I\!R^2 \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ und daraus wegen $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{u}$ sofort $D(f) = I\!R^2 \setminus \{\vec{x}_0\}$

4. Die Punkte (x, y) der ebenen Menge K sollen durch die Ungleichungen $(2+y)^2 \leq x$ und $4y + 5 \geq x$ festgelegt sein.

(a) (4) Eine Skizze der Figur K möge angefertigt werden.

Antwort: Eine nach rechts geöffnete Parabel mit Scheitel in (0,-2), und eine Gerade, die in $(1, -1)$ und $(9, 1)$ die Parabel schneidet, beranden den Bereich. Der Bereich ist sehr schmal

(b) (4) Es soll $J := \int_K f(x, y)\, d(x, y)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? dy \int_?^? f(x, y)\, dx$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Es ergibt sich $J = \int_{-1}^{1} dy \int_{(2+y)^2}^{4y+5} f(x, y)\, dx$

(c) (2) Man berechne den Flächeninhalt von K.

Antwort: Es ist $\int_{-1}^{1} dy \int_{(2+y)^2}^{4y+5} dx = \cdots = \frac{4}{3}$

Nachname:	Matrnr:	28.8.2009 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -3x - 4y + t \\ \dot{y} &= 2x + 3y + 1\end{aligned}$$

Dieses System läßt sich unter Benützung von Matrizen und Vektoren in der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$ anschreiben.

(a) (2) Wie lauten A und $\vec{b}$?
Antwort: Es ist $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) (1) Man bestimme das charakteristische Polynom von A
Antwort: $\lambda^2 - 1$

(c) (4) Zu jedem Eigenwert bestimme man einen Eigenvektor.
Antwort: Zu 1 kann $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und zu -1 der Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als zugehöriger Eigenvektor gefunden werden. Jede andere Lösung ist jeweils skalares Vielfaches.

(d) (2) Welche Matrix S erlaubt Diagonalisierung von A?
Antwort: $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, die Matrix, deren Spalten die gefundenen Eigenvektoren sind.

(e) (1) Wie lautet das entkoppelte Differentialgleichungssystem?
Antwort: Wenn $\vec{x} = S\vec{u}$ die Koordinatentransformation ist, so ergibt sich $\dot{\vec{u}} = S^{-1}AS\vec{u} + S^{-1}\vec{b}$, also nach kurzer Rechung mit dem angegebenen S

$$\dot{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{u} + \begin{pmatrix} t+2 \\ -t-1 \end{pmatrix}$$

oder, wenn $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ so hat man die skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u + t + 2 \\ \dot{v} &= -v - t - 1\end{aligned}$$

2. Es sei auf $I\!R^4$ das übliche innere Produkt durch $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \sum_{i=1}^4 a_i b_i$ gegeben. Weiters seien

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (2) Ist U ein Orthonormalsystem (kurz ONS)? Begründen Sie die Antwort.
Antwort: N: Es liegt zwar ein Orthogonalsystem vor, jedoch müßten alle Vektoren in U Länge 1 haben. Der erste der Vektoren hat Länge $\sqrt{3}$

(b) (3) Man gebe ein ONS V mit $\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(V)$ an.
Antwort: Man erkennt schnell, daß U ein Orthogonalsystem ist. Die Längen der Vektoren sind der Reihe nach $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ und 1. Somit kann als Antwort

$$V = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben werden.

(c) (3) Für $\vec{u} \in U$ berechne man die Größen $\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle$.
Antwort: Es ergibt sich (nach Nummerierung der Elemente in U in der angegebenen Reihenfolge)

$$\langle \vec{u}_1, \vec{a} \rangle = 1, \langle \vec{u}_2, \vec{a} \rangle = 2, \langle \vec{u}_3, \vec{a} \rangle = -1$$

(d) (2) Man bestimme $\vec{y} \in \mathcal{L}(U)$ mit $\|\vec{a} - \vec{y}\|$ minimal.
Antwort: Dazu muß man wissen, daß

$$\vec{y} := \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle \vec{u}_i, \vec{a} \rangle}{\|\vec{u}_i\|^2} \vec{u}_i$$

(die verallgemeinerte Fourierreihe) diese Aufgabe löst. Aus dem bereits Berechneten ergibt sich

$$\vec{y} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{\cos(x-y)}{1+y^2}$

(a) (3) Man gebe den Definitionsbereich von f an.
Antwort: Die Funktion ist für alle $x, y \in \mathbb{R}$ definiert, also ist $D(f) = \mathbb{R}^2$.

(b) (4) Man berechne die partiellen Ableitungen $f_x(0, 0)$ und $f_y(0, 0)$.
Antwort: $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

(c) (3) Man bestimme die Taylorreihe bis Glieder einschließlich zweiter Ordnung bei Entwicklung von f an der Stelle $(0, 0)$.
Antwort: Es ist $f(x, y) = (1 - \frac{1}{2}(x - y)^2 + \ldots)\frac{1}{1+y^2} = (1 - \frac{1}{2}(x - y)^2 + \ldots)(1 - y^2 + \ldots)$ (geometrische Reihe verwendet und Glieder ab 3.Ordnung vernachlässigt). Ausmultiplizieren und Vernachlässigen der Glieder ab 3.Ordnung ergibt

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(-x^2 + 2xy - 3y^2) + \ldots$$

4. Im $I\!R^2$ sei K die ebene Figur, welche im ersten Quadranten durch die Bedingungen $x^2+y^2 \le 3$, $xy \ge 1$ bestimmt ist.

(a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

(b) (6) Es soll $J := \int_K f(x,y)\,d(x,y)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? dx \int_?^? f(x,y)\,dy$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Als Skizze erhält man ein unter 45 Grad geneigtes "linsenartiges" Gebilde. Als Ergebnis findet man das umgeformte Integral

$$J = \int_{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}^{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}} dx \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Zusatz: Man zeigt leicht die Vereinfachungen $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nachname:	Matrnr:	31.7.2009 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' - 2y' + y = x^2$. Jemand versucht den Ansatz $y = a + bx + cx^2$, um eine *partikuläre* Lösung zu finden.

   (a) (3) Auf welches lineare Gleichungssystem $A\vec{a} = \vec{b}$ führt der Ansatz, wenn $\vec{a} := (a, b, c)^T$ ist? Man gebe die Systemmatrix A an! Wie lautet die "rechte Seite" $\vec{b}$?
   Antwort: Einsetzen und Koeffizientenvergleich ergibt (bis auf Zeilenumformungen)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (b) (3) Ermitteln Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems.
   Antwort: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (c) (3) Auf welche Lösung der DGL führt der Ansatz?
   Antwort: $y = 6 + 4x + x^2$

   (d) (1) Zeigen Sie durch Probe die Korrektheit der von Ihnen gefundenen Lösung.

2. Es sei die von $a \in \mathbf{C}$ abhängige Matrix

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^3 & 1+a \\ 2 & a & 2 & a \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

   gegeben.

   (a) (2) Man berechne den Wert der Determinante $\det(A(a))$.
   Antwort: Die Blockstruktur der Matrix (2×2 Blöcke entlang der Hauptdiagonale) benützend, ergibt sich sofort $\det(A(a)) = a(-7 - a) = -7a - a^2$

   (b) (2) Man bestimme die Menge M aller $a \in \mathbf{C}$, für welche $\det(A(a)) = 0$ ist.
   Antwort: Es ergibt sich $M := \{0, -7\}$

   (c) (2) Für welche $a \in \mathbf{C}$ ist $A(a)$ eine reguläre Matrix?
   Antwort: Genau für jene, für die $\det(A(a)) \neq 0$ gilt. Also für alle $a \notin M$

   (d) (4) Für das betragskleinste a in M bestimme man eine Basis des Kerns von $A(a)$.

Antwort: Man muß somit den Kern der Matrix

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Eine Basis ist durch $\{(0,1,0,0)^T\}$ gegeben

3. Zwischen den "Größen" x, y, z bestehe die Beziehung $-1 + x + yz + z^3 = 0$. Jemand möchte $z(x,y)$ näherungsweise in der Form $z(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots$ darstellen.

   (a) (3) Man bestimme $z(0,0)$ und a_{00}.

   Antwort: Da $-1 + 0 + 0 \cdot z(0,0) + z(0,0)^3 = 0$ gilt, ist $z(0,0) = 1$ und somit $z(0,0) = a_{00} = 1$

   (b) (3) Man bestimme $z_y(0,0)$ und a_{01}.

   Antwort: Implizites Differenzieren führt auf $0 + z + yz_y + 3z^2 z_y = 0$, und da $z(0,0) = 1$ ist, findet man $z_y(0,0) = -\frac{1}{3}$. Somit ist $a_{01} = -\frac{1}{3}$

   (c) (3) Man bestimme $z_{xy}(0,0)$.

   Antwort: Durch implizites Differenzieren findet man zunächst $6zz_y z_x + 3z^2 z_{xy} + z_x + yz_{xy} = 0$, sowie $z_x(0,0) = -\frac{1}{3}$. Danach findet man $z_{xy}(0,0) = -\frac{1}{9}$

   (d) (1) Man gebe a_{11} an.

   Antwort: Hat man $z(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots$, so ergäbe sich $-\frac{1}{9} = z_{xy}(0,0) = 2a_{11}$, somit ist $a_{11} = \frac{1}{2} z_{xy}(0,0) = -\frac{1}{18}$

4. Jemand möchte das Integral $I := \int_B f(x,y,z)\, d(x,y,z)$ über den im 1.ten Oktanten liegenden Bereich B des Ellipsoids mit den Halbachsen $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ erstrecken.

   (a) (2) Skizzieren Sie den Bereich B.

   (b) (3) Durch welches endliche Set von Ungleichungen kann man B beschreiben (so wenige Ungleichungen als nötig)?

   Antwort: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 1$

   (c) (5) I soll als iteriertes Integral der Form $\int_?^? dx \int_?^? dy \int_?^? f(x,y,z)\, dz$ ausgedrückt werden.

   Antwort:

$$\int_0^2 dx \int_0^{3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dy \int_0^{4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}} f(x,y,z)\, dz$$

Nachname:	Matrnr:	28.5.2009 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$
   (a) (1) Man bestimme das charakteristische Polynom von A.
   Antwort: Es ist $p_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$

   (b) (3) Man bestimme alle Eigenwerte und ihre jeweilige arithmetische Vielfachheit.
   Antwort: -1 hat Vielfachheit 2 und 2 die Vielfachheit 1

   (c) (4) Zu jedem Eigenwert bestimme man eine Basis des zugehörigen Eigenraumes. Welche geometrische Vielfachheit hat jeder der Eigenwerte?
   Antwort: Zu -1 findet man z.B. als Basis $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ und zu 2 als mögliche Basis $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$, somit stimmt hier die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes mit seiner arithmetischen überein.

   (d) (2) Kann die Matrix diagonalisiert werden. Falls ja, gebe man eine Begründung und eine Matrix S an, derart, daß $S^{-1}AS$ diagonal ist.
   Antwort: Ja, weil geom.Vielfachheit jedes Eigenvektors mit seiner arithmetischen übereinstimmt. S ist jene Matrix, deren Spalten Eigenvektoren sind, in der obigen Situation
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Es sei $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in I\!R^4 \mid x_1 = x_4\}$.
   (a) (1) Welche Dimension hat U?
   Antwort: 3

   (b) (2) Man ermittle eine Basis von U.
   Antwort: z.B. $\{(1,0,0,1)^T, (0,1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T\}$

   (c) (2) Man ermittle eine Orthonormalbasis von U.
   Antwort: z.B. $\{(0,1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^T\}$

(d) (3) Welcher Punkt $\vec{Q}$ in U hat minimalen Abstand von $\vec{P} := (-\sqrt{2}, 2, 3, \sqrt{2})^T \in \mathbb{R}^4$?

Antwort: Man bildet die Orthogonalprojektion von $\vec{P}$ in U, also mittels der ONB $B := \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ den Ausdruck

$$\vec{Q} = \langle \vec{u}_1, \vec{P} \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{u}_2, \vec{P} \rangle \vec{u}_2 + \langle \vec{u}_3, \vec{P} \rangle \vec{u}_3$$

und findet $\vec{Q} = (0, 2, 3, 0)^T$

(e) (2) Man gebe den Abstand von P zu Q an.

Antwort: Es ist $\|\vec{P} - \vec{Q}\| = \|(-\sqrt{2}, 0, 0, \sqrt{2})^T\| = 2$

3. Jemand interessiert sich für einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ der Länge 1, dessen Summe der Koordinaten maximalen Wert erreicht.

(a) (4) Die Aufgabe ist als Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen zu beschreiben.

Antwort: $f(x, y, z) = x + y + z$ ist unter der Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ zu maximieren.

(b) (3) Man ermittle alle Kandidaten von Lösungen.

Antwort: Die Nebenbedingung hat keine singulären Punkte, deshalb findet man sie alle mittels Lagrangeverfahren: $F(x, y, z, \lambda) = x + y + z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

Differenzieren nach x, y, z und Nullsetzen ergeben $\vec{x} = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) (3) Man löse die Aufgabe, d.h. finde den Vektor mit maximaler Koordinatensumme unter der Nebenbedingung und skizziere die Situation.

Antwort: Im Vorigen muß das Pluszeichen gewählt werden.

4. Im $\mathbb{R}^3$ sei T das Tetraeder mit den Eckpunkten $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 0)$ und $D(0, 0, 1)$

(a) (2) Eine Skizze möge angefertigt werden.

(b) (5) Es soll $J := \int_T f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_K d(x, y) \int_?^? f(x, y, z)\, dz$$

ausgedrückt werden. Skizze des ebenen Bereichs K.

Antwort: $K = \{(x, y) \mid \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \le 1 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0\}$, $J = \int_K d(x, y) \int_0^{1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}} f(x, y, z)\, dz$

(c) (3) Man berechne das Volumen von T.

Antwort: 2, weil 1/6 des Volumens des Quaders $1 \times 3 \times 4$. Das gleiche Resultat ergibt sich durch explizite Berechnung von $\int_K d(x, y) \int_0^{1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}} dz$.

Nachname:	Matrnr:	26.3.2009 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$
   (a) (5) Man bestimme alle Eigenwerte von A.
   Antwort: Die Blockstruktur 2×2-Block links oben, und der 3×3-Block
$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & -5 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 5 & -3-\lambda \end{pmatrix},$$
   der selbst eine Blockstruktur aufweist, ergeben das charakteristische Polynom in bereits faktorisierter Form, nämlich $p(\lambda) = -(\lambda^2+4\lambda+3)(\lambda+1)(\lambda^2+\lambda+1)$. Hier liest man als Lösungen für die Eigenwerte $\{-1, -3, -1, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})\}$ als Wurzeln der Faktoren ab.
   (b) (5) Für den betragsgrößten Eigenwert gebe man eine Basis des zugehörigen Eigenraumes, sowie dessen Dimension an.
   Antwort: Der betragsgrößte Eigenwert ist -3. Man findet $(5, -5, 24, 1, 10)^T$ als Eigenvektor und die Dimension des Eigenraumes ist 1

2. Gegeben sind die Vektoren
$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) (4) Es ist ein Orthonormalsystem (bezüglich des üblichen Skalarprodukts im $\mathbb{R}^4$) der linearen Hülle $U := \mathcal{L}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ gesucht.
   Antwort: z.B. $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}$, $\vec{u}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{c}$. Es ist nämlich, wie man unmittelbar erkennt, $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \in \mathcal{L}(\vec{a}, \vec{c}) = U$
   (b) (4) Es ist jener Punkt $\vec{u}$ in U gesucht, von dem die Spitze des Vektors $\vec{w} := (3, 1, 1, 1)^T$ minimalen Abstand hat, mit anderen Worten, für den $||\vec{u} - \vec{w}||$ minimal wird.
   Antwort: Die Lösung wird durch den Abschnitt der *Fourierreihe* angegeben:
$$\vec{u} = \vec{u}_1 \cdot \vec{w}\ \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{w}\ \vec{u}_2 = \cdots = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) (2) Man gebe einen Vektor in $\mathcal{L}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{w})^{\perp}$ an.

Antwort: Als Lösung bietet sich $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

3. Gegeben ist die Gleichung $x^2 + yz + z^3x = 3$ und es sei M die Menge der Punkte im $\mathbb{R}^3$, welche diese Gleichung erfüllen.

(a) (3) Für welche reellen Zahlen z liegt der Punkt $P(1, 1, z)$ in M?

Antwort: Man kann die einzige Lösung $z = 1$ leicht erraten

(b) (4) Hat die Menge M singuläre Punkte?

