Mathematik 2 f. ET
(StPl 2000)

24. Jänner 2007

1. Man bestimme den Rang der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Man bestimme das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x .$$

3. Wie lautet das Additionstheorem der χ^2-Verteilung?

4. Sei $\mathbf{Ax} = \mathbf{s}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Unter welcher Voraussetzung ist ein solches Gleichungssystem für festes $\mathbf{s}$ *höchstens eindeutig* lösbar? Wann genau ist es eindeutig lösbar? Wann ist es für *jede* rechte Seite $\mathbf{s}$ lösbar bzw. eindeutig lösbar?

Anworten:

1. $\operatorname{rg} \mathbf{A} = 3$.

2. $y_h = e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2)$; mit dem Ansatz $y_p = Ax^3e^x$ erhält man für $A = \frac{1}{6}$ und damit $y_a = y_h + y_p = e^x\left[c_1 + c_2x + c_3x^2 + \frac{1}{6}x^3\right]$.

3. Sind die Zufallsgrößen X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ χ^2-verteilt mit n_i Freiheitsgraden, so ist ihre Summe $Y = \sum_i X_i$ χ^2-verteilt mit $n = \sum_i n_i$ Freiheitsgraden.

4. Es ist höchstens eindeutig lösbar genau dann, wenn $\mathbf{A}$ injektiv ist, d.h. $\operatorname{rg} \mathbf{A} = n$, und es ist eindeutig lösbar, wenn zuzüglich die Bedingung für Lösbarkeit $\operatorname{rg}(\mathbf{A}\ \mathbf{s}) = \operatorname{rg} \mathbf{A} = n$ ist; es ist weiter für jede rechte Seite lösbar, wenn $\mathbf{A}$ surjektiv ist, d.h. $\operatorname{rg} \mathbf{A} = m$; schließlich ist es für jede rechte Seite eindeutig lösbar, wenn $\mathbf{A}$ surjektiv und injektiv ist, d.h. wenn $\mathbf{A}$ regulär ist.