

| | | |
|-----------|---------|---------------------------------|
| Nachname: | Matrnr: | 23.5.2008 M2-ET (Herfort) |
|-----------|---------|---------------------------------|

1. Gegeben ist die 5×5 -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 17 \\ 7 & 1 & 2 & 0 & 27 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) (2) Man bestimme den Rang von A .

Antwort: 4

(b) (4) Man bestimme das charakteristische Polynom von A . (Ignorierbarer Hinweis: das Polynom darf als Produkt von Polynomen angeschrieben werden).

Antwort: Die Matrix besitzt eine Blockstruktur, nämlich, entlang der Hauptdiagonale folgt zwei 2×2 -Blöcken eine 1×1 -Matrix. Jede der 2×2 -Matrizen ist selbst eine Dreiecksmatrix (hat also auch Blockstruktur mit 1×1 -Matrizen). Dementsprechend ist das charakteristische Polynom das Produkt der charakteristischen Polynome der "skalaren" Matrizen (2), (1), (1), (0) und (7), also $p_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2(\lambda - 0)(\lambda - 7) = \dots = -\lambda^5 + 11\lambda^4 - 33\lambda^3 + 37\lambda^2 - 14\lambda$

(c) (2) Für den kleinsten Eigenwert von A bestimme man eine Basis des zugehörigen Eigenraumes.

Antwort: Der kleinste Eigenwert ist 0 und als Basis eignet sich $\{(0, 0, 0, 1, 0)^T\}$

(d) (2) Man gebe eine Basis des Kerns von A an.

Antwort: Als Basis eignet sich $\{(0, 0, 0, 1, 0)^T\}$, weil der kleinste Eigenwert Null ist, und somit sein Eigenraum mit dem Kern von A übereinstimmen muß

2. Auf dem Intervall $I = [0, 1]$ soll für Polynome u, v vom Grad ≤ 2 eine Bilinearform durch

$$B(u, v) := \int_0^1 xu(x)v(x) dx$$

festgelegt sein. Es sei weiters $\{1, x, x^2\}$ als Basis des Vektorraums der Polynome vom Grad ≤ 2 mit reellen Koeffizienten gewählt.

(a) (4) Die Bilinearform B kann in der Form

$$B(u, v) = (a_0, a_1, a_2)A \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden, wobei $u = a_0 + a_1x + a_2x^2$ und $v = b_0 + b_1x + b_2x^2$ die beiden Polynome sind. Wie lautet die Matrix A ?

Antwort: Ganz allgemein ist $A_{ij} = B(b_i, b_j)$, wobei b_i das i -te Basiselement ist. Somit ist z.B. $A_{23} = B(x, x^2) = \int_0^1 x \cdot x \cdot x^2 dx = \frac{1}{5}$, etc. Es ist

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

- (b) (4) Man beweise oder widerlege, daß die Matrix A positiv definit ist.

Antwort: Zunächst ist A symmetrisch. Danach ergeben sich die Hauptminoren $\frac{1}{2} > 0$, $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} - \frac{1}{9} > 0$ und $\det A = \dots = \frac{1}{12} \frac{1}{60} \frac{1}{60} > 0$. Nach dem Hauptminorenkriterium ist somit A positiv definit.

- (c) (2) Man beweise oder widerlege, daß die Bilinearform ein inneres Produkt auf dem Vektorraum der höchstens quadratischen Polynome mit reellen Koeffizienten beschreibt.

Antwort: Es liegt ein inneres Produkt vor. Die Punkte im einzelnen:

Zunächst ist $B(u, v) = B(v, u)$, also symmetrisch. Weil B bilinear ist, ist auch die geforderte Bilinearität des inneren Produkts erfüllt. Weiters ist $B(u, u) = \int_0^1 xu(x)^2 dx \geq 0$ und aus $B(u, u) = 0$ ergibt sich $\int_0^1 xu(x)^2 dx = 0$. Weil für eine stetige Funktion f aus $\int_0^1 |f(x)| dx = 0$ stets $f(x) = 0$ auf $[0, 1]$ folgt, muß $xu(x)^2 = 0$ für alle $x \in [0, 1]$ gelten. Ist $x \neq 0$, so ist somit $u(x) = 0$ und aus Stetigkeitsgründen ist auch $u(0) = 0$, also ist u das Nullpolynom und somit $B(u, v)$ positiv definit.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{1+xy}{\cos(x+2y)}$

- (a) (3) Man skizziere die Menge $A := \{(x, y) \mid |x + 2y| < \frac{\pi}{2}\}$ und zeige, daß A im Definitionsbereich von f liegt.