Antwort: Man muß $F(x, y, z) = F_x(x, y, z) = F_y(x, y, z) = F_z(x, y, z) = 0$ für $F(x, y, z) := x^2 + yz + z^3x - 3$ lösen. Jede Lösung ist ein *singulärer* Punkt. Das entstehende Gleichungssystem ist nicht lösbar, also ist die Antwort "NEIN"

(c) (3) Man berechne $z_{xx}(1, 1)$, wobei z den in a) berechneten Wert hat.

Antwort: Implizites Differenzieren nach x von $0 = F(x, y, z(x, y))$ unter Anwendung der Kettenregel ergibt $0 = 2x + yz_x + z^3 + 3z^2xz_x$ bzw. nochmals $0 = 2 + yz_{xx} + 6z^2z_x + 6xzz_x^2 + 3xz^2z_{xx}$ (stets ist das Funktionsargument (x, y) von z, z_x, z_{xx} dazuzudenken). Nun wird $x = y = 1$ eingesetzt, sodaß $0 = 2 + z_x(1, 1) + 1^3 + 3z_x(1, 1)$, also $z_x(1, 1) = -\frac{3}{4}$ herauskommt. Ähnlich ergibt die zweite Gleichung $z_{xx}(1, 1) = -\frac{7}{32}$

4. Im $\mathbb{R}^3$ sei K die Schnittfigur, welche durch die Bedingungen $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1 - x^2 - y^2$ und $z \geq 0$ bestimmt ist.

(a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

(b) (6) Es soll $J := \int_K f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? dx \int_?^? dy \int_?^? f(x, y, z)\, dz$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Als Skizze erhält man einen nach oben geöffneten Kegel, der von der Kugelkalotte begrenzt wird – rotationssymmetrisch bei Rotation um die z-Achse. $J = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz.$

Nachname:	Matrnr:	26.2.2009 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x - 4y + t \\ \dot{y} &= 2x + 3y + 1 \end{aligned}$$

   Dieses System lÃďßt sich unter BenÃijtzung von Matrizen und Vektoren in der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$ anschreiben.

   (a) (2) Wie lauten A und $\vec{b}$?

   (b) (1) Man bestimme das charakteristische Polynom von A

   (c) (4) Zu jedem Eigenwert bestimme man einen Eigenvektor.

   (d) (2) Welche Matrix S erlaubt Diagonalisierung von A?

   (e) (1) Wie lautet das entkoppelte Differentialgleichungssystem?

2. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) (3) Man berechne den Wert der Determinante von A.

   (b) (2) Man ermittle die Spur von A.

   (c) (3) Wenn das charakteristische Polynom von A in der Form $p = \lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5$ angeschrieben ist, wie lauten a_1 und a_5?

   (d) (2) Geben Sie mindestens 3 Eigenwerte von A an.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{\cos(x-y)}{1+y^2}$

   (a) (3) Man gebe den Definitionsbereich von f an.

   (b) (4) Man berechne die partiellen Ableitungen $f_x(0,0)$ und $f_y(0,0)$.

   (c) (3) Man bestimme die Taylorreihe bis Glieder einschließlich zweiter Ordnung bei Entwicklung von f an der Stelle $(0,0)$.

4. Im $\mathbb{R}^2$ sei K die ebene Figur, welche im ersten Quadranten durch die Bedingungen $x^2 + y^2 \leq 3$, $xy \geq 1$ bestimmt ist.

   (a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K mÃűge angefertigt werden.

(b) (6) Es soll $J := \int_K f(x,y)\,d(x,y)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? dx \int_?^? f(x,y)\,dy$$

ausgedrÃijckt werden.

Nachname:	Matrnr:	29.1.2009 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben sind die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 133 & 227 & 121 \\ 0 & 0 & 3 & -2222 \\ -3000 & 550 & -20201 & 11101 \end{pmatrix},$$

$$B := \begin{pmatrix} -1111 & 98982 & 90043 & -11110074 \end{pmatrix}$$

und

$$C := \begin{pmatrix} 115 \\ -116 \\ -777 \\ 81928 \end{pmatrix}$$

   (a) (4) Welche Produkte XY mit $X, Y \in \{A, B, C\}$ können gebildet werden und welche Dimensionierung hat das jeweilige Produkt?
   Antwort: AC (4×1), BA (1×4), AA (4×4), BC (1×1), CB (4×4)

   (b) (6) Welche Produkte XYZ mit $X, Y, Z \in \{A, B, C\}$ können gebildet werden?
   Antwort: ACB (4×4), BAA (1×4), BAC (1×1), AAA (4×4), AAC (4×1), BCB (1×4), CBA (4×4), CBC (4×1)

2. Es seien $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ Vektoren im $\mathbb{R}^{12}$ und man kennt die Werte der inneren Produkte $\vec{a} \cdot \vec{a} = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{b} = 9$, $\vec{c} \cdot \vec{c} = 16$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

   (a) (1) Man berechne den Wert des inneren Produkts $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.
   Antwort: -5

   (b) (4) Man zeige, daß die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sind.
   Antwort: Aus $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$ ergibt sich durch Bilden der inneren Produkte mit jeweils $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ das Gleichungsystem

$$4\lambda + 0\mu + 4\nu = 0,\ 0\lambda + 9\mu + 0\nu = 0,\ 4\lambda + 0\mu + 16\nu = 0,$$

   woraus sich sofort $\lambda = \mu = \nu = 0$ ergibt, also die lineare Unabhängigkeit der Vektoren

   (c) (5) Mittels Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren soll von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ausgehend, ein Orthogonalsystem (OGS) ermittelt werden. Die Vektoren des OGS sind als Linearkombinationen der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ anzuschreiben.
   Antwort: $\vec{u}_1 = \vec{a}$. $\vec{u}_2 = \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\vec{a} = \vec{b}$. $\vec{u}_3 = \vec{c} - \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}\vec{a} - \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}\vec{b} = \vec{c} - \frac{4}{4}\vec{a} - \frac{0}{16}\vec{b} = -\vec{a} + \vec{c}$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) := x^{\cos y} y^{\cos x}$ auf dem Quadrat $Q := (0, \frac{\pi}{4}) \times (0, \frac{\pi}{4})$.

(a) (3) Begründen Sie, warum diese Funktion auf Q wohldefiniert ist.

Antwort: Die Funktion a^x ist für positives a und alle $x \in I\!R$ definiert. Deshalb ist die Funktion $x^{\cos y}$ für positives x und alle y definiert. Da jedoch $y^{\cos x}$ nur für positive y gebildet werden kann, müssen sowohl x als auch y positiv sein. Das trifft für alle (x, y) in Q zu.

(b) (4) Man berechne die partiellen Ableitungen f_x und f_y.

Antwort: $f_x(x, y) = f(x, y)\left(\frac{\cos y}{x} - \sin x \ln y\right)$ und $f_y(x, y) = f(x, y)\left(\frac{\cos x}{y} - \sin y \ln x\right)$

(c) (2) Ist f auf Q differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Antwort: Es sind f_x und f_y beides stetige Funktionen und deshalb ist f differenzierbar.

(d) (1) Zeigen Sie, daß f auf Q kein lokales Extremum besitzen kann. (Hinweis: Welches Vorzeichen hat $\ln x$ auf dem Intervall $(0, \frac{\pi}{4})$?).

Antwort: Für ein solches lokales Extremum müßten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\cos y}{x} &= \sin x \ln y \\ \frac{\cos x}{y} &= \sin y \ln x\end{aligned}$$

gelten. In beiden Gleichungen steht links ein positiver Ausdruck, jedoch ist der Ausdruck rechts (weil der Logarithmus auf $(0, \frac{\pi}{2})$ negativ ist!) negativ. Somit können sie in Q nicht gelöst werden.

4. Jemand möchte das Integral $I := \int_B f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ über den im 1.ten Oktanten liegenden Bereich B des Ellipsoids mit den Halbachsen $a = 2$. $b = 3$, $c = 4$ erstrecken.

(a) (2) Skizzieren Sie den Bereich B.

(b) (3) Durch welches endliche Set von Ungleichungen kann man B beschreiben (so wenige Ungleichungen als nötig)?

Antwort: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 1$

(c) (5) I soll als iteriertes Integral der Form $\int_?^? dx \int_?^? dy \int_?^? f(x, y, z)\, dz$ ausgedrückt werden.

Antwort:

$$\int_0^2 dx \int_0^{3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dy \int_0^{4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}} f(x, y, z)\, dz$$

Nachname:	Matrnr:	18.12.2008 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y + z - 1 \\ \dot{y} &= 2x + y + 3z - 1 \\ \dot{z} &= x + 2z - 1 \end{aligned}$$

   (a) (2) Das Differentialgleichungssystem läßt sich in der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$ anschreiben. Wie lauten A und $\vec{b}$?
   Antwort: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) (5) Jemand versucht, das System mit dem Ansatz $\vec{x} = \vec{u}t + \vec{v}$ zu lösen, wobei $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zu bestimmende Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sein sollen. Auf welche linearen Gleichungssysteme für $\vec{u}$ und $\vec{v}$ führt der Ansatz?
   Antwort: Zunächst auf $\vec{u} = A(\vec{u}t + \vec{v}) + \vec{b}$, und (man beachte daß der Punkt differenzieren nach "t" bedeutet!) somit auf $A\vec{u} = \vec{0}$ und $\vec{u} = A\vec{v} + \vec{b}$

   (c) (3) Hat das System eine Lösung für $\vec{u}$ und $\vec{v}$?
   Antwort: Es läßt sich $A\vec{u} = \vec{0}$ durch $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lösen (sowie alle skalaren Vielfachen). Die Gleichung für $\vec{v}$ besitzt keine Lösung

2. Gegeben sind die Polynome 1, x und x^2. Weiters soll

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$$

   für Polynome f und g mit reellen Koeffizienten sein.

   (a) (4) Man zeige, daß hiedurch ein inneres Produkt auf dem linearen Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten definiert ist.
   Antwort: Man prüft die Bilinearität und $\langle f, f \rangle > 0$ falls f nicht das Nullpolynom ist

   (b) (6) Mittels Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren soll von den Polynomen $1, x, x^2$ ausgehend, ein Orthonormalsystem ermittelt werden.
   Antwort: Man findet $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}x$ und $\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. (Bis auf Skalarfaktor *Legendre*polynome)

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y, z) = e^{-x+xz-y^2-3z^2}$. (Ignorierbarer Hinweis: beginnen Sie mit (c))

(a) (1) Man bestimme $f(0,0,0)$.
Antwort: 1

(b) (3) Man bestimme $\nabla f(0,0,0)$.
Antwort: Man findet $\nabla f(0,0,0) = (-1,0,0)$

(c) (3) Man bestimme die Hessesche Matrix $H(f)(0,0,0)$.
Antwort:

$$H(f)(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

(d) (3) Geben Sie die Taylorreihe von f mit Anschlusstelle $(0,0,0)$ bis Glieder einschliesslich 2.ter Ordnung an.
Antwort: Man findet durch Reihenmanipulation $f(x,y,z) = 1 + (-x + xz - y^2 - 3z^2) + \frac{1}{2}(-x + \cdots)^2 = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + xz - y^2 - 3z^2 + \cdots$,

4. Ein Körper K wird durch die Ungleichungen $0 \leq y$, $x + y \leq 2$ und $x^2 + z^2 \leq 1$ beschrieben.

(a) (4) Skizzieren Sie den Bereich K. (Hinweis: die Draufsicht in Richtung z-Achse und die Seitenansicht in Richtung y-Achse sind hilfreich.)
Antwort: Ein Kreiszylinder mit Radius 1 und y-Achse als Mittelachse von der Höhe 2 wird unter einem Winkel von 45 Grad von der Ebene $x + y = 2$ abgeschnitten

(b) (4) Man forme $J = \int_K f(x,y,z)\, d(x,y,z)$ in ein iteriertes Integral der Form

$$J = \int_B d(x,z) \int_?^? f(x,y,z)\, dy$$

um und gebe die den Bereich B in der (x,z)-Ebene bestimmenden Ungleichungen an.
Antwort: Es ist $J = \int_{x^2+z^2 \leq 1} d(x,z) \int_0^{2-x} f(x,y,z)\, dy$.

(c) (2) Man bestimme das Volumen von K.
Antwort: Kann elementar sofort eingesehen werden: Volumen eines Zylinders mit Radius 1 und Höhe 2, also 2π

Nachname:	Matrnr:	30.10.2008 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) (1) Wie lautet das charakteristische Polynom?
   Antwort: $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4$.

   (b) (2) Man gebe alle rationalen Eigenwerte von A und danach, der Größe nach geordnet, die irrationalen Eigenwerte an. (Zur Erinnerung: z.B. $2-\sqrt{3}$ ist irrational, $\frac{3}{4}$ rational)
   Antwort: 2, $2-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$

   (c) (4) Man ermittle eine Matrix S deren Spalten eine aus Eigenvektoren von A bestehende Basis des $\mathbb{R}^3$ sind, soferne das geht (Begründung).
   Antwort: Als Basis findet man die Spalten der Matrix $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
   wobei jede andere Lösung eine Matrix mit skalaren nichttrivialen Vielfachen der Spalten von S ist

   (d) (2) Man ermittle $S^{-1}AS$.
   Antwort: Man muß nichts "ausrechnen". Laut Theorie sollte eine Diagonalmatrix mit Eigenwerten herauskommen, also
$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

   (e) (1) Kann die Diagonalisierbarkeit im vorliegenden Fall (auch ohne Berechnungen) begründet werden? Wenn ja, wie?
   Antwort: Die Matrix ist symmetrisch und deshalb diagonalisierbar

2. Gegeben sind die Polynome 1, x und x^2. Weiters soll durch
$$\langle f, g\rangle :\ = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}\,dx$$
   ein inneres Produkt auf dem Raum aller Polynome mit reellen Koeffizienten gegeben sein.

   (a) (6) Mittels Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren soll von den Polynomen $1, x, x^2$ ausgehend, ein Orthonormalsystem ermittelt werden.
   Antwort: Man findet 1, $x-1$ und $\frac{1}{2}(x^2-4x+2)$. Dies sind *Laguerre*polynome

(b) (4) Man finde reelle Zahlen a und b, sodaß

$$\sqrt{\int_0^\infty e^{-x}(x^2 - a - bx)^2\, dx},$$

minimal wird.

Antwort: Die Lösung ist $4x-2$, wie man im 3.ten Schritt des Orthogonalisierungsverfahrens gefunden hat. Somit ist $a = -2$ und $b = 4$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y, z) = e^{-x+xz-y^2-3z^2}$. (Ignorierbarer Hinweis: beginnen Sie mit (d))

   (a) (1) Man bestimme $f(0, 0, 0)$.
   Antwort: 1

   (b) (3) Man bestimme $\nabla f(0, 0, 0)$.
   Antwort: Man findet $\nabla f(0, 0, 0) = (-1, 0, 0)$

   (c) (3) Man bestimme die Hessesche Matrix $H(f)(0, 0, 0)$.
   Antwort:
   $$H(f)(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

   (d) (3) Geben Sie die Taylorreihe von f mit Anschlusstelle $(0, 0, 0)$ an.
   Antwort: Man findet durch Reihenmanipulation $f(x, y, z) = 1 + (-x + xz - y^2 - 3z^2) + \frac{1}{2}(-x + \cdots)^2 = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + xz - y^2 - 3z^2 + \cdots$,

4. Ein Körper K wird durch die Ungleichungen $0 \leq z$, $x + z \leq 2$ und $x^2 + y^2 \leq 1$ beschrieben.

   (a) (4) Skizzieren Sie den Bereich B. (Hinweis: die Seitenansicht in Richtung y-Achse und die Draufsicht in Richtung z-Achse sind hilfreich.)
   Antwort: Ein Kreiszylinder mit Radius 1 und z-Achse als Mittelachse von der Höhe 2 wird unter einem Winkel von 45 Grad von der Ebene $x + z = 2$ abgeschnitten

   (b) (4) Man forme $J = \int_K f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ in ein iteriertes Integral der Form
   $$J = \int_B d(x, y) \int_?^? f(x, y, z)\, dz$$
   um und gebe die den Bereich B in der (x, y)-Ebene bestimmenden Ungleichungen an.
   Antwort: Es ist $J = \int_{x^2+y^2\leq 1} d(x, y) \int_0^{2-x} f(x, y, z)\, dz$.

   (c) (2) Man bestimme das Volumen von K.
   Antwort: Kann elementar sofort eingesehen werden: Volumen eines Zylinders mit Radius und Höhe 1, also 2π

Nachname:	Matrnr:	2.10.2008 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) (2) Man ermittle den Zeilenrang von A.
   Antwort: 2

   (b) (2) Wie lautet das charakteristische Polynom und die Eigenwerte nach Größe des Absolutbetrags geordnet?
   Antwort: $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda$. Die Eigenwerte lauten $0, 1, 3$

   (c) (4) Man ermittle eine Matrix S deren Spalten eine aus Eigenvektoren von A bestehende Basis des $\mathbb{R}^3$ sind, soferne das geht (Begründung).
   Antwort: Als Basis findet man die Spalten der Matrix $S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, wobei jede andere Lösung eine Matrix mit skalaren nichttrivialen Vielfachen der Spalten von S ist

   (d) (2) Ist die Matrix A diagonalisierbar, und falls ja, auf welche Form D kann sie gebracht werden? Welche Beziehung besteht in diesem Fall zwischen den Matrizen A, S und D?
   Antwort: A ist diagonalisierbar, es ist $D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Die gefragte Beziehung lautet $S^{-1}AS = D$

2. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (4) Es ist ein Orthonormalsystem (bezüglich des üblichen Skalarprodukts im $\mathbb{R}^4$) der linearen Hülle $U := \mathcal{L}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ gesucht.
   Antwort: z.B. $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}$, $\vec{u}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{c}$. Es ist nämlich, wie man unmittelbar erkennt, $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \in \mathcal{L}(\vec{a}, \vec{c}) = U$

(b) (4) Es ist jener Punkt $\vec{u}$ in U gesucht, von dem die Spitze des Vektors $\vec{w} := (3, 1, 1, 1)^T$ minimalen Abstand hat, mit anderen Worten, für den $||\vec{u} - \vec{w}||$ minimal wird.

Antwort: Die Lösung wird durch den Abschnitt der *Fourierreihe* angegeben:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 \cdot \vec{w}\ \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{w}\ \vec{u}_2 = \cdots = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) (2) Man gebe einen Vektor in $\mathcal{L}(\vec{a}, \vec{b})^\perp$ an.

Antwort: Als Lösung bietet sich $\vec{u} - \vec{w}$, also $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an.

3. Gegeben sind die Funktionen $f(x, y) = 7x^2 - 2xy + 7y^2 - 1$ und $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

(a) (2) Man skizziere im $I\!R^3$ die Punktmenge $\{(x, y, z) \mid g(x, y) = 0\}$.

Antwort: Ein Zylinder mit zur z-Achse paralleler Erzeugenden, die auf dem in der (x, y)-Ebene liegenden Kreis entlangfährt

(b) (4) Bestimmen Sie alle Stellen (x, y), an denen f ein lokales Maximum besitzt.

Antwort: Man differenziert und setzt $0 = f_x = 2(7x - y)$ und $0 = f_y = 2(-x + 7y)$ und findet als einzigen Kandidaten $P(0, 0)$. Die Hessesche Matrix ist durch

$$2 \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

gegeben und hat die Hauptminoren 2×7 und 4×48, beide positv. Somit liegt ein lokales Minimum vor und es kann deshalb keine lokalen Maxima geben

(c) (3) Wie lautet im Beispiel der Ansatz nach Lagrange zur Bestimmung aller Extrema f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$? Auf welche Gleichungen zur Bestimmung der Koordinaten (x, y) eines solchen Extremums führt der Ansatz?

Antwort: $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = 7x^2 - 2xy + 7y^2 - 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Es ergeben sich Gleichungen (in Matrizenform):

$$\begin{pmatrix} 7 + \lambda & -1 \\ -1 & 7 + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie $x^2 + y^2 = 1$

(d) (1) Welche geometrische Deutung kann der Aufgabe gegeben werden?

Antwort: Man untersucht den Graphen der Funktion f (der im x, y, z-Koordinatensystem liegt) bei Wandern entlang des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ in der Grundebene auf Extrema

4. Jemand möchte das Integral $I := \int_B f(x,y,z)\,d(x,y,z)$ über den im 1.ten Oktanten liegenden Bereich B des Ellipsoids mit den Halbachsen $a = 1.$ $b = 2$, $c = 3$ erstrecken.

   (a) (2) Skizzieren Sie den Bereich B.

   (b) (3) Durch welches endliche Set von Ungleichungen kann man B beschreiben (so wenige Ungleichungen als nötig)?

   Antwort: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1$

   (c) (5) I soll als iteriertes Integral der Form $\int_?^? dx \int_?^? dy \int_?^? f(x,y,z)\,dz$ ausgedrückt werden.

   Antwort:

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{3\sqrt{1-x^2-\frac{y^2}{4}}} f(x,y,z)\,dz$$

Nachname:	Matrnr:	19.9.2008 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist die Menge $B := \{x\cos x, x\sin x, \cos x, \sin x\}$ reeller Funktionen als Basis der linearen Hülle $U := \mathcal{L}(B)$. Weiters soll für entsprechend oft differenzierbare Funktionen y durch $A(y) = y'' + y$ ein lineare Abbildung gegeben sein (ein "linearer Differentialoperator").

   Die Linearität von A und daß B eine Basis von U ist, wird als bewiesen vorausgesetzt.

   (a) (2) Man ermittle $A(b)$ für alle $b \in B$.
   Antwort: Es ist $A(x\cos x) = -2\sin x$, $A(x\sin x) = 2\cos x$ und $A(\cos x) = A(\sin x) = 0$

   (b) (2) Zeigen Sie, daß A als Abbildung von U nach U aufgefaßt werden kann.
   Antwort: Da A linear ist, genügt es zu vermerken, daß $A(b) \in U$ für alle $b \in B$ ist

   (c) (4) Es soll eine Basis des Kerns von A, sowie eine Basis des Bildes unter A bestimmt werden.
   Antwort: Der Kern von A besteht definitionsgemäß aus allen Funktionen $y \in U$, für die $A(y) = 0$ ist. Somit sind $\cos x$ und $\sin x$ linear unabhängige Funktionen im Kern von A. Da $A(\frac{1}{2}x\sin x) = \cos x$ und $A(-\frac{1}{2}x\cos x) = \sin x$, sind $\cos x$ und $\sin x$ auch linear unabhängige Elemente im Bild von A. Somit ist $\dim(\ker(A)) \geq 2$ und $\dim(\mathit{Bild}(A)) \geq 2$.
   Es hat U die Dimension 4, weil B Basis mit 4 Elementen ist. Weiters ist $2 + 2 \leq \dim(\ker A) + \dim(\mathit{Bild}(A)) = 4$, sodaß $\{\cos x, \sin x\}$ sowohl Basis des Kerns, als auch Basis des Bilds von A ist.

   (d) (2) Man bestimme eine partikuläre Lösung y_p von $y'' + y = 2\cos x - 4\sin x$.
   Antwort: Die Aufgabe kann als $A(y) = 2\cos x - 4\sin x$ aufgefaßt werden. Da $A(\frac{1}{2}x\sin x) = \cos x$ und $A(-\frac{1}{2}x\cos x) = \sin x$ ist, ergibt sich aus der Linearität von A die Lösung $y_p = 2(\frac{1}{2}x\sin x) - 4(-\frac{1}{2}x\cos x) = x(\sin x + 2\cos x)$.
   Angemerkt werden darf, daß die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y = x(\sin x + 2\cos x) + c_1\cos x + c_2\sin x$ mit frei wählbaren c_1, c_2 ist

2. Es sei die von $a \in \mathbf{C}$ abhängige Matrix

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^3 & 1+a \\ 2 & a & 2 & a \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

   gegeben.

   (a) (2) Man berechne den Wert der Determinante $\det(A(a))$.
   Antwort: Die Blockstruktur der Matrix (2×2 Blöcke entlang der Hauptdiagonale) benützend, ergibt sich sofort $\det(A(a)) = a(-7 - a) = -7a - a^2$

(b) (2) Man bestimme die Menge M aller $a \in \mathbf{C}$, für welche $\det(A(a)) = 0$ ist.
Antwort: Es ergibt sich $M := \{0, -7\}$

(c) (2) Für welche $a \in \mathbf{C}$ ist $A(a)$ eine reguläre Matrix?
Antwort: Genau für jene, für die $\det(A(a)) \neq 0$ gilt. Also für alle $a \notin M$

(d) (4) Für das betragskleinste a in M bestimme man eine Basis des Kerns von $A(a)$.
Antwort: Man muß somit den Kern der Matrix

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Eine Basis ist durch $\{(0, 1, 0, 0)^T\}$ gegeben

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y, z) = x + y + z \sin z$ und die Gleichung $f(x, y, z) = 0$.

(a) (1) Man bestimme die Ableitungen f_x, f_y und f_z.
Antwort: Man findet $f_x(x, y, z) = f_y(x, y, z) = 1$ und $f_z(x, y, z) = \sin z + z \cos z$

(b) (3) Zeigen Sie, daß durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung $U(0, 0)$ eine Funktion $h(x, y)$ mit $f(x, y, h(x, y)) = 0$ für alle $(x, y) \in U(0, 0)$ und $h(0, 0) = \pi$ bestimmt ist.
Antwort: Es ist f als Zusammensetzung von stetig differenzierbaren Funktionen selbst stetig differenzierbar. Weiters ist $f(0, 0, \pi) = 0$ und $f_z(0, 0, \pi) = -\pi \neq 0$. Somit ist der Hauptsatz der impliziten Funktionen anwendbar

(c) (3) Man bestimme $h_x(0, 0)$ und $h_y(0, 0)$.
Antwort: Vgl. Bspl 3 vom 12.6.08. Implizites Differenzieren ergibt die Gleichungen $1 + z_x \sin z + z \cos z z_x = 1 + z_y \sin z + z \cos z z_y = 0$ und Einsetzen von $x = y = 0$ und $z = \pi$ ergibt $z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = \frac{1}{\pi}$

(d) (3) Man bestimme $h_{xy}(0, 0)$.
Antwort: Implizit Differenzieren nach y der ersten Gleichung für z_x ergibt zuächst

$$0 = z_{xy} \sin z + z_x \cos z z_y + z_y \cos z z_x - z \sin z z_y z_x + z \cos z z_{xy}.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ und $z = \pi$, sowie $z_x = z_y = \frac{1}{\pi}$ ergibt nach etwas Rechnen $z_{xy}(0, 0) = -\frac{2}{\pi^3}$

4. Es sei K die Menge der Punkte $P(x, y)$, deren Koordinaten den Ungleichungen $x^2+y^2 \leq 1$ und $x + y \geq 1$ genügen.

(a) (4) Eine Skizze der Figur K möge angefertigt werden.
Antwort: K ist jener Kreisabschnitt des Einheitskreises, der von der durch Punkte $(1, 0)$ und $(0, 1)$ verlaufenden Sehne abgetrennt wird

(b) (4) Es soll $J := \int_K f(x,y)\,d(x,y)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? dy \int_?^? f(x,y)\,dx$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Es ergibt sich $J = \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$

(c) (2) Man berechne den Flächeninhalt von K.

Antwort: Der Viertelkreis hat Fläche $\frac{1}{4}1^2\pi = \frac{\pi}{4}$ und das Dreieck Fläche $\frac{1}{2}$. Als Flächeninhalt von K findet man somit $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

Nachname:	Matrnr:	14.8.2008 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist die 4×4-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) (4) Man bestimme das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte von A. (Ignorierbarer Hinweis: Das Polynom darf als Produkt von Polynomen angeschrieben werden).

   Antwort: Es ergibt sich $p_A(\lambda) = (\lambda-1)\lambda(\lambda-7)(\lambda+1) = \cdots = \lambda^4 - 7\lambda^3 - \lambda^2 + 7\lambda$. Somit sind die Eigenwerte der Größe nach geordnet $\{-1, 0, 1, 7\}$

   (b) (4) Für den betragsgrößten Eigenwert bestimme man eine Basis des zugehörigen Eigenraumes.

   Antwort: Der betragsgrößte Eigenwert ist 7 und als Basis kann $\{(1, 2, 6, 0)^T\}$ gewählt werden

   (c) (2) Man gebe den Rang von $A - 7E$ an, sowie die geometrische Vielfachheit von $\lambda = 7$, sofern dies ein Eigenwert ist.

   Antwort: Der gefragte Rang ist 3 und die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda = 7$ ist gleich 1

   Antwort: Vergleiche auch 23.5.08 Bspl 1

2. Es sei U die Menge aller $\mathbb{R}$-Linearkombinationen der Funktionen in $B := \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ und eine Funktion $A : U \to U$ durch $A(f) := f'' - 2f' + f$ gegeben.

   (a) (2) Man beweise, daß A lineare Abbildung von U nach U ist.

   Antwort: Differenzieren ist linear, somit ist $A(rf+sg) = (rf+sg)'' - 2(rf+sg)' + rf + sg = rf'' + sg'' - 2rf' - 2sg' + rf + sg = r(f'' - 2f' + f) + s(g'' - 2g' + g) = rA(f) + sA(g)$

   (b) (3) Man beweise, bzw. widerlege, ob $f := xe^{2x}$ in U liegt.

   Antwort: Die Antwort ist "nein". Wäre $f \in U$, so gäbe es $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $xe^{2x} = e^x(a + bx + cx^2)$ für alle reellen x. Division durch e^x auf beiden Seiten gibt $xe^x = a + bx + cx^2$. Differenziert man nun links und rechts 3-mal, so ergibt sich links $3e^x + xe^x$ und rechts Null, und das sollte für alle x gelten. Für $x = 0$ ergibt sich der Widerspruch $3 = 0$

   (c) (4) Man ermittle eine Matrixdarstellung von A bezüglich der Basis B (daß B eine Basis von U ist, soll nicht bewiesen werden).

Antwort: Man muß hiezu A auf jedes Basiselement anwenden und als Linearkombination der Elemente von B auffassen.
$A(e^x) = 0 = 0.e^x + 0.xe^x + 0.x^2e^x$, also ist die erste Spalte $(0,0,0)^T$. Insgesamt findet man die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) (1) Ist A in Jordannormalform?
Antwort: Nein

3. Gegeben ist die Funktion $f(x,y) := \frac{1}{x^2+2xy+2y^2+4x+6y+5}$.

(a) (4) Man bestimme alle Punkte $\vec{x}_0$ mit $\nabla g(\vec{x}_0) = \vec{0}$, wobei $g := 1/f$ ist.
Antwort: Es ist $\nabla g = 2\begin{pmatrix} x+y+4 \\ x+4y+6 \end{pmatrix}$ und einzig mögliche Lösung $\vec{x}_0 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) (3) Für den in (a) gefundenen Kandidaten $\vec{x}_0$ betrachte man die Funktion $h(\vec{u}) := f(\vec{x}_0 + \vec{u})$. Wenn $\vec{u} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ist, wie lautet die Funktion $h(u,v)$?
Antwort: Es ist dies der Ausdruck $h(u,v) = \frac{1}{u^2+2uv+2v^2}$

(c) (3) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von h beziehungsweise f. (Ignorierbarer Hinweis: man überprüfe, ob der Nenner von h positiv definit ist)
Antwort: Es ist $u^2 + 2uv + 2v^2$ positiv definit, weil die Hauptminoren 1, 1 lauten, somit beide positiv sind. Es ergibt sich $D(h) = I\!R^2 \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ und daraus wegen $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{u}$ sofort $D(f) = I\!R^2 \setminus \{\vec{x}_0\}$

4. Es sei K die Menge im zweiten Quadranten, deren Punkte (x,y) den Ungleichungen $\frac{x^2}{9} + y^2 \le 1$ genügen.

(a) (4) Eine Skizze der Figur K möge angefertigt werden.
Antwort: Ein Viertel einer Ellipse mit den Halbmessern $a = 3$ und $b = 1$

(b) (4) Es soll $J := \int_K f(x,y)\,d(x,y)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? dy \int_?^? f(x,y)\,dx$$

ausgedrückt werden.
Antwort: Es ergibt sich $J = \int_0^1 dy \int_{-3\sqrt{1-y^2}}^0 f(x,y)\,dx$

(c) (2) Man berechne den Flächeninhalt von K.
Antwort: Man findet als Wert $\frac{3\pi}{4}$

Nachname:	Matrnr:	1.8.2008 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das Differenzengleichungssystem

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 2y_n + z_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + y_n + 3z_n \\ z_{n+1} &= 4x_n - y_n + 7z_n \end{aligned}$$

   (a) (2) Das System läßt sich in der kompakten Form

   $$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n + \vec{b}$$

   anschreiben. Wie lauten die Matrix A und der Vektor $\vec{b}$?
   Antwort: Es ist

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (b) (2) Man bestimme das charakteristische Polynom von A.
   Antwort: Es ergibt sich $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 10\lambda$

   (c) (4) Man bestimme alle Eigenwerte von A, sowie eine Basis des Eigenraumes des betragskleinsten Eigenwertes.
   Antwort: Man findet $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(9 - \sqrt{41})$ und $\lambda_3 = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{41})$. Der betragskleinste Eigenwert ist 0 und eine Lösungsbasis des Eigenraumes $\{\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$

   (d) (1) Man bestimme die Dimension des Kerns von A.
   Antwort: Die gefragte Dimension ist 1

   (e) (1) Auf welches Problem der linearen Algebra führt der Ansatz $\vec{x}_n := \lambda^n \vec{v}$ für die Lösung von $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n + \vec{b}$.
   Antwort: Einsetzen führt auf $\lambda^n(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$. Dementsprechend ist entweder $\lambda = 0$ oder λ ein Eigenwert (die beiden Aussagen schließen einander nicht aus!).