Antwort: Es entsteht ein "Streifen", der von Geraden begrenzt wird, die jeweils durch $(\frac{2}{\pi}, 0)$ und $(0, \frac{4}{\pi})$ bzw. $(-\frac{2}{\pi}, 0)$ und $(0, -\frac{4}{\pi})$ laufen. Die Funktion ist dort wohldefiniert, weil der Nenner nicht verschwinden kann.

- (b) (4) Man bestimme die Hessematrix $H(f)$ an der Stelle $(0, 0)$.

Antwort: $H(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Beim Differenzieren darf man sich halt nicht verrechnen. Etwas einfacher ist Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1+xy}{1 - \frac{1}{2}(x+2y)^2 + \dots} \\ &= (1+xy)(1 + \frac{1}{2}(x+2y)^2 + \dots) \\ &= 1 + xy + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + 4y^2) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x^2 + 6xy + 4y^2) + \dots \end{aligned}$$

Hiebei sind Glieder ab dritter Ordnung vernachlässigt worden. Hieraus liest man aus der aus den quadratischen Gliedern bestehenden *quadratischen Form* (unter Weglassung des Vorfaktors $\frac{1}{2}$) die Hessematrix ab

- (c) (3) Man beweise bzw. widerlege, daß f an der Stelle $(0,0)$ ein lokales Maximum besitzt.

Antwort: Es ist zwar $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$, jedoch hat die Hessematrix die Hauptminoren $1 > 0$ und $\det H(f) = 4 - 3 = -1 < 0$, also liegt ein *Sattelpunkt* auf dem Graphen bei $(0,0)$ vor, sodaß es sich um kein Extremum handelt

4. Im \mathbb{R}^2 sei K die beschränkte Menge des ersten Quadranten, die durch die Kurven mit den Gleichungen $x^2 + 3y^2 = 1$, $x = 0$ und $y = x$ begrenzt wird.

- (a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

Antwort: Im ersten Quadranten wird von einer elliptischen Scheibe (Halbachsen der Längen 1 in x -Richtung und $\frac{1}{\sqrt{3}}$ in y -Richtung) durch $y = x$ der rechte untere Teil weggeschnitten

- (b) (4) Es soll $J := \int_K f(x, y) d(x, y)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_{?}^{?} dx \int_{?}^{?} f(x, y) dy$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Es ergibt sich $J = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{\sqrt{\frac{1}{3}(1-x^2)}} f(x, y) dy$

- (c) (2) Jemand führt durch $x = r \cos \phi$, $y = \frac{r}{\sqrt{3}} \sin \phi$ neue Koordinaten ein, sodaß das Integral in ein Bereichsintegral der Form

$$J = \int_L g(r, \phi) d(r, \phi)$$

überführt wird. Man bestimme $g(r, \phi)$ und die Begrenzungen von L .

Antwort: Die Funktionaldeterminante ist $\begin{vmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \frac{r}{\sqrt{3}} \sin \phi & \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \phi \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} r$. Die Begrenzungen gehen der Reihe nach in jene von L über, nämlich $r = 0$, $r = 1$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ und $\phi = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. Somit bekommt man

$$J = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{[0,1] \times [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]} f(r \cos \phi, \frac{r}{\sqrt{3}} \sin \phi) r d(r, \phi)$$

als Ergebnis. Mithin ist $g(r, \phi) = \frac{1}{\sqrt{3}} r f(r \cos \phi, \frac{r}{\sqrt{3}} \sin \phi)$

| | | |
|-----------|---------|---------------------------------|
| Nachname: | Matrnr: | 15.5.2008 M2-ET (Herfort) |
|-----------|---------|---------------------------------|

1. Gegeben ist die 3×3 -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) (2) Man bestimme den Rang von A .

Antwort: 2

(b) (4) Man bestimme eine Basis des Kerns von A .

Antwort: Eine mögliche Basis: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

(c) (2) Man bestimme eine Basis des Bildes von A .

Antwort: Z.B. die beiden ersten Spalten von A

(d) (1) Man gebe eine möglichst kleine Anzahl linearer Gleichungen der Form $ap + bq +$

$cr = 0$ an, denen ein Vektor $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ genügen muß, damit das Gleichungssystem

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{ lösbar ist.}$$

Antwort: Man bestimmt den Kern von A^T und transponiert die Elemente einer Basis (benützt sie als Zeile(n)). Als Lösbarkeitsbedingung ergibt sich solcherart $-p + q + r = 0$

2. Im \mathbb{R}^4 sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ als Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) (4) Man ermittle eine Orthogonalbasis des Teilraumes $U = \mathcal{L}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Antwort: Man erkennt sofort, daß $\vec{a} \perp \vec{b}$ gilt. Somit genügt es, die übliche Formel $\vec{c} - P_{\mathcal{L}(\vec{a}, \vec{b})}(\vec{c}) = \vec{c} - \frac{(\vec{c}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} - \frac{(\vec{c}, \vec{b})}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$ zu verwenden, um den dritten Vektor der Or-

thogonalbasis von U , nämlich $\frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu finden.

- (b) (3) Man bestimme die Orthogonalprojektion von \vec{c} in den von \vec{a} und \vec{b} erzeugten linearen Teilraum.

Antwort: Es ist dies geradewegs jener Vektor, den man von \vec{c} in (a) abgezogen hat,

$$\text{nämlich } \frac{(\vec{c}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} + \frac{(\vec{c}, \vec{b})}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (c) (3) Man ermittle eine Orthonormalbasis des Teilraumes $W := \mathcal{L}(\vec{a}, \vec{c})$.

Antwort: Es ergibt sich $\vec{c} - \frac{(\vec{c}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} = \vec{c} - \frac{1}{2} \vec{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als in W liegender auf \vec{a}

orthogonaler Vektor. Nach Normieren ergibt sich als Orthonormalbasis von W

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{1+xy}{\cos(x+2y)}$

- (a) (3) Man gebe den Definitionsbereich von f an.

Antwort: Die Funktion ist für alle $x, y \in \mathbb{R}$ definiert, für die $x + 2y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist.

- (b) (4) Man berechne die partiellen Ableitungen $f_x(0, 0)$ und $f_y(0, 0)$.

Antwort: $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$

- (c) (3) Man bestimme $f_{xy}(0, 0)$ (ignorierbarer Hinweis: Taylorreihe!)

Antwort: Es ist $f(x, y) = \frac{1+xy}{1-\frac{1}{2}(x+2y)^2+\dots} = (1+xy)(1+\frac{1}{2}(x+y)^2+\dots)$ (geometrische Reihe verwendet), also ist der Koeffizient von xy gleich 3 (Ausmultiplizieren!). In der Taylorreihe ist der entsprechende Koeffizient durch $\frac{1}{2!} 2f_{xy}(0, 0)$ gegeben, woraus

$$f_{xy}(0, 0) = 3$$

folgt

4. Im \mathbb{R}^3 sei K die beschränkte Schnittfigur, welche von einem Teil einer Kugeloberfläche (Radius = 1) und einem Drehparaboloid mit der Gleichung $z = x^2 + y^2$ begrenzt wird.

- (a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

- (b) (6) Es soll $J := \int_K f(x, y, z) d(x, y, z)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_A d(x, y) \int_{?}^{?} f(x, y, z) dz$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Als Skizze erhält man ein einer Urne ähnlich sehendes Gebilde.

Um A zu finden, genügt es, die beiden Flächen zu schneiden und in die (x, y) -Ebene zu projizieren. Man findet für A eine Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ und Mittelpunkt der Ursprung. Demnach ergibt sich $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})\}$ und als Ergebnis das umgeformte Integral

$$J = \int_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})} d(x, y) \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz.$$

| | | |
|-----------|---------|---------------------------------|
| Nachname: | Matrnr: | 11.4.2008 M2-ET (Herfort) |
|-----------|---------|---------------------------------|

1. Gegeben sind die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B := (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

und

$$C := \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- (a) (4) Welche Produkte XY mit $X, Y \in \{A, B, C\}$ können gebildet werden und welche Dimensionierung hat das jeweilige Produkt?

Antwort: AC (4×1), BA (1×4), AA (4×4), BC (1×1), CB (4×4)

- (b) (6) Welche Produkte XYZ mit $X, Y, Z \in \{A, B, C\}$ können gebildet werden?

Antwort: ACB (4×4), BAA (1×4), BAC (1×1), AAA (4×4), AAC (4×1), BCB (1×4), CBA (4×4), CBC (4×1)

2. Im \mathbb{R}^2 habe eine lineare Transformation $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Matrixdarstellung

$$A_B := \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (4) Man gebe die Matrix A der Darstellung von f bezüglich der kanonischen Basis des \mathbb{R}^2 , nämlich

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

an.