2. Es sei auf $I\!R^4$ das übliche innere Produkt durch $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \sum_{i=1}^4 a_i b_i$ gegeben. Weiters seien die Vektoren $\vec{a} := (1, 2, 3, 4)^T$ und $\vec{b} := (1, 1, 1, 1)^T$ gegeben. Es sei eine Teilmenge U durch

$$U := \{\vec{x} \in I\!R^4 \mid \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle = 0\}$$

   festgelegt.

(a) (3) Man beweise daß U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^4$ ist, ermittle seine Dimension sowie eine Basis.

Antwort: U ist die Menge der Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ und deshalb linearer Teilraum von $\mathbb{R}^4$. Als Basis findet man (z.B., hängt davon ab, wie man die Gleichungen löst) $B := \{(1, -2, 1, 0)^T, (2, -3, 0, 1)^T\}$. Die Dimension ist 2, weil B zwei Elemente besitzt.

(b) (4) Man ermittle eine Orthonormalbasis von U.

Antwort: Von der obigen Basis ausgehend, findet man

$$B' := \{\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0)^T, \frac{1}{\sqrt{30}}(2, -1, -4, 3)^T\}$$

(c) (2) Für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ermittle man die Orthogonalprojektionen in U.

Antwort: Beide Projektionen sind Null, weil die Vektoren ja auf U orthogonal stehen (laut Angabe). Anzumerken ist, daß dieser Umstand als "Probe" benützt werden kann

(d) (1) Man bestimme das Minimum von $\|\vec{a} - \vec{u}\|$, wobei $\vec{u} \in U$ liegt.

Antwort: Im allgemeinen Fall ist dieses Minimum gleich $\|\vec{a} - P_U(\vec{a})\|$, und da $P_U(\vec{a}) = \vec{0}$ ist, ergibt sich für das Minimum der Wert von $\|\vec{a}\|$, also $\sqrt{30}$

3. Gegeben ist die Funktion $V(\vec{x}) := \frac{1}{\|\vec{x}-\vec{a}\|^2}$ im $\mathbb{R}^3$, wobei $\vec{a} := (1, 1, 1)^T$ und $\|\vec{x}\| = \|(x, y, z)^T\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (wie üblich) sei. Weiters sei $S := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$.

(a) (2) Man zeige, daß S im Definitionsbereich von V enthalten ist.

Antwort: $D(V) = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{a}\}$, und da $\|\vec{a}\| = \sqrt{3} \neq 1$, ist $\vec{a} \notin S$, also $S \subset D(V)$.

(b) (1) Begründen Sie, warum $\mu := \max_{\vec{x} \in S} V(\vec{x})$ existiert.

Antwort: Es ist S kompakt, V dort stetig, also existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß das Maximum von V auf S

(c) (2) Zeigen Sie

$$\mu = \min_{\vec{x} \in S} \frac{1}{V(\vec{x})}$$

Antwort: Es ist V positiv. Wenn daher V an der Stelle $\vec{x}$ das Maximum auf S annimmt, so nimmt $1/V$ an dieser Stelle eben das Minimum an

(d) (5) Man bestimme mögliche Werte von μ unter Benützung der Lagrangeschen Methode der Multiplikatoren.

Antwort: (c) benützend, kann man $f(x, y, z) := (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ bestimmen. Kompaktere (Vektor)notation benützend, findet man $\Phi(\vec{x}, \lambda) = \|\vec{x} - \vec{a}\|^2 - \lambda(\|\vec{x}\|^2 - 1)$ und findet $\nabla\Phi = 2(\vec{x} - \vec{a}) - 2\lambda\vec{x} = \vec{0}$ zusammen mit der Nebenbedingung als Gleichungen. Man findet $\vec{x} = \frac{1}{1-\lambda}\vec{a}$ und $\lambda \in \{1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}\}$. Dem entsprechen Werte von $V(\vec{x}) \in \{\frac{1}{(1+\sqrt{3})^2}, \frac{1}{(1-\sqrt{3})^2}\}$, von denen man den ersteren (den kleineren) ausscheidet.

4. Es sei K die Menge im ersten Quadranten, deren Punkte (x, y) den Ungleichungen $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ genügen.

   (a) (4) Eine Skizze der Figur K möge angefertigt werden.
   Antwort: Ein Viertel einer Ellipse mit den Halbmessern $a = 2$ und $b = 1$

   (b) (4) Es soll $J := \int_K f(x, y)\, d(x, y)$ als iteriertes Integral der Form

   $$J = \int_?^? dy \int_?^? f(x, y)\, dx$$

   ausgedrückt werden.
   Antwort: Es ergibt sich $J = \int_0^1 dy \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx$

   (c) (2) Man berechne den Flächeninhalt von K.
   Antwort: Man findet als Wert $\frac{\pi}{2}$

Nachname:	Matrnr:	25.6.2008 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y + z - 1\\ \dot{y} &= 2x + y + 3z - 1\\ \dot{z} &= 4x - y + 7z - 1\end{aligned}$$

   (a) (2) Das System läßt sich in der kompakten Form

   $$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$$

   anschreiben. Wie lauten die Matrix A und der Vektor $\vec{b}$?
   Antwort: Es ist

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 7\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$$

   (b) (2) Man bestimme den Rang von A, sowie jenen der erweiterten Matrix $(A|\vec{b})$.
   Antwort: Beide Matrizen haben Rang 2

   (c) (4) Man bestimme alle Lösungen $\vec{x}$ des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} + \vec{b} = \vec{0}$.
   Antwort: Elimination liefert als allgemeine Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5\\ 1\\ 3\end{pmatrix} u$, wobei $u \in \mathbb{R}$ beliebig wählbar ist. (Anmerkung: diese Darstellung der allgemeinen Lösung ist nicht eindeutig. Die partikuläre Lösung kann von der hier gefundenen um eine Lösung der homogenen Gleichung abweichen, diese wiederum durch ein Vielfaches des hier gefundenen Vektors ausgedrückt werden)

   (d) (2) Welche stationären Lösungen $\dot{\vec{x}} = \vec{0}$ hat das Differentialgleichungssystem? (Jede solche Lösung ist durch $\dot{\vec{x}} = \vec{0}$ bestimmt)
   Antwort: Jede solche Lösung $\vec{x}$ ist zugleich Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} + \vec{b} = \vec{0}$. Die Antwort lautet gleich zu jener in c)

   (e) (1) Geben Sie alle stationären Lösungen $\vec{x}$ des DGL-Systems mit $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} -3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ an.
   Antwort: Um stationäre Lösung zu sein, muß diese Lösung *konstant* sein. Damit ist sie Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} + \vec{b} = \vec{0}$. Einsetzen zeigt, daß dies der Fall ist, also ist die gesuchte Lösung gleich $\begin{pmatrix} -3\\ 1\\ 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5\\ 1\\ 3\end{pmatrix} u$

2. Es sei auf $\mathbb{R}^4$ das übliche innere Produkt durch $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \sum_{i=1}^4 a_i b_i$ gegeben. Weiters seien

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (2) Ist U ein Orthonormalsystem (kurz ONS)? Begründen Sie die Antwort.

Antwort: N: Es liegt zwar ein Orthogonalsystem vor, jedoch müßten alle Vektoren in U Länge 1 haben. Der erste der Vektoren hat Länge $\sqrt{3}$

(b) (3) Man gebe ein ONS V mit $\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(V)$ an.

Antwort: Man erkennt schnell, daß U ein Orthogonalsystem ist. Die Längen der Vektoren sind der Reihe nach $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ und 1. Somit kann als Antwort

$$V = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben werden.

(c) (3) Für $\vec{u} \in U$ berechne man die Größen $\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle$.

Antwort: Es ergibt sich (nach Nummerierung der Elemente in U in der angegebenen Reihenfolge)

$$\langle \vec{u}_1, \vec{a} \rangle = 1, \langle \vec{u}_2, \vec{a} \rangle = 2, \langle \vec{u}_3, \vec{a} \rangle = -1$$

(d) (2) Man bestimme $\vec{y} \in \mathcal{L}(U)$ mit $\|\vec{a} - \vec{y}\|$ minimal.

Antwort: Dazu muß man wissen, daß

$$\vec{y} := \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle \vec{u}_i, \vec{a} \rangle}{\|\vec{u}_i\|^2} \vec{u}_i$$

(die verallgemeinerte Fourierreihe) diese Aufgabe löst. Aus dem bereits Berechneten ergibt sich

$$\vec{y} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(Korrekturen am 27.8.09, wh)

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{\cos(x+y^2)}{2-x^2+y}$. Im folgenden ignorierbarer Hinweis: Reihenmanipulation.

(a) (2) Man bestimme und skizziere den Definitionsbereich $D(f)$.

Antwort: $D(f) = \{(x, y) \mid y \neq x^2 - 2\}$ besteht aus der Ebene, aus der eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel $S(0, -2)$ entfernt wird

(b) (2) Man bestimme $f(0,0)$ sowie die Ableitungen f_x und f_y an $(0,0)$.
Antwort: Man findet $f(0,0)=\frac{1}{2}$, $f_x(0,0)=0$ und $f_y(0,0)=-\frac{1}{4}$

(c) (3) Man bestimme die Hessesche Matrix

$$H(f)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(0,0)$.
Antwort: Es ist

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1-\frac{(x+y^2)^2}{2}}{2\left(1-\frac{x^2-y}{2}\right)}+O(3) \\ &= \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}x^2)(1+\tfrac{1}{2}(x^2-y)+\tfrac{1}{4}(x^2-y)^2)+O(3) \\ &= \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}x^2)(1+\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{4}y^2)+O(3) \\ &= \tfrac{1}{2}-\tfrac{y}{4}+\tfrac{y^2}{8}+O(3). \end{aligned}$$

Nun liest man alle Ergebnisse des Beispiels ab. Insbesondere ist $H(f)(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

(d) (3) Man gebe das Taylorpolynom von der Ordnung 2 von f mit Anschlußstelle $(0,0)$ an
Antwort: Das gesuchte Taylorpolynom lautet $\frac{1}{2}-\frac{y}{4}+\frac{y^2}{8}$.

4. Es sei K die Menge im ersten Quadranten, deren Punkte (x,y) den Ungleichungen $(2+y)^2\le x$ und $4y+5\ge x$ genügen.

(a) (4) Eine Skizze der Figur K möge angefertigt werden.
Antwort: Eine nach rechts geöffnete Parabel, und eine Gerade, die in $(1,-1)$ und $(9,1)$ die Parabel schneidet, beranden den Bereich

(b) (4) Es soll $J:=\int_K f(x,y)\,d(x,y)$ als iteriertes Integral der Form

$$J=\int_?^? dy\int_?^? f(x,y)\,dx$$

ausgedrückt werden.
Antwort: Es ergibt sich $J=\int_0^1 dy\int_{(2+y)^2}^{4y+5} f(x,y)\,dx$

(c) (2) Man berechne den Flächeninhalt von K.
Antwort: Es ist $\int_0^1 dy\int_{(2+y)^2}^{4y+5}\,dx=\cdots=\frac{2}{3}$

Nachname:	Matrnr:	12.6.2008 M2-ET (Herfort)

1. Es sei U der komplexe Vektorraum, der als lineare Hülle der Funktionen $f_n(x) := e^{-inx}$ mit $n := -1, 0, 1$ entsteht. Für $f \in U$ ist durch $f \mapsto f'' + \pi^2 f$ eine Abbildung A gegeben.

   (a) (2) Zeigen Sie, daß A als Abbildung von U nach U aufgefaßt werden kann.
   Antwort: Es ist $A(f_n)(x) = (-n^2 + \pi^2) f_n(x)$, insbesondere, da die f_n für $n = -1, 0, 1$ den Raum U aufspannen, ist $A(f_n) \in U$ und somit $A : U \to U$

   (b) (1) Man bestimme eine Matrizendarstellung für A bezüglich der gegebenen Basis.
   Antwort: Die f_n bilden eine Basis von U. Es liegt eine Diagonalmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} -1+\pi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \pi^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\pi^2 \end{pmatrix}$$

   vor

   (c) (4) Man bestimme das charakteristische Polynom von A. (Ignorierbarer Hinweis: das Polynom darf als Produkt von Polynomen angeschrieben werden).
   Antwort: Die Matrix ist diagonal mit Eigenwerten $-1 + \pi^2$ und π^2. Ihr charakteristisches Polynom lautet $p_A(\lambda) = -(\lambda + 1 - \pi^2)^2(\lambda - \pi^2)$

   (d) (2) Man bestimme Basen der Eigenräume zu jedem der Eigenwerte.
   Antwort: Zu $\lambda = -1 + \pi^2$ ist eine Basis $\{e^{-ix}, e^{ix}\}$ und zu $\lambda = \pi^2$ ist es $\{1\}$ (die konstante Funktion 1).

   (e) (1) Man gebe eine Basis des Kerns von A an.
   Antwort: Der Kern ist trivial, also $\ker A = \{0\}$

2. Auf der Menge der Polynome vom Grad ≤ 2 mit reellen Koeffizienten sei

$$B(f, g) := \int_0^\infty e^{-x} f(x) g(x)\, dx.$$

   (a) (2) Zeigen Sie $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!$ (Hinweis $\lim_{R\to\infty} R^n e^{-R} = 0$)
   Antwort: Es bezeichne $J_n := \int_0^\infty e^{-x} x^n dx$. Dann ergibt partielle Integration nach e^{-x} für $n \geq 1$ sofort $J_n = \frac{e^{-x}}{-1} x^n \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{-1} n x^{n-1} dx = \cdots = 0 + n J_{n-1}$. Da $J_0 = 1$ ist, ergibt sich die Behauptung

   (b) (2) Die Bilinearform B kann in der Form

$$B(f, g) = (a_0, a_1, a_2) A \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden, wobei $f = a_0 + a_1x + a_2x^2$ und $g = b_0 + b_1x + b_2x^2$ die beiden Polynome sind. Wie lautet die Matrix A?

Antwort: Es ist $A_{ij} = B(u_i, u_j)$, wobei u_i das i-te Basiselement ist. Bei uns ist $u_i = x^i$, somit $A_{ij} = \int_0^\infty e^{-x}x^{i+j}dx = (i+j)!$ Somit ist, (a) verwendend,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}$$

(c) (4) Man beweise oder widerlege, daß die Matrix A positiv definit ist.

Antwort: Die Matrix ist symmetrisch und erweist sich nach dem Hauptminorenkriterium ($1 > 0$, $1 > 0$, $4 > 0$) als positiv definit

(d) (2) Man beweise oder widerlege, daß die Bilinearform ein inneres Produkt auf dem Vektorraum der höchstens quadratischen Polynome mit reellen Koeffizienten beschreibt.

Antwort: Es liegt ein inneres Produkt vor. Die Punkte im einzelnen:

Zunächst ist $B(f,g) = B(g,f)$, also symmetrisch. Weil B bilinar ist, ist auch die geforderte Bilinearität des inneren Produkts erfällt. Weiters ist $B(f,f) = \int_0^\infty e^{-x}f(x)^2dx \geq 0$ und aus $B(f,f) = 0$ ergibt sich $\int_0^\infty e^{-x}f(x)^2dx = 0$. Weil für eine stetige Funktion f aus $\int_0^\infty e^{-x}|f(x)|\,dx = 0$ stets $e^{-x}f(x) = 0$ für alle $x \in [0,\infty)$ folgt, und $e^{-x} \neq 0$ ist, muß $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,\infty)$ gelten. Da f Polynom ist, und ein solches immer nur endlich viele Nullstellen haben kann, verschwindet f auf ganz $\mathbb{R}$. Also ist f das Nullpolynom und somit $B(f,g)$ *positiv definit.*

3. Gegeben ist die Funktion $f(x,y,z) = x + y + z\cos z$ und die Gleichung $f(x,y,z) = 0$.

(a) (1) Man bestimme die Ableitungen f_x, f_y und f_z.