Antwort: Es ist $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}(-1) + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und

$A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, sodaß $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

folgt. Hieraus ergibt elementare Matrizenrechnung $A = \begin{pmatrix} -17 & 13 \\ -21 & 17 \end{pmatrix}$

(b) (3) Man bestimme alle Eigenwerte von f .

Antwort: Man darf die Matrix A_B heranziehen. Es ergibt sich als charakteristisches Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 16$. Danach sind die Eigenwerte $\{4, -4\}$

(c) (2) Zum größeren der Eigenwerte gebe man eine Basis des Eigenraums an. Welche Koordinaten haben die Basisvektoren des Eigenraumes bezüglich der kanonischen Basis?

Antwort: Der größere der Eigenwerte ist 4. Nun ist es klug, die Matrix A zu verwenden, damit man sich das Umrechnen erspart: Man findet $\vec{v} = \begin{pmatrix} 13 \\ 21 \end{pmatrix}$ als möglichen Basisvektor des gefragten Eigenraumes

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \ln(xye^{x^2+y^2})$.

(a) (3) Man skizziere den Definitionsbereich von f in \mathbb{R}^2 .

(b) (4) Man bestimme $f_x(1, 1)$ und $f_y(1, 1)$.

Antwort: Es ist $f(x, y) = \ln x + \ln y + x^2 + y^2$ im ersten Quadranten. Somit ist $f_x = \frac{1}{x} + 2x$ und somit $f_x(1, 1) = f_y(1, 1) = 3$ aus Symmetriegründen

(c) (3) Man bestimme $f_{xx}(1, 1)$.

Antwort: Die Umformung von f beachtend, ergibt sich $f_{xx} = -\frac{1}{x^2} + 2$, somit $f_{xx}(1, 1) = 1$

4. Im ersten Quadranten des \mathbb{R}^2 sei B jener ebene und beschränkte Bereich, der durch die Kurven mit den Gleichungen $x^2 + y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$ und $y = \sqrt{3}x$ begrenzt wird.

(a) (3) Man skizziere den Bereich.

(b) (4) Man gebe $\int_B f(x, y) d(x, y)$ als iteriertes Integral an, indem man Polarkoordinaten einführt.

Antwort: Es ist $\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\phi \int_1^{\sqrt{3}} f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr$.

(c) (3) Für $f(x, y) := xy$ bestimme man den Wert $\int_B f(x, y) d(x, y)$.

Antwort: Man findet $\int_B f(x, y) d(x, y) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\phi \int_1^{\sqrt{3}} r^2 \cos \phi \sin \phi dr = \frac{\pi}{12}(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$.

| | | |
|-----------|---------|---------------------------------|
| Nachname: | Matrnr: | 13.3.2008 M2-ET (Herfort) |
|-----------|---------|---------------------------------|

1. Gegeben ist Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) (4) Man bestimme das charakteristische Polynom von A

Antwort: Die Blockstruktur der 2×2 -Blöcke ergibt $(\lambda^2 - 2\lambda + 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 16\lambda^2 - 22\lambda + 15$

(b) (3) Man bestimme alle Eigenwerte von A

Antwort: Man muß nur quadratische Gleichungen lösen: Es ergeben sich $1 \pm i\sqrt{2}$ und $2 \pm i$

(c) (3) Für welche $\vec{b} \in \mathbf{C}^4$ ist die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Antwort: Für alle, da A regulär ist.

2. Die Punkte $P(x, y)$, welche die Gleichung $x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 6y = 1$ erfüllen, beschreiben eine ebene Kurve (Quadrik):

(a) (1) Falls die Quadrik in der Form $0 = \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{a}^T \vec{x} + \alpha$ angeschrieben wird, so gebe man A , \vec{a} und α an.

Antwort: Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\alpha = -1$.

(b) (3) Falls die Quadrik einen Mittelpunkt \vec{x}_0 hat, gebe man dessen Koordinaten an.

Antwort: Der Mittelpunkt \vec{x}_0 muß die Gleichung $A\vec{x}_0 + \vec{a} = \vec{0}$ erfüllen. Man findet $\vec{x}_0 = - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) (4) Man ermittle die Eigenwerte von A und zugehörige Eigenvektoren.

Antwort: Man findet $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ Als zugehörige Eigenvektoren können die Spalten der Matrix

$$S = \frac{1}{10 + 2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 + \sqrt{5} \\ 1 + \sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}$$

herangezogen werden, wobei der Vorfaktor dazu dient, die Matrix orthogonal zu machen (wird erst im nächsten Schritt gebraucht).

(d) (2) Liegt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel vor? Begründen Sie Ihre Antwort.

Antwort: Koordinatentransformation mittels S ergibt $S^T A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ und da beide Eigenwerte positiv sind, liegt eine (möglicherweise zu einem Punkt oder der leeren Menge degenerierte) Ellipse vor.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ und die Nebenbedingung $g(x, y) = xy - 1 = 0$

(a) (6) Man bestimme alle mittels Lagrangemultiplikatorenmethode auffindbaren Kandidaten für ein Maximum von f unter der angegebenen Nebenbedingung.

Antwort: Man setzt $\Phi(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 1)$ und findet aus $2x + \lambda y = 2y + \lambda x = xy - 1 = 0$ sehr leicht $x = y = \pm 1$.

(b) (4) Man gebe eine geometrische Deutung der Aufgabe.

Antwort: Das Abstandsquadrat eines Punktes auf der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ zum Ursprung ist zu minimieren.

4. Durch die Gleichung $F(x, y, z) = xyz + \ln z - 1 = 0$ läßt sich eine differenzierbare Funktion $h(x, y)$ mit $h(1, 1) = 1$ und $F(x, y, h(x, y)) = 0$ für alle (x, y) nahe genug an $(1, 1)$ festlegen.

(a) (3) Begründen Sie die Richtigkeit der Aussage. (ursprünglich fehlte in der Angabe '-1', deshalb wurden 3 Punkte bei jedem automatisch angerechnet.)

Antwort: Weil $F(1, 1, 1) = 0$ und $F_z(1, 1, 1) = 1 \neq 0$ ist, kann der Hauptsatz für implizite Funktionen herangezogen werden.

(b) (4) Es soll $h_x(1, 1)$ und $h_y(1, 1)$ ermittelt werden.

Antwort: $h_x(1, 1) = -\frac{1}{2}$.

(c) (3) Man bestimme den Wert von $h_{xy}(1, 1)$.

Antwort: Man findet $h_{xy}(1, 1) = \frac{1}{8}$.

| | | |
|-----------|---------|---------------------------------|
| Nachname: | Matrnr: | 28.2.2008 M2-ET (Herfort) |
|-----------|---------|---------------------------------|

1. Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -3x - 4y + t \\ \dot{y} &= 2x + 3y + 1\end{aligned}$$

Dieses System läßt sich unter Benützung von Matrizen und Vektoren in der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}(t)$ anschreiben.

(a) (2) Wie lauten A und \vec{b} ?

Antwort: Es ist $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) (1) Man bestimme das charakteristische Polynom von A

Antwort: $\lambda^2 - 1$

(c) (4) Zu jedem Eigenwert bestimme man einen Eigenvektor.

Antwort: Zu 1 kann $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und zu -1 der Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als zugehöriger Eigenvektor gefunden werden. Jede andere Lösung ist jeweils skalares Vielfaches.

(d) (2) Welche Matrix S erlaubt Diagonalisierung von A ?

Antwort: $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, die Matrix, deren Spalten die gefundenen Eigenvektoren sind.

(e) (1) Wie lautet das entkoppelte Differentialgleichungssystem?

Antwort: Wenn $\vec{x} = S\vec{u}$ die Koordinatentransformation ist, so ergibt sich $\dot{\vec{u}} = S^{-1}AS\vec{u} + S^{-1}\vec{b}$, also nach kurzer Rechnung mit dem angegebenen S

$$\dot{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{u} + \begin{pmatrix} t+2 \\ -t-1 \end{pmatrix}$$

oder, wenn $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ so hat man die skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u + t + 2 \\ \dot{v} &= -v - t - 1\end{aligned}$$

2. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) (3) Man berechne den Wert der Determinante von A .

Antwort: Die Blockstruktur ergibt $\det A = (-1) \times \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \times 2 \times (-4) = 8$.

(b) (2) Man ermittle die Spur von A .

Antwort: Die Spur als Summe der Diagonalelemente ist $(-1) + (-1) + 4 + 1 + 0 = 3$.

(c) (3) Wenn das charakteristische Polynom von A in der Form $p = \lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5$ angeschrieben ist, wie lauten a_1 und a_5 ?

Antwort: Es ist a_1 der negative Wert der Spur, also $a_1 = -3$ und a_5 der negative Wert der Determinante, also $a_5 = -8$.

(d) (2) Geben Sie mindestens 3 Eigenwerte von A an.