Antwort: Man findet $f_x(x,y,z) = f_y(x,y,z) = 1$ und $f_z(x,y,z) = \cos z - z\sin z$

(b) (3) Zeigen Sie, daß durch die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung $U(0,0)$ eine Funktion $h(x,y)$ mit $f(x,y,h(x,y)) = 0$ für alle $(x,y) \in U(0,0)$ und $h(0,0) = 0$ bestimmt ist.

Antwort: Es ist f als Zusammensetzung von stetig differenzierbaren Funktionen selbst stetig differenzierbar. Weiters ist $f(0,0,0) = 0$ und $f_z(0,0,0) = 1 \neq 0$. Somit ist der Hauptsatz der impliziten Funktionen anwendbar

(c) (4) Man bestimme $h_x(0,0)$ und $h_y(0,0)$.

Antwort: Implizites Differenzieren der Gleichung $f(x,y,h(x,y)) = 0$ ergibt (in kurz gehaltener Notation – es steht f_x für $f_x(x,y,h(x,y)$ und h_x für $h_x(x,y)$)

$$f_x + f_z h_x = f_y + f_z h_y = 0$$

Einsetzen von $x = y = z = 0$ ergibt

$$1 + 1h_x(0,0) = 1 + h_y(0,0) = 0,$$

also $h_x(0,0) = h_y(0,0) = -1$.

(d) (2) Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene an die durch $f(x, y, z) = 0$ bestimmte Fläche im Punkt $(0, 0, 0)$.

Antwort: Der Gradient von f im Punkt $(0, 0, 0)$ ist $\nabla f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} f_x(0,0,0) \\ f_y(0,0,0) \\ f_z(0,0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sodaß sich als Gleichung $x + y + z = 0$ ergibt

4. Es sei K die Menge im ersten Quadranten, die durch die x-Achse sowie die Gerade mit der Gleichung $y = x$ begrenzt wird und deren Punkte (x, y) der Bedingung $xy \leq 1$ genügen.

(a) (4) Eine Skizze der Figur K möge angefertigt werden.

(b) (4) Es soll $J := \int_K f(x, y)\, d(x, y)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? dy \int_?^? f(x, y)\, dx$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Es ergibt sich $J = \int_0^1 dy \int_y^{\frac{1}{y}} f(x, y)\, dx$

(c) (2) Jemand führt durch $x = r \cos\phi$, $y = r \sin\phi$ Polarkoordinaten ein, sodaß das Integral in ein iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? d\phi \int_?^? g(r, \phi)\, dr$$

überführt wird. Man bestimme $g(r, \phi)$ und die Integralgrenzen.

Antwort: Die Funktionaldeterminante ist r, es ist $g(\phi, r) = f(r \cos\phi, r \sin\phi) r$ und

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\cos\phi \sin\phi}}} g(\phi, r)\, dr.$$

Nachname:	Matrnr:	23.5.2008 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist die 5×5-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 17 \\ 7 & 1 & 2 & 0 & 27 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

   (a) (2) Man bestimme den Rang von A.
   Antwort: 4

   (b) (4) Man bestimme das charakteristische Polynom von A. (Ignorierbarer Hinweis: das Polynom darf als Produkt von Polynomen angeschrieben werden).
   Antwort: Die Matrix besitzt eine Blockstruktur, nämlich, entlang der Hauptdiagonale folgt zwei 2×2-Blöcken eine 1×1-Matrix. Jede der 2×2-Matrizen ist selbst eine Dreiecksmatrix (hat also auch Blockstruktur mit 1×1-Matrizen). Dementsprechend ist das charakteristische Polynom das Produkt der charakteristischen Polynome der “skalaren” Matrizen (2), (1), (1), (0) und (7), also $p_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2(\lambda-0)(\lambda-7) = \ldots = -\lambda^5 + 11\lambda^4 - 33\lambda^3 + 37\lambda^2 - 14\lambda$

   (c) (2) Für den kleinsten Eigenwert von A bestimme man eine Basis des zugehörigen Eigenraumes.
   Antwort: Der kleinste Eigenwert ist 0 und als Basis eignet sich $\{(0,0,0,1,0)^T\}$

   (d) (2) Man gebe eine Basis des Kerns von A an.
   Antwort: Als Basis eignet sich $\{(0,0,0,1,0)^T\}$, weil der kleinste Eigenwert Null ist, und somit sein Eigenraum mit dem Kern von A übereinstimmen muß

2. Auf dem Intervall $I = [0,1]$ soll für Polynome u, v vom Grad ≤ 2 eine Bilinearform durch

$$B(u,v) := \int_0^1 xu(x)v(x)\,dx$$

   festgelegt sein. Es sei weiters $\{1, x, x^2\}$ als Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad ≤ 2 mit reellen Koeffizienten gewählt.

   (a) (4) Die Bilinearform B kann in der Form

$$B(u,v) = (a_0, a_1, a_2) A \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

   beschrieben werden, wobei $u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ und $v = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ die beiden Polynome sind. Wie lautet die Matrix A?

Antwort: Ganz allgemein ist $A_{ij} = B(b_i, b_j)$, wobei b_i das i-te Basiselement ist. Somit ist z.B. $A_{23} = B(x, x^2) = \int_0^1 x \cdot x \cdot x^2\, dx = \frac{1}{5}$, etc. Es ist

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

(b) (4) Man beweise oder widerlege, daß die Matrix A positiv definit ist.

Antwort: Zunächst ist A symmetrisch. Danach ergeben sich die Hauptminoren $\frac{1}{2} > 0$, $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} - \frac{1}{9} > 0$ und $\det A = \ldots = \frac{1}{12}\frac{1}{60}\frac{1}{60} > 0$. Nach dem Hauptminorenkriterium ist somit A positiv definit.

(c) (2) Man beweise oder widerlege, daß die Bilinearform ein inneres Produkt auf dem Vektorraum der höchstens quadratischen Polynome mit reellen Koeffizienten beschreibt.

Antwort: Es liegt ein inneres Produkt vor. Die Punkte im einzelnen:

Zunächst ist $B(u, v) = B(v, u)$, also symmetrisch. Weil B bilinar ist, ist auch die geforderte Bilinearität des inneren Produkts erfällt. Weiters ist $B(u, u) = \int_0^1 xu(x)^2 dx \geq 0$ und aus $B(u, u) = 0$ ergibt sich $\int_0^1 xu(x)^2 dx = 0$. Weil für eine stetige Funktion f aus $\int_0^1 |f(x)|\, dx = 0$ stets $f(x) = 0$ auf $[0, 1]$ folgt, muß $xu(x)^2 = 0$ für alle $x \in [0, 1]$ gelten. Ist $x \neq 0$, so ist somit $u(x) = 0$ und aus Stetigkeitsgründen ist auch $u(0) = 0$, also ist u das Nullpolynom und somit $B(u, v)$ *positiv definit.*

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{1+xy}{\cos(x+2y)}$

(a) (3) Man skizziere die Menge $A := \{(x, y) \mid |x + 2y| < \frac{\pi}{2}\}$ und zeige, daß A im Definitionsbereich von f liegt.

Antwort: Es entsteht ein "Streifen", der von Geraden begrenzt wird, die jeweils durch $(\frac{\pi}{2}, 0)$ und $(0, \frac{\pi}{4})$ bzw. $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ und $(0, -\frac{\pi}{4})$ laufen. Die Funktion ist dort wohldefiniert, weil der Nenner nicht verschwinden kann.

(b) (4) Man bestimme die Hessematrix $H(f)$ an der Stelle $(0, 0)$.

Antwort: $H(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Beim Differenzieren darf man sich halt nicht verrechnen. Etwas einfacher ist Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & \tfrac{1+xy}{1-\frac{1}{2}(x+2y)^2+\cdots} \\ = {} & (1 + xy)(1 + \tfrac{1}{2}(x + 2y)^2 + \cdots) \\ = {} & 1 + xy + \tfrac{1}{2}(x^2 + 4xy + 4y^2) + \cdots \\ = {} & 1 + \tfrac{1}{2}(x^2 + 6xy + 4y^2) + \cdots \end{aligned}$$

Hiebei sind Glieder ab dritter Ordnung vernachlässigt worden. Hieraus liest man aus der aus den quadratischen Gliedern bestehenden *quadratischen Form* (unter Weglassung des Vorfaktors $\frac{1}{2}$) die Hessematrix ab

(c) (3) Man beweise bzw. widerlege, daß f an der Stelle $(0,0)$ ein lokales Maximum besitzt.

Antwort: Es ist zwar $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$, jedoch hat die Hessematrix die Hauptminoren $1 > 0$ und $\det H(f) = 4 - 9 = -5 < 0$, also liegt ein *Sattelpunkt* auf dem Graphen bei $(0,0)$ vor, sodaß es sich um kein Extremum handelt

4. Im $\mathbb{R}^2$ sei K die beschränkte Menge des ersten Quadranten, die durch die Kurven mit den Gleichungen $x^2 + 3y^2 = 1$, $x = 0$ und $y = x$ begrenzt wird.

(a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

Antwort: Im ersten Quadranten wird von einer elliptischen Scheibe (Halbachsen der Längen 1 in x-Richtung und $\frac{1}{\sqrt{3}}$ in y-Richtung) durch $y = x$ der rechte untere Teil weggeschnitten

(b) (4) Es soll $J := \int_K f(x,y)\, d(x,y)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? dx \int_?^? f(x,y)\, dy$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Es ergibt sich $J = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{\sqrt{\frac{1}{3}(1-x^2)}} f(x,y)\, dy$

(c) (2) Jemand führt durch $x = r\cos\phi$, $y = \frac{r}{\sqrt{3}}\sin\phi$ neue Koordinaten ein, sodaß das Integral in ein Bereichsintegral der Form

$$J = \int_L g(r,\phi)\, d(r,\phi)$$

überführt wird. Man bestimme $g(r,\phi)$ und die Begrenzungen von L.

Antwort: Die Funktionaldeterminante ist $\begin{vmatrix} \cos(\phi) & -r\sin(\phi) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\phi & \frac{r}{\sqrt{3}}\cos\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}r$. Die Begrenzungen gehen der Reihe nach in jene von L über, nämlich $r = 0$, $r = 1$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ und $\phi = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. Somit bekommt man

$$J = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{[0,1]\times[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]} f(r\cos\phi, \frac{r}{\sqrt{3}}\sin\phi) r\, d(r,\phi)$$

als Ergebnis. Mithin ist $g(r,\phi) = \frac{1}{\sqrt{3}} r f(r\cos\phi, \frac{r}{\sqrt{3}}\sin\phi)$

Nachname:	Matrnr:	15.5.2008 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist die 3×3-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) (2) Man bestimme den Rang von A.
   Antwort: 2

   (b) (4) Man bestimme eine Basis des Kerns von A.
   Antwort: Eine mögliche Basis: $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \}$

   (c) (2) Man bestimme eine Basis des Bildes von A.
   Antwort: Z.B. die beiden ersten Spalten von A

   (d) (1) Man gebe eine möglichst kleine Anzahl linearer Gleichungen der Form $ap+bq+cr = 0$ an, denen ein Vektor $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ genügen muß, damit das Gleichungssystem $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ lösbar ist.
   Antwort: Man bestimmt den Kern von A^T und transponiert die Elemente einer Basis (benützt sie als Zeile(n)). Als Lösbarkeitsbedingung ergibt sich solcherart $-p+q+r=0$

2. Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ als Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   gegeben.

   (a) (4) Man ermittle eine Orthogonalbasis des Teilraumes $U = \mathcal{L}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
   Antwort: Man erkennt sofort, daß $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt. Somit genügt es, die übliche Formel $\vec{c} - P_{\mathcal{L}(\vec{a},\vec{b})}(\vec{c}) = \vec{c} - \frac{(\vec{c},\vec{a})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} - \frac{(\vec{c},\vec{b})}{||\vec{b}||^2}\vec{b}$ zu verwenden, um den dritten Vektor der Orthogonalbasis von U, nämlich $\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu finden.

(b) (3) Man bestimme die Orthogonalprojektion von $\vec{c}$ in den von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugten linearen Teilraum.

Antwort: Es ist dies geradewegs jener Vektor, den man von $\vec{c}$ in (a) abgezogen hat, nämlich $\frac{(\vec{c},\vec{a})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} + \frac{(\vec{c},\vec{b})}{||\vec{b}||^2}\vec{b} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) (3) Man ermittle eine Orthonormalbasis des Teilraumes $W := \mathcal{L}(\vec{a}, \vec{c})$.

Antwort: Es ergibt sich $\vec{c} - \frac{(\vec{c},\vec{a})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} = \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als in W liegender auf $\vec{a}$ orthogonaler Vektor. Nach Normieren ergibt sich als Orthonormalbasis von W

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{1+xy}{\cos(x+2y)}$

(a) (3) Man gebe den Definitionsbereich von f an.

Antwort: Die Funktion ist für alle $x, y \in I\!R$ definiert, für die $x + 2y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist.

(b) (4) Man berechne die partiellen Ableitungen $f_x(0, 0)$ und $f_y(0, 0)$.

Antwort: $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$

(c) (3) Man bestimme $f_{xy}(0, 0)$ (ignorierbarer Hinweis: Taylorreihe!)

Antwort: Es ist $f(x, y) = \frac{1+xy}{1-\frac{1}{2}(x+2y)^2+\cdots} = (1 + xy)(1 + \frac{1}{2}(x + 2y)^2 + \cdots)$ (geometrische Reihe verwendet), also ist der Koeffizient von xy gleich 3 (Ausmultiplizieren!). In der Taylorreihe ist der entsprechende Koeffizient durch $\frac{1}{2!}2f_{xy}(0, 0)$ gegeben, woraus

$$f_{xy}(0, 0) = 3$$

folgt

4. Im $I\!R^3$ sei K die beschränkte Schnittfigur, welche von einem Teil einer Kugeloberfläche (Radius = 1) und einem Drehparaboloid mit der Gleichung $z = x^2 + y^2$ begrenzt wird und nicht negative z-Koordinaten besitzt.

(a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

(b) (6) Es soll $J := \int_K f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_A d(x, y) \int_?^? f(x, y, z)\, dz$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Als Skizze erhält man ein einer Urne ähnlich sehendes Gebilde.

Um A zu finden, genügt es, die beiden Flächen zu schneiden und in die (x,y)-Ebene zu projizieren. Man findet für A eine Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ und Mittelpunkt der Ursprung. Demnach ergibt sich $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\}$ und als Ergebnis das umgeformte Integral

$$J = \int_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})} d(x,y) \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz.$$

Nachname:	Matrnr:	11.4.2008 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben sind die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$C := \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

   (a) (4) Welche Produkte XY mit $X, Y \in \{A, B, C\}$ können gebildet werden und welche Dimensionierung hat das jeweilige Produkt?
   Antwort: AC (4×1), BA (1×4), AA (4×4), BC (1×1), CB (4×4)

   (b) (6) Welche Produkte XYZ mit $X, Y, Z \in \{A, B, C\}$ können gebildet werden?
   Antwort: ACB (4×4), BAA (1×4), BAC (1×1), AAA (4×4), AAC (4×1), BCB (1×4), CBA (4×4), CBC (4×1)

2. Im $\mathbb{R}^2$ habe eine lineare Transformation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis

$$B := \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

eine Matrixdarstellung

$$A_B := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (4) Man gebe die Matrix A der Darstellung von f bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$, nämlich

$$E := \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

   an.
   Antwort: Es ist $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}(-1) + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, sodaß $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ folgt. Hieraus ergibt elementare Matrizenrechung $A = \begin{pmatrix} -17 & 13 \\ -21 & 17 \end{pmatrix}$

(b) (3) Man bestimme alle Eigenwerte von f.

Antwort: Man darf die Matrix A_B heranziehen. Es ergibt sich als charakteristisches Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 16$. Danach sind die Eigenwerte $\{4, -4\}$

(c) (2) Zum größeren der Eigenwerte gebe man eine Basis des Eigenraums an. Welche Koordinaten haben die Basisvektoren des Eigenraumes bezüglich der kanonischen Basis?

Antwort: Der größere der Eigenwerte ist 4. Nun ist es klug, die Matrix A zu verwenden, damit man sich das Umrechnen erspart: Man findet $\vec{v} = \begin{pmatrix} 13 \\ 21 \end{pmatrix}$ als möglichen Basisvektor des gefragten Eigenraumes

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \ln(xye^{x^2+y^2})$.

   (a) (3) Man skizziere den Definitionsbereich von f in $I\!R^2$.

   (b) (4) Man bestimme $f_x(1, 1)$ und $f_y(1, 1)$.

   Antwort: Es ist $f(x, y) = \ln x + \ln y + x^2 + y^2$ im ersten Quadranten. Somit ist $f_x = \frac{1}{x} + 2x$ und somit $f_x(1, 1) = f_y(1, 1) = 3$ aus Symmetriegründen

   (c) (3) Man bestimme $f_{xx}(1, 1)$.

   Antwort: Die Umformung von f beachtend, ergibt sich $f_{xx} = -\frac{1}{x^2} + 2$, somit $f_{xx}(1, 1) = 1$

4. Im ersten Quadranten des $I\!R^2$ sei B jener ebene und beschränkte Bereich, der durch die Kurven mit den Gleichungen $x^2 + y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$ und $y = \sqrt{3}x$ begrenzt begrenzt wird.

   (a) (3) Man skizziere den Bereich.

   (b) (4) Man gebe $\int_B f(x, y)\, d(x, y)$ als iteriertes Integral an, indem man Polarkoordinaten einführt.

   Antwort: Es ist $\int_B f(x, y)\, d(x, y) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\phi \int_1^{\sqrt{3}} f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\, dr$.

   (c) (3) Für $f(x, y) := xy$ bestimme man den Wert $\int_B f(x, y)\, d(x, y)$.

   Antwort: Man findet $\int_B f(x, y)\, d(x, y) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\phi \int_1^{\sqrt{3}} r^3 \cos\phi \sin\phi\, dr = \cdots = \frac{1}{4}$.

Nachname:	Matrnr:	13.3.2008 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) (4) Man bestimme das charakteristische Polynom von A

   Antwort: Die Blockstruktur der 2×2-Blöcke ergibt $(\lambda^2 - 2\lambda + 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 16\lambda^2 - 22\lambda + 15$

   (b) (3) Man bestimme alle Eigenwerte von A

   Antwort: Man muß nur quadratische Gleichungen lösen: Es ergeben sich $1 \pm i\sqrt{2}$ und $2 \pm i$

   (c) (3) Für welche $\vec{b} \in \mathbf{C}^4$ ist die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

   Antwort: Für alle, da A regulär ist.

2. Die Punkte $P(x, y)$, welche die Gleichung $x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 6y = 1$ erfüllen, beschreiben eine ebene Kurve (Quadrik):

   (a) (1) Falls die Quadrik in der Form $0 = \vec{x}^T A\vec{x} + 2\vec{a}^T\vec{x} + \alpha$ angeschrieben wird, so gebe man A, $\vec{a}$ und α an.

   Antwort: Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\alpha = -1$.

   (b) (3) Falls die Quadrik einen Mittelpunkt $\vec{x}_0$ hat, gebe man dessen Koordinaten an.

   Antwort: Der Mittelpunkt $\vec{x}_0$ muß die Gleichung $A\vec{x}_0 + \vec{a} = \vec{0}$ erfüllen. Man findet $\vec{x}_0 = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) (4) Man ermittle die Eigenwerte von A und zugehörige Eigenvektoren.

   Antwort: Man findet $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ Als zughörige Eigenvektoren können die Spalten der Matrix

$$S = \frac{1}{10 + 2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1+\sqrt{5} \\ 1+\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}$$

   herangezogen werden, wobei der Vorfaktor dazu dient, die Matrix orthogonal zu machen (wird erst im nächsten Schritt gebraucht).

(d) (2) Liegt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel vor? Begründen Sie Ihre Antwort.

Antwort: Koordinatentransformation mittels S ergibt $S^T AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ und da beide Eigenwerte positiv sind, liegt eine (möglicherweise zu einem Punkt oder der leeren Menge degenerierte) Ellipse vor.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = x^2+y^2$ und die Nebenbedingung $g(x, y) = xy-1 = 0$

(a) (6) Man bestimme alle mittels Langrangemultiplikatorenmethode auffindbaren Kandidaten für ein Minimum von f unter der angegebenen Nebenbedingung.

Antwort: Man setzt $\Phi(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 1)$ und findet aus $2x + \lambda y = 2y + \lambda x = xy - 1 = 0$ sehr leicht $x = y = \pm 1$.

(b) (4) Man gebe eine geometrische Deutung der Aufgabe.

Antwort: Das Abstandsquadrat eines Punktes auf der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ zum Ursprung ist zu minimieren.

4. Durch die Gleichung $F(x, y, z) = xyz + \ln z - 1 = 0$ läßt sich eine differenzierbare Funktion $h(x, y)$ mit $h(1, 1) = 1$ und $F(x, y, h(x, y)) = 0$ für alle (x, y) nahe genug an $(1, 1)$ festlegen.

(a) (3) Begründen Sie die Richtigkeit der Aussage. (ursprünglich fehlte in der Angabe '-1', deshalb wurden 3 Punkte bei jedem automatisch angerechnet.)

Antwort: Weil $F(1, 1, 1) = 0$ und $F_z(1, 1, 1) = 2 \neq 0$ ist, kann der Hauptsatz für implizite Funktionen herangezogen werden.

(b) (4) Es soll $h_x(1, 1)$ und $h_y(1, 1)$ ermittelt werden.

Antwort: $h_x(1, 1) = -\frac{1}{2}$.

(c) (3) Man bestimme den Wert von $h_{xy}(1, 1)$.

Antwort: Man findet $h_{xy}(1, 1) = \frac{1}{8}$.

Nachname:	Matrnr:	28.2.2008 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x - 4y + t \\ \dot{y} &= 2x + 3y + 1 \end{aligned}$$

   Dieses System läßt sich unter Benützung von Matrizen und Vektoren in der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$ anschreiben.

   (a) (2) Wie lauten A und $\vec{b}$?
   Antwort: Es ist $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) (1) Man bestimme das charakteristische Polynom von A
   Antwort: $\lambda^2 - 1$

   (c) (4) Zu jedem Eigenwert bestimme man einen Eigenvektor.
   Antwort: Zu 1 kann $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und zu -1 der Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als zugehöriger Eigenvektor gefunden werden. Jede andere Lösung ist jeweils skalares Vielfaches.

   (d) (2) Welche Matrix S erlaubt Diagonalisierung von A?
   Antwort: $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, die Matrix, deren Spalten die gefundenen Eigenvektoren sind.

   (e) (1) Wie lautet das entkoppelte Differentialgleichungssystem?
   Antwort: Wenn $\vec{x} = S\vec{u}$ die Koordinatentransformation ist, so ergibt sich $\dot{\vec{u}} = S^{-1}AS\vec{u} + S^{-1}\vec{b}$, also nach kurzer Rechung mit dem angegebenen S

$$\dot{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{u} + \begin{pmatrix} t+2 \\ -t-1 \end{pmatrix}$$

   oder, wenn $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ so hat man die skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u + t + 2 \\ \dot{v} &= -v - t - 1 \end{aligned}$$

2. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) (3) Man berechne den Wert der Determinante von A.

Antwort: Die Blockstruktur ergibt $\det A = (-1)\times\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\times\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)\times 2\times(-4) = 8$.

(b) (2) Man ermittle die Spur von A.

Antwort: Die Spur als Summe der Diagonalelemente ist $(-1)+(-1)+4+1+0 = 3$.

(c) (3) Wenn das charakteristische Polynom von A in der Form $p = \lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5$ angeschrieben ist, wie lauten a_1 und a_5?

Antwort: Es ist a_1 der negative Wert der Spur, also $a_1 = -3$ und a_5 der negative Wert der Determinante, also $a_5 = -8$.

(d) (2) Geben Sie mindestens 3 Eigenwerte von A an.

Antwort: Die Blockstruktur läßt die Berechnung aller Eigenwerte in einfacher Weise zu: Die 3×3-Determinante hat selbst Unterblöcke, aus denen -1 und die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ bestimmbar sind, also kann $\{-1, 1, 2\}$ als Antwort auf die Frage gegeben werden.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = \frac{\cos(x-y)}{1+y^2}$

(a) (3) Man gebe den Definitionsbereich von f an.

Antwort: Die Funktion ist für alle $x, y \in \mathbb{R}$ definiert, also ist $D(f) = \mathbb{R}^2$.

(b) (4) Man berechne die partiellen Ableitungen $f_x(0,0)$ und $f_y(0,0)$.

Antwort: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

(c) (3) Man bestimme die Taylorreihe bis Glieder einschließlich zweiter Ordnung bei Entwicklung von f an der Stelle $(0,0)$.

Antwort: Es ist $f(x,y) = (1 - \frac{1}{2}(x-y)^2 + \ldots)\frac{1}{1+y^2} = (1 - \frac{1}{2}(x-y)^2 + \ldots)(1 - y^2 + \ldots)$ (geometrische Reihe verwendet und Glieder ab 3.Ordnung vernachlässigt). Ausmultiplizieren und Vernachlässigen der Glieder ab 3.Ordnung ergibt

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(-x^2 + 2xy - 3y^2) + \ldots$$

4. Im $\mathbb{R}^2$ sei K die ebene Figur, welche im ersten Quadranten durch die Bedingungen $x^2 + y^2 \leq 3$, $xy \geq 1$ bestimmt ist.

(a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

(b) (6) Es soll $J := \int_K f(x,y)\,d(x,y)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? dx \int_?^? f(x,y)\,dy$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Als Skizze erhält man ein unter 45 Grad geneigtes “linsenartiges” Gebilde. Als Ergebnis findet man das umgeformte Integral

$$J = \int_{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}^{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}} dx \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Nachname:	Matrnr:	10.1.2008 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} + 2\dot{y} - x + 2y &= t \\ 2\dot{x} - 3\dot{y} + 8x &= e^t \end{aligned}$$

Dieses System läßt sich unter Benützung von Matrizen und Vektoren in der Form $A\dot{\vec{x}} = B\vec{x} + \vec{b}(t)$ anschreiben.

(a) (4) Wie lauten A, B und $\vec{b}$?
Antwort: Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$

(b) (6) Wie kann das System in der Form $\dot{\vec{x}} = C\vec{x} + \vec{c}(t)$ dargestellt werden? Wie lauten C und $\vec{c}(t)$?
Antwort: Da A invertierbar ist, ergibt sich $\dot{\vec{x}} = A^{-1}(B\vec{x} + \vec{b}(t))$. Es ist $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Somit ist $C = A^{-1}B = \cdots = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -13 & -6 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}(t) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$.

2. Von einer reellen symmetrischen Matrix A weiß man, daß ihre Hauptdiagonale, der letzte Spaltenvektor und die letzte Zeile lediglich aus Nullen bestehen. Weiters kennt man den Eigenwert $\lambda = \sqrt{2}$. Der Kern hat Dimension 1 und das Bild Dimension 2.

(a) (3) Um eine wieviel mal wieviel Matrix handelt es sich? angeschrieben werden.
Antwort: Da Kern und Bild zusammen die Dimension des Definitionsbereichs ausmachen, ergibt sich A als 3×3-Matrix.

(b) (7) Man bestimme alle Matrizen A mit den angegebenen Eigenschaften.
Antwort: Man weiß bereits, daß $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist, wobei lediglich a unbekannt ist (Symmetrie!). Das charakteristische Polynom lautet $-\lambda^3 + 0\lambda^2 - (-a^2)\lambda + 0$, also $-\lambda(\lambda^2 - a^2)$. Einsetzen von $\lambda = \sqrt{2}$ ergibt $\sqrt{2}(2 - a^2) = 0$, also $a = \pm\sqrt{2}$. Somit ergeben sich 2 Lösungen, nämlich

$$A \in \{ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \}.$$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{1+3x^2-y}{2+y^2}$

(a) (3) Man gebe den Definitionsbereich von f an.
Antwort: Die Funktion ist für alle $x, y \in \mathbb{R}$ definiert, also ist $D(f) = \mathbb{R}^2$.

(b) (4) Man berechne die partiellen Ableitungen $f_x(0,0)$ und $f_y(0,0)$.
Antwort: $f_x(x,y) = \frac{6x}{2+y^2}$, somit $f_x(0,0) = 0$. Weiters ist $f_y(0,0) = -\frac{1}{2}$.

(c) (3) Man bestimme $f_{xxyy}(0,0)$ (ignorierbarer Hinweis: Taylorreihe!)
Antwort: Es ist $f(x,y) = \frac{1}{2}\frac{1+3x^2-y}{1+\frac{1}{2}y^2} = \frac{1}{2}(1+3x^2-y)(1-\frac{1}{2}y^2+\cdots)$(geometrische Reihe verwendet), also ist der Koeffizient von x^2y^2 gleich $-\frac{3}{4}$ (Ausmultiplizieren!). In der Taylorreihe ist der entsprechende Koeffizient durch $\frac{1}{4!}\binom{4}{2} f_{xxyy}(0,0)$ gegeben, woraus die Gleichung

$$\frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 6 \times f_{xxyy}(0,0) = -\frac{3}{4}$$

entsteht, deren Lösung $f_{xxyy}(0,0) = -3$ ist.

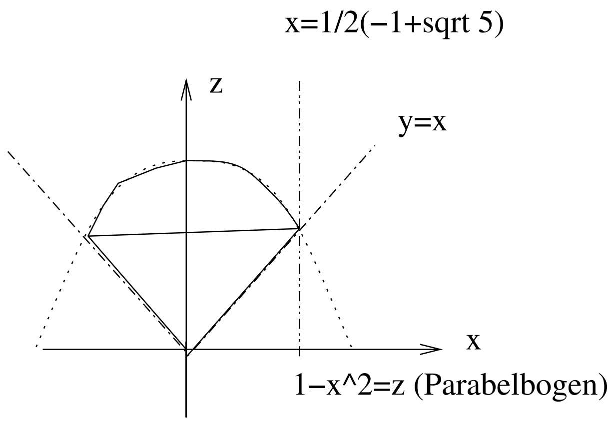
4. Im $\mathbb{R}^3$ sei K die Schnittfigur, welche durch die Bedingungen $x^2 + y^2 \leq z^2$ und $1 - x^2 - y^2 \geq z \geq 0$ bestimmt ist.

(a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

(b) (6) Es soll $J := \int_K f(x,y,z)\, d(x,y,z)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_A d(x,y) \int_?^? f(x,y,z)\, dz$$

ausgedrückt werden.
Antwort: Als Skizze erhält man einen nach oben geöffneten Kegel, der nach oben von dem durch $(0,0,1)$ gehenden nach unten geöffneten Rotationsparaboloid abgeschnitten wird.



rotiert um die z−Achse −> "Eistuete"

Dementsprechend müssen entlang der Schnittkante (einem Kreis) die Gleichungen $x^2 + y^2 = (1 - x^2 - y^2)^2$ gelten, somit $z^2 = (1 - z^2)^2$, aus der man $z = 1 - z^2$, also

$z = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ ($z > 0$!!) bzw. $z^2 = -(1-z^2)^2$ (ohne Lösung) ableitet. Demnach ergibt sich $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\}$ und als Ergebnis das umgeformte Integral

$$J = \int_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})} d(x,y) \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1-x^2-y^2} f(x,y,z)\, dz.$$

Nachname:	Matrnr:	13.12.2007 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & E \\ F & G \end{pmatrix},$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad 0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und X, Y, U, V jeweils 2×2-Matrizen sein sollen.

(a) (1) Geben Sie an, wieviele Zeilen und Spalten die Blockmatrix $\begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix}$ hat.

Antwort: Aufgrund der Blockstruktur ist es eine 4×4-Matrix

(b) (3) Welche Möglichkeiten hat man für die Zeilen- und Spaltenzahl der Lösungsmatrix. Geben Sie ein Begründung für alle von Ihnen gefundenen Möglichkeiten.

Antwort: Es handelt sich um 4×4-Matrizen. Die gesuchte Matrix muß 4 Zeilen haben, damit die Multiplikation auf der linken Seite möglich ist und 4 Spalten, damit rechts eine 4-spaltige Matrix das Ergebnis sein kann.

(c) (6) Man berechne die Matrizen Y und U. (Hinweis: Blockstruktur beachten).

Antwort: Man findet die Matrizengleichungen $AX + BU = I$, $AY + BV = O$, $0X + CU = 0$ und $0Y + CV = G$. Da C regulär ist, ergibt sich aus der 3.ten Gleichung $U = 0$. Danach ergibt die 1.te Gleichung $X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Die 4.te Gleichung ergibt $V = C^{-1}G = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nun ergibt die 2.te Gleichung $Y = -A^{-1}BV = \begin{pmatrix} -25 & -30 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$.

2. Gegeben ist das Differenzengleichungssystem $x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n + y_n, \quad y_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n$ und die Anfangsbedingung $x_0 = y_0 = 1$.

(a) (2) Das System kann in der Form $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$ und Anfangsbedingung $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ angeschrieben werden. Wie lauten A und a, b?

Antwort: $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ und $a = b = 1$.

(b) (4) Es sind die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A zu bestimmen.

Antwort: Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}$, somit sind die Eigenwerte 1 und $\frac{1}{2}$. Eigenvektoren sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu $\lambda = 1$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu $\lambda = \frac{1}{2}$.

(c) (3) In welches entkoppelte Differenzengleichungssystem kann das Ausgangssystem übergeführt werden?

Antwort: Setzt man $\vec{x}_n = S\vec{u}_n$ mit $S := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, so ist $J := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und demnach $\vec{u}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{u}_n$ und $\vec{u}_0 = S^{-1}\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ das entkoppelte System.

(d) (1) Man bestimme $\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

Antwort: Es ist $\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = S \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, wobei die letztere Umformung wegen der Stetigkeit von S möglich ist. Für $\vec{u}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ ergibt sich sofort $u_{n+1} = u_n = 2$ und $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, also als GW $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Multiplikation mit S ergibt als den gesuchten Grenzwert $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) := x^{\cos y} y^{\cos x}$ auf dem Quadrat $Q := (0, \frac{\pi}{4}) \times (0, \frac{\pi}{4})$.

(a) (3) Begründen Sie, warum diese Funktion auf Q wohldefiniert ist.

Antwort: Die Funktion a^x ist für positives a und alle $x \in I\!R$ definiert. Deshalb ist die Funktion $x^{\cos y}$ für positives x und alle y definiert. Da jedoch $y^{\cos x}$ nur für positive y gebildet werden kann, müssen sowohl x als auch y positiv sein. Das trifft für alle (x, y) in Q zu.

(b) (4) Man berechne die partiellen Ableitungen f_x und f_y.

Antwort: $f_x(x, y) = f(x, y) \left(\frac{\cos y}{x} - \sin x \ln y\right)$ und $f_y(x, y) = f(x, y) \left(\frac{\cos x}{y} - \sin y \ln x\right)$

(c) (2) Ist f auf Q differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Antwort: Es sind f_x und f_y beides stetige Funktionen und deshalb ist f differenzierbar.

(d) (1) Zeigen Sie, daß f auf Q kein lokales Extremum besitzen kann. (Hinweis: Welches Vorzeichen hat $\ln x$ auf dem Intervall $(0, \frac{\pi}{4})$?).

Antwort: Für ein solches lokales Extremum müßten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\cos y}{x} &= \sin x \ln y \\ \frac{\cos x}{y} &= \sin y \ln x\end{aligned}$$

gelten. In beiden Gleichungen steht links ein positiver Ausdruck, jedoch ist der Ausdruck rechts (weil der Logarithmus auf $(0, \frac{\pi}{2})$ negativ ist!) negativ. Somit können sie in Q nicht gelöst werden.

4. Im $I\!R^3$ sei K die Schnittfigur, welche durch die Bedingungen $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1 - x^2 - y^2$ und $z \geq 0$ bestimmt ist.

   (a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

   (b) (6) Es soll $J := \int_K f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ als iteriertes Integral der Form

   $$J = \int_?^? dx \int_?^? dy \int_?^? f(x, y, z)\, dz$$

   ausgedrückt werden.

   Antwort: Als Skizze erhält man einen nach oben geöffneten Kegel, der von der Kugelkalotte begrenzt wird – rotationssymmetrisch bei Rotation um die z-Achse. $J = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz.$

Nachname:	Matrnr:	15.11.2007 M2-ET (Herfort)

1. Es sei U der reelle Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2 und V der reelle Vektorraum von Funktionen der Form $a_1\frac{1}{z} + a_2\frac{1}{z^2} + a_3\frac{1}{z^3}$ mit $a_1, a_2, a_3 \in I\!R$ und z positiv. Weiters sei für ein Polynom p eine Funktion $Z(p)(z) := \int_0^\infty p(x)e^{-zx}dx$ definiert.

   (a) (4) Man zeige, daß die Funktionen $\{\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^3}\}$ eine Basis von V sind.
   Antwort: Die angegebenen Funktionen liegen in V. Angenommen $a_1\frac{1}{z} + a_2\frac{1}{z^2} + a_3\frac{1}{z^3} = 0$ für alle $z > 0$. Dann ist z^3 mal dem Ausdruck für all diese z gleich Null, also $a_1z^2 + a_2z + a_3 = 0$ für alle $z > 0$. Dies ist ein quadratisches Polynom, kann also nur 2 Nullstellen haben, außer alle Koeffizienten verschwinden.

   (b) (3) Zeigen Sie, daß Z als lineare Abbildung von U nach V aufgefaßt werden kann.
   Antwort: Man setzt ein: Die Integration ist linear, daher auch Z. Ist x^k ein beliebiges Polynom, so führt partielle Integration (nach dem unterstrichenen Term) auf $Z(x^k)(z) = \int_0^\infty x^k\underline{e^{-zx}}dx = \frac{e^{-zx}}{-z}x^k\Big|_0^\infty - \frac{1}{z}\int_0^\infty(-e^{-zx}kx^{k-1}dx = \frac{k}{z}Z(x^{k-1})(z)$. Da $Z(1)(z) = \frac{1}{z}$ ist, ergibt sich aus der Rekursion $Z(x)(z) = \frac{1}{z^2}$ und $Z(x^2)(z) = \frac{2}{z^3}$. Deshalb führt Z die Basiselemente von U in Elemente von V über, und ist somit eine lineare Abbildung von U nach V.

   (c) (3) Man bestimme eine Matrix A bezüglich der Basis $\{1, x, x^2\}$ von U und der oben angegebenen von V.
   Antwort: Die ausgewerteten Integrale ergeben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $\dot{x} = 2x + 2y + t, \dot{y} = 6x - 2y$.

   (a) (3) Das System kann in der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$ angeschrieben werden, wobei A eine 2×2-Matrix, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\vec{b}$ von t abhängige Vektoren sind. Wie lauten A und $\vec{b}$?
   Antwort: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (b) (4) Es sind die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix A zu bestimmen.
   Antwort: Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 + 0 \cdot \lambda - 16$, somit sind die Eigenwerte ± 4. Eigenvektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ zu $\lambda = 4$ ergeben sich als Lösung von

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Analog ergibt sich für $\lambda = -4$ als Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) (3) In welches entkoppelte Differentialgleichungssystem kann das Ausgangssystem übergeführt werden? Antwort: Setzt man $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ mit $S := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, so ist $J := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = S^{-1}\vec{b} = \frac{t}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und demnach $\dot{u} = 4u + \frac{3t}{4}$, $\dot{v} = -4v - \frac{t}{4}$ das entkoppelte System.

3. Es sollen die Seitenlängen a, b, c eines rechteckigen Quaders (Streichholzschachtel!) mit gegebenem Volumen $V = 1$ derart bestimmt werden, daß die Oberfläche möglichst klein ist.

   (a) (5) Die Aufgabe ist als Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen zu beschreiben. Antwort: $f(a, b, c) = ab+bc+ac$ unter den Nebenbedingungen $g(a, b, c) := abc-1 = 0$ und $a \geq 0$,$b \geq 0$, sowie $c \geq 0$ zu minimieren.

   (b) (5) Man ermittle alle Kandidaten von Lösungen.

   Antwort: Die durch die Nebenbedingung gegebene Fläche hat keine singulären Punkte, deshalb findet man alle Kandidaten mittels Lagrangeverfahren: $F(a, b, c, \lambda) = ab + ac + bc - \lambda(abc - 1)$. Differenzieren nach a, b, c und Nullsetzen ergeben $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Im $I\!R^3$ sei K die Schnittfigur, welche durch die Bedingungen $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x \leq 0$ und $2z \leq 1$ bestimmt ist.

   (a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

   (b) (6) Es soll $J := \int_K f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_?^? dx \int_?^? dy \int_?^? f(x, y, z)\, dz$$

ausgedrückt werden.

Nachname:	Matrnr:	15.11.20 M2-ET (Herfort

1. Es sei U der reelle Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2 und V der ree torraum von Funktionen der Form $a_1\frac{1}{z} + a_2\frac{1}{z^2} + a_3\frac{1}{z^3}$ mit $a_1, a_2, a_3 \in I\!R$ und z Weiters sei für ein Polynom p eine Funktion $Z(p)(z) := \int_0^\infty p(x)e^{-zx}dx$ definier

   (a) (4) Man zeige, daß die Funktionen $\{\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^3}\}$ eine Basis von V sind.
   Antwort: Die angegebenen Funktionen liegen in V. Angenommen $a_1\frac{1}{z}$ + $a_3\frac{1}{z^3} = 0$ für alle $z > 0$. Dann ist z^3 mal dem Ausdruck für all diese z glei also $a_1z^2 + a_2z + a_3 = 0$ für alle $z > 0$. Dies ist ein quadratisches Polyno also nur 2 Nullstellen haben, außer alle Koeffizienten verschwinden.

   (b) (3) Zeigen Sie, daß Z als lineare Abbildung von U nach V aufgefaßt werd
   Antwort: Man setzt ein: Die Integration ist linear, daher auch Z. Is beliebiges Polynom, so führt partielle Integration (nach dem unterstrichene auf $Z(x^k)(z) = \int_0^\infty x^k \underline{e^{-zx}}dx = \frac{e^{-zx}}{-z}x^k\Big|_0^\infty - \frac{1}{z}\int_0^\infty(-e^{-zx}kx^{k-1}dx = \frac{k}{z}Z($
   Da $Z(1)(z) = \frac{1}{z}$ ist, ergibt sich aus der Rekursion $Z(x)(z) = \frac{1}{z^2}$ und $Z(x^2)($ Deshalb führt Z die Basiselemente von U in Elemente von V über, und i eine lineare Abbildung von U nach V.

   (c) (3) Man bestimme eine Matrix A bezüglich der Basis $\{1, x, x^2\}$ von U und angegebenen von V.
   Antwort: Die ausgewerteten Integrale ergeben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $\dot{x} = 2x + 2y + t, \dot{y} = 6x - 2y$.

   (a) (3) Das System kann in der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$ angeschrieben werden, wobe 2×2-Matrix, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\vec{b}$ von t abhängige Vektoren sind. Wie laute $\vec{b}$?
   Antwort: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (b) (4) Es sind die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix A zu men.
   Antwort: Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 + 0 \cdot \lambda - 16$, somit Eigenwerte ± 4. Eigenvektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ zu $\lambda = 4$ ergeben sich als Lösu

Antwort: Die obigen Skizzen helfen, den Integrationsbereich zu beschreiben. Im Bereich 1 (unterste Skizze) ist z jeweils im Intervall $[-\sqrt{1-x^2-y^2}, \sqrt{1-x^2-y^2}]$, während z im Bereich 2 stets im Intervall $[-\sqrt{1-x^2-y^2}, \frac{1}{2}]$ verbleibt. In der mittleren Zeichnung sieht man, daß bei gegebenem $x \in [-1, 0]$ der Wert von y in den Intervallen $I_1 := [-\sqrt{1-x^2}, -\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}]$ und $I_2 := [\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}], \sqrt{1-x^2}]$ im Bereich 1, und im Intervall $J := [-\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}, \sqrt{\frac{3}{4}-x^2}]$ im Bereich 2 verläuft. Dies legt es nahe, die Funktion

$$\phi(x,y) := \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{falls} \quad x \in I_1 \cup I_2 \\ \frac{1}{2} & \text{falls} \quad x \in J \end{cases}$$

zu definieren.
$J = \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\phi(x,y)} f(x,y,z)\, dz$, wobei $\phi(x,y) = \frac{1}{2}$, sofern $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}$ gilt, und $\phi(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ sonst.

Nachname:	Matrnr:	25.10.2007 M2-ET (Herfort)

1. Es sei U die lineare Hülle der auf ganz $I\!R$ definierten Funktionen e^x und xe^x bezüglich des Skalarkörpers $I\!R$. Weiters sei A die lineare Abbildung, die jeder Funktion y in U die Funktion $y'' + 2y' + y$ zuordnet.

   (a) (1) Zeigen Sie, daß A als Abbildung von U nach U aufgefaßt werden kann.
   Antwort: Man setzt ein: $A(e^x) = 4e^x \in U$ und $A(xe^x) = 4(e^x + xe^x) \in U$.

   (b) (4) Man bestimme eine Basis des Bildes von A.
   Antwort: Das Bild wird von $4e^x$ und $4(e^x + xe^x)$, somit auch von e^x und xe^x aufgespannt, die Funktionen sind aber lin.unabh., also eine Basis des Bildes

   (c) (2) Man bestimme den Kern von A als Abbildung von U nach U aufgefaßt.
   Antwort: Der Kern ist trivial, weil U und das Bild unter A in U Dimension 2 haben, und bekanntlich $\dim(U) = \dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Bild}(A))$ gilt.

   (d) (3) Man bestimme eine Matrix der Abbildung bezüglich der Basis $B := \{e^x, xe^x\}$.
   Antwort: $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (5) Es ist ein Orthonormalsystem (bezüglich des üblichen Skalarprodukts im $I\!R^4$) der linearen Hülle $U := \mathcal{L}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ gesucht.
   Antwort: z.B. $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}$, $\vec{u}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{c}$.

   (b) (4) Es ist jener Punkt $\vec{u}$ in U gesucht, von dem die Spitze des Vektors $\vec{w} := (2, 1, 1, 1)^T$ minimalen Abstand hat, mit anderen Worten, für den $||\vec{u} - \vec{w}||$ minimal wird.
   Antwort: Die Lösung wird durch den Abschnitt der *Fourierreihe* angegeben:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 \cdot \vec{w}\ \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{w}\ \vec{u}_2 = \cdots = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (c) (1) Liegt $\vec{w}$ in U? Antwort: Nein, sonst wäre $\vec{w} = \vec{u}$.

3. Jemand interessiert sich für einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ der Länge 1, dessen Summe der Koordinaten maximalen Wert erreicht.

   (a) (4) Die Aufgabe ist als Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen zu beschreiben.
   Antwort: $f(x, y, z) = x + y + z$ ist unter der Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ zu maximieren.

   (b) (3) Man ermittle alle Kandidaten von Lösungen.

   Antwort: Die Nebenbedingung hat keine singulären Punkte, deshalb findet man sie alle mittels Lagrangeverfahren: $F(x, y, z, \lambda) = x + y + z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.
   Differenzieren nach x, y, z und Nullsetzen ergeben $\vec{x} = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) (3) Man löse die Aufgabe, d.h. finde den Vektor mit maximaler Koordinatensumme unter der Nebenbedingung und skizziere die Situation.

   Antwort: Im Vorigen muß das Pluszeichen gewählt werden.

4. Im $\mathbb{R}^3$ sei T das Tetraeder mit den Eckpunkten $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 0)$ und $D(0, 0, 1)$

   (a) (2) Eine Skizze möge angefertigt werden.

   (b) (5) Es soll $J := \int_T f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ als iteriertes Integral der Form

   $$J = \int_K d(x, y) \int_?^? f(x, y, z)\, dz$$

   ausgedrückt werden. Skizze des ebenen Bereichs K.

   Antwort: $K = \{(x, y) \mid \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$, $J = \int_K d(x, y) \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}} f(x, y, z)\, dz$

   (c) (3) Man berechne das Volumen von T.

   Antwort: 2, weil 1/6 des Volumens des Quaders $1 \times 3 \times 4$. Das gleiche Resultat ergibt sich durch explizite Berechnung von $\int_K d(x, y) \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}} dz$.

Nachname:	Matrnr:	4.10.2007 M2-ET (Herfort)

1. Gegeben ist eine eine lineare Abbildung $A : V \to V$, wobei V der reelle Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens 2 ist. Von dieser Abbildung weiß man lediglich, daß ihr Kern die lineare Hülle der Polynome $x^2 + x + 1$ und $2x + 5$ und $A(x + 1) = x^2$ ist.

   (a) (5) Wie lauten die Polynome $A(1)$, $A(x)$ und $A(x^2)$.
   Antwort: Man weiß, daß $0 = A(x^2 + x + 1) = A(x^2) + A(x) + A(1) = A(2x + 5) = 2A(x) + 5A(1)$, und $A(x) + A(1) = x^2$. Das ergibt lineare Gleichungen für $A(1), A(x)$, und $A(x^2)$. Lösung: $-\frac{2}{3}x^2$, $\frac{5}{3}x^2$, $-x^2$

   (b) (3) Bezüglich der kanonischen Basis $\{1, x, x^2\}$ soll eine Matrixdarstellung von A angegeben werden.
   Antwort: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}$

   (c) (2) Geben Sie eine Basis des Kerns und des Bildes von A an.
   Antwort: Basis des Kerns $\{x^2 + x + 1, 2x + 5\}$, Basis des Bildes $\{x^2\}$

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

   (a) (5) Man bestimme alle Eigenwerte von A.
   Antwort: Die Blockstruktur 2×2-Block links oben, und der 3×3-Block

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & -5 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 5 & -3-\lambda \end{pmatrix},$$

   der selbst eine Blockstruktur aufweist, ergeben das charakteristische Polynom in bereits faktorisierter Form, nämlich $p(\lambda) = -(\lambda^2 + 4\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$. Hier liest man als Lösungen für die Eigenwerte $\{-1, -3, -1, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})\}$ als Wurzeln der Faktoren ab.

   (b) (5) Für den betragsgrößten Eigenwert gebe man eine Basis des zugehörigen Eigenraumes, sowie dessen Dimension an.
   Antwort: Der betragsgrößte Eigenwert ist -3. Man findet $(5, -5, 24, 1, 10)^T$ als Eigenvektor und die Dimension des Eigenraumes ist 1

3. Es sei $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} e^{xyz} \\ \cosh(x+z^2-y^2) \end{pmatrix}$ und $g(u,v) := \begin{pmatrix} \ln u - e^v \\ e^{uv} \end{pmatrix}$. Weiters sei $h(x,y,z) := g \circ f(x,y,z)$ die zusammengesetzte Funktion.

   (a) (2) Man ermittle den Definitionsbereich von h.
   Antwort: Ganz $I\!R^3$

   (b) (1) Man ermittle $h(0,0,0)$.
   Antwort: Wenn man weiß, daß $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ist, findet man auch ohne Taschenrechner $h(0,0,0) = e\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (c) (5) Wie lautet die Funktionalmatrix von h an der Stelle $(0,0,0)$?
   Antwort: Die Kettenregel ergibt $h'(0,0,0) = g'(1,1)f'(0,0,0)$ und weil $g'(1,1)$ eine 2×2-Matrix, sowie $f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist, ergibt sich sehr schnell $h'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (d) (2) Kann $f \circ g$ gebildet werden. Falls nicht, bitte begründen.
   Antwort: g führt von einer Teilmenge des $I\!R^2$ in eine solche des $I\!R^2$, jedoch benötigt f drei Argumente. Also kann die Zusammensetzung nicht gebildet werden

4. Ein ebenes Plättchen B werde in der (x,y)-Ebene durch $B := \{(x,y) \mid 0 \leq x^2 \leq y \leq x\}$ beschrieben.

   (a) (2) Eine Skizze möge angefertigt werden.

   (b) (2) Man berechne die von B eingenommene Fläche.
   Antwort: $\frac{1}{6}$

   (c) (4) Man berechne die Koordinaten des Schwerpunkts unter der Annahme homogener Massendichte.
   Antwort: $\vec{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

   (d) (2) Geben Sie die Definition für die Unabhängigkeit zweier Ereignisse A und B an.
   Antwort: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ bzw. äquivalent dazu $P(A \mid B) = P(A)$, sofern $P(B) \neq 0$

Nachname:	Matrnr:	13.9.2007 M2-ET (Herfort)

1. Auf dem reellen Vektorraum V aller Polynome vom Grad höchstens 2 sei eine Abbildung $A : V \to V$ durch $A(p)(x) = \int_0^1 (x-t)p(t)\,dt$ (p Polynom vom Grad ≤ 2) gegeben.

   (a) (3) Zeigen Sie, daß die Abbildung A linear ist.

   (b) (5) Bezüglich der kanonischen Basis $\{1, x, x^2\}$ soll eine Matrixdarstellung von A angegeben werden.
   Ergebnis $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) (2) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix und eine Jordannormalform.
   Ergebnis bis auf Permutation der Hauptdiagonalelemente: $J = \begin{pmatrix} \frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Es sei durch $144 = -3x^2 + 23y^2 + 26\sqrt{3}xy$ die Gleichung eines Kegelschnittes in der Ebene gegeben.

   (a) (6) Zeigen Sie, daß es eine Drehmatrix O gibt, sodaß nach Koordinatentransformation $\vec{x} = O\vec{u}$ die Gleichung die Gestalt

   $$1 = \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}$$

   hat, wobei $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Welche Werte haben a und b?

   Ergebnis: Es ist $O = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, weiters sind $a = 2, b = 3$ und der Drehwinkel ist 60^o, wobei das (u, v)-System entgegen dem Uhrzeiger in das (x, y)-System gedreht wird.

   (b) (3) Man gebe den Drehwinkel der Matrix O und die Richtungen und Längen der Achsen des Kegelschnittes an. Liegt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel vor?
   Ergebnis: Hyperbel

   (c) (1) Man skizziere den Kegelschnitt in der (x, y)-Ebene samt Asymptoten.

   Hinweis: Hauptachsentransformation

3. Die Abbildung $f : I\!R^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to I\!R^2$ sei durch $f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^2 + 3y^2 - z^2 \\ \ln(x^2 + y^2 + z^2) \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) (3) Zeigen Sie, daß f auf dem ganzen Definitionsbereich stetig differenzierbar ist.
Ergebnis: Zusammensetzung von unendlich oft differenzierbaren Funktionen

(b) (5) In welchen Punkten sind die Voraussetzungen des Hauptsatzes der impliziten Funktionen erfüllt, wenn man davon ausgeht, das Gleichungssystem $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch eine Funktion $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\phi}(x)$ "lokal aufzulösen"?
Ergebnis: Man muß die (partielle) Funktionalmatrix
$f_{y,z} = \begin{pmatrix} 6y & -2z \\ \frac{2y}{r^2} & \frac{2z}{r^2} \end{pmatrix}$
mit $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ bilden, und bekommt die Punkte, in denen der Hauptsatz versagt, durch Lösen des Gleichungssystems
$0 = x^2+y^2+z^2-1 = x^2+3y^2-z^2 = \det(f_{y,z}(x,y,z)) = \frac{22yz}{r^2}$.
Die fraglichen Punkte sind $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, es sind 4 an der Zahl (die VZ sind frei wählbar).

(c) (1) Skizzieren Sie die Punktmenge $\{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.
Ergebnis: Ein elliptischer Kegel schneidet aus der Oberfläche der Einheitskugeloberfläche zwei spiegelsymmetrisch bezüglich der (x,y)-Ebene gelegene geschlossene Kurven aus.

4. Jemand benötigt von der Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(x,y,z) = \frac{1+x+2z-4y^2}{3-4x+z^3}$ mit Anschlußstelle $P(0,0,0)$ nachstehende Koeffizienten:

(a) (1) Wie lautet das konstante Glied?
$\frac{1}{3}$

(b) (3) Wie lauten die Koeffizienten von x, y und z?
$\frac{7}{9}, 0, \frac{2}{3}$

(c) (6) Wie lauten die Koeffizienten von xy, yz und z^2?
Alle Null
Hinweis: 6.9 in
http://www.math.tuwien.ac.at/~herfort/ET/M2_SS07/UE_ANGABEN/ue_alles.pdf

Nachname:	Matrnr:	24.08.2007 M2-ET (Herfort)

1. Auf dem reellen Vektorraum aller kubischen Polynome sei eine Abbildung $\Phi(p) = x^2p'' + 2xp' - p$ (p kubisches Polynom) gegeben.
   (a) (3) Zeigen Sie, daß die Abbildung Φ linear ist.
   (b) (5) Bezüglich der kanonischen Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ im Raum der kubischen Polynome soll eine Matrixdarstellung von Φ angegeben werden. Diagonalmatrix $diag(-1, 1, 5, 11)$
   (c) (2) Warum ist die Gleichung $\Phi(p) = q$ für beliebiges kubisches Polynom q lösbar? weil Matrix invertierbar.

2. Von einer 4×4 Matrix A weiß man, daß sie die Eigenwerte 1 und 2 besitzt, beide mit arithmetischer Vielfachheit 2, 1 jedoch mit geometrischer Vielfachheit 1 und 2 mit geometrischer Vielfachheit 2.
   (a) (2) Man bestimme das charakteristische Polynom von A. $((x-1)^2(x-2)^2)$
   (b) (3) Man berechne Spur und Determinante von A. 6 und 4
   (c) (5) Man bestimme eine Jordannormalform von A.
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Gegeben sind die Funktion $f(x, y, z) = xyz$ und ein Bereich B im $\mathbb{R}^3$, dessen Punkte (x, y, z) durch die Bedingungen $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ und $x + y + z \leq 1$ festgelegt sind.
   (a) (1) Zeigen Sie, daß B kompakt ist.
   (b) (3) Zeigen Sie, daß f stetig ist.
   (c) (6) Man berechne das Maximum m, welches f auf B (laut Satz von Weierstraß) annimmt. An welchen Punkten wird das Maximimum angenommen? $m = \frac{1}{27}$ an $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

4. Jemand möchte das Integral $I := \int_B f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ über den im 1.ten Oktanten liegenden Bereich B des Ellipsoids mit den Halbachsen $a = 2$. $b = 3$, $c = 4$ erstrecken.
   (a) (2) Skizzieren Sie den Bereich B.
   (b) (3) Durch welches endliche Set von Ungleichungen kann man B beschreiben (so wenige Ungleichungen als nötig)?
   (c) (5) I soll als iteriertes Integral der Form $\int_?^? dx \int_?^? dy \int_?^? f(x, y, z)\, dz$ ausgedrückt werden.
   $$\int_0^2 dx \int_0^{3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dy \int_0^{4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}} f(x, y, z)\, dz$$

Nachname:	Matrnr:	20.07.2007 M2-ET (Herfort)

1. (a) (5) Liegt der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in dem von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aufgespannten linearen Teilraum des $\mathbf{C}^4$?

   Antwort: nein

   (b) (5) Ist die Funktion $u(x) = \cos^3(x)$ in dem von den Funktionen $f(x) = \cos(3x)$ und $g(x) = \cos x$ und $h(x) = 1$ aufgespannten linearen Teilraum aller stetigen auf $[0, \pi]$ definierten Funktionen mit Werten in $I\!R$. Wenn ja, gebe man Koeffizienten a, b, c mit $u = af + bg + ch$ explizit an.

   Antwort: ja $a = 1/4$, $b = 3/4$ Begründung z.B. mittels De'Moivre

2. (a) (6) Man löse die Matrizengleichung $XA^T = B^T$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$.

   Antwort: Es gibt keine Lösung

   (b) (4) Welche der Matrizenprodukte

   i. AB,

   ii. $A^T B$,

   iii. $A^{-1}B$

   können gebildet werden.

   Antwort: Nur (ii)

3. Es sei $f(x, y) := x^2 + y^2$ und $g(x, y) = 7x^2 - 2xy + 7y^2 - 1$ gegeben.

   (a) (3) Stellen Sie jene Gleichungen auf, die zur Bestimmung des Minimums von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ nötig sind.

   Antwort:

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   (b) (5) Formulieren Sie die Gleichungen in ein Eigenwertproblem um und lösen Sie es.

   Antwort: $\lambda = -\frac{1}{\mu}$ $\mu = 8, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\mu = 6, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) (2) Skizzieren Sie die Menge der Punkte mit $g(x, y) = 0$. Welche geometrische Deutung hat die Aufgabe.

Antwort: Extrema des Abstandes eines Punktes auf der skizzierten Ellipse

4. Durch $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$, $x \leq \frac{1}{2}$ und $y \leq \frac{1}{2}$ werden die Punkte eines räumlichen Bereichs B beschrieben.

(a) (3) Man skizziere den Bereich B.

(b) (7) Man formuliere das Bereichsintegral $\int_B f(x, y, z)\, d(x, y, z)$ als iteriertes Integral bzw. nötigenfalls als Summe iterierter Integrale.

Antwort:

$$\left(\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{2}} dy \ + \ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{2}} dy\right) \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz$$

Ergebnis am 30.8.10 korrigiert, Hrn Wimmer sei für den Hinweis gedankt.

Nachname:	Matrnr:	27.06.2007 M2-ET (Herfort)

1. (a) (3) Wenn $k = 2.5$, $l = 3.2$ und $r = 1.5$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, so berechne man von $k\vec{a} + l\vec{b} + r\vec{c}$ die zweite Koordinate.

   Antwort: 9.7

   (b) (3) Wenn $k = 2.5$, $l = 3.2$ und $r = 1.5$ und $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos(3x)$ und $h(x) = e^{2x}$, so berechne man den Wert der Funktion $u := kf + lg + rh$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$.

   Antwort: $2.5 + e^{\pi}$

   (c) (2) Sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

   Antwort: J

   (d) (2) Sind die Funktionen f, g, h im offenen Intervall $(0, \pi)$ linear unabhängig??

   Antwort: J

2. Gegeben ist die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2007 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (2) Man berechne die Determinante von A.

   Antwort: 1970

   (b) (2) Man berechne die Spur von A.

   Antwort: 7

   (c) (6) Man berechne das charakteristische Polynom von A.

   Antwort: $x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 1964x + 1970$

3. Gegeben ist die Gleichung $x^2 + yz + z^3x = 3$ und es sei F die Menge der Punkte im $\mathbb{R}^3$, welche diese Gleichung erfüllen.

   (a) (3) Für welches z liegt der Punkt $P(1, 1, z)$ in dieser Menge?

   Antwort: $z = 1$, die übrigen Nullstellen sind komplex und werden hier nicht herangezogen.

(b) (4) Hat diese Menge singuläre Punkte?

Antwort: N: Der Gradient ist $(2x + z^3, z, y + 3z^2x)$. Er verschwindet nur für $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, und da $(0, 0, 0)$ nicht auf der Fläche mit der Gleichung $x^2 + yz + z^3x - 3 = 0$ liegt, gibt es dort keine singulären Punkte.

(c) (3) Man berechne $z_{xx}(1, 1)$, wobei z den in a) berechneten Wert hat.

Antwort: $z_{xx}(1, 1) = -\frac{7}{32}$.

Bei der Berechnung empfiehlt sich "implizites Differenzieren": $x^2+yz+z^3x-3 = 0$, beachtet man $z = z(x, y)$, so ergibt die Kettenregel $2x+yz_x+3z^2z_xx+z^3 = 0$ und, ein zweites Mal links und rechts nach x partiell Differenzieren (jetzt ist auch $z_x = z_x(x, y)$ und Kettenregel nötig) ergibt $2+yz_{xx}+6z_x^2x+3z^2z_{xx}x+3z^2z_x+3z^2z_x = 0$. Da $x = y = z(1, 1) = 1$ ist, ergibt sich $2 + z_x(1, 1) + 3z_x(1, 1) + 1 = 0$, also $z_x(1, 1) = -\frac{4}{3}$. Die Gleichung mit den 2.ten partiellen Ableitungen ergibt den Wert von $z_{xx}(1, 1)$

4. Durch die Ungleichungen $x^2 + y^2 \leq 9$, $x \geq 1$, und $x + y \geq 3$ wird ein ebener Bereich B festgelegt. Es geht um das Bereichsintegral $I := \int_B f(x, y)\, d(x, y)$.

(a) (2) Skizzieren Sie den Bereich B.

(b) (3) I soll als iteriertes Integral (eventuell nach Unterteilen in Intervalle der y-Achse) der Form $\int_?^? dy \int_?^? f(x, y)\, dx$ ausgedrückt werden.

Antwort: $\int_0^2 dy \int_{3-y}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_2^{2\sqrt{2}} dy \int_1^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\, dx$

(c) (5) I soll als iteriertes Integral (eventuell nach Unterteilen in Intervalle der x-Achse) der Form $\int_?^? dx \int_?^? f(x, y)\, dy$ ausgedrückt werden.

Antwort: $\int_1^3 dx \int_{3-1}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\, dy$