Antwort: Die Blockstruktur läßt die Berechnung aller Eigenwerte in einfacher Weise zu: Die 3×3 -Determinante hat selbst Unterblöcke, aus denen -1 und die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ bestimmbar sind, also kann $\{-1, 1, 2\}$ als Antwort auf die Frage gegeben werden.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{\cos(x-y)}{1+y^2}$

(a) (3) Man gebe den Definitionsbereich von f an.

Antwort: Die Funktion ist für alle $x, y \in \mathbb{R}$ definiert, also ist $D(f) = \mathbb{R}^2$.

(b) (4) Man berechne die partiellen Ableitungen $f_x(0, 0)$ und $f_y(0, 0)$.

Antwort: $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

(c) (3) Man bestimme die Taylorreihe bis Glieder einschließlich zweiter Ordnung bei Entwicklung von f an der Stelle $(0, 0)$.

Antwort: Es ist $f(x, y) = (1 - \frac{1}{2}(x-y)^2 + \dots) \frac{1}{1+y^2} = (1 - \frac{1}{2}(x-y)^2 + \dots)(1 - y^2 + \dots)$ (geometrische Reihe verwendet und Glieder ab 3. Ordnung vernachlässigt). Ausmultiplizieren und Vernachlässigen der Glieder ab 3. Ordnung ergibt

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 2xy - 3y^2) + \dots$$

4. Im \mathbb{R}^2 sei K die ebene Figur, welche im ersten Quadranten durch die Bedingungen $x^2 + y^2 \leq 3$, $xy \leq 1$ bestimmt ist.

(a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

(b) (6) Es soll $J := \int_K f(x, y) d(x, y)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_{?}^{?} dx \int_{?}^{?} f(x, y) dy$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Als Skizze erhält man ein unter 45 Grad geneigtes "linsenartiges" Gebilde.
Als Ergebnis findet man das umgeformte Integral

$$J = \int_{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}^{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}} dx \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y) dy.$$

| | | |
|-----------|---------|---------------------------------|
| Nachname: | Matrnr: | 10.1.2008 M2-ET (Herfort) |
|-----------|---------|---------------------------------|

1. Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} + 2\dot{y} - x + 2y &= t \\ 2\dot{x} - 3\dot{y} + 8x &= e^t \end{aligned}$$

Dieses System läßt sich unter Benützung von Matrizen und Vektoren in der Form $A\dot{\vec{x}} = B\vec{x} + \vec{b}(t)$ anschreiben.

(a) (4) Wie lauten A , B und \vec{b} ?

Antwort: Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}$

(b) (6) Wie kann das System in der Form $\dot{\vec{x}} = C\vec{x} + \vec{c}(t)$ dargestellt werden? Wie lauten C und $\vec{c}(t)$?

Antwort: Da A invertierbar ist, ergibt sich $\dot{\vec{x}} = A^{-1}(B\vec{x} + \vec{b}(t))$. Es ist $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Somit ist $C = A^{-1}B = \dots = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -13 & -6 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}(t) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$.

2. Von einer reellen symmetrischen Matrix A weiß man, daß ihre Hauptdiagonale, der letzte Spaltenvektor und die letzte Zeile lediglich aus Nullen bestehen und daß sie Determinante -2 hat. Weiters kennt man den Eigenwert $\lambda = \sqrt{2}$. Der Kern hat Dimension 1 und das Bild Dimension 2.

(a) (3) Um wieviel mal wieviel Matrix handelt es sich? angeschrieben werden.

Antwort: Da Kern und Bild zusammen die Dimension des Definitionsbereichs ausmachen, ergibt sich A als 3×3 -Matrix.

(b) (7) Man bestimme alle Matrizen A mit den angegebenen Eigenschaften.

Antwort: Man weiß bereits, daß $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist, wobei lediglich a unbekannt

ist (Symmetrie!). Das charakteristische Polynom lautet $-\lambda^3 + 0\lambda^2 - (-a^2)\lambda + 0$, also $-\lambda(\lambda^2 - a^2)$. Einsetzen von $\lambda = \sqrt{2}$ ergibt $\sqrt{2}(2 - a^2) = 0$, also $a = \pm\sqrt{2}$. Somit ergeben sich 2 Lösungen, nämlich

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \frac{1+3x^2-y}{2+y^2}$

(a) (3) Man gebe den Definitionsbereich von f an.

Antwort: Die Funktion ist für alle $x, y \in \mathbb{R}$ definiert, also ist $D(f) = \mathbb{R}^2$.

(b) (4) Man berechne die partiellen Ableitungen $f_x(0, 0)$ und $f_y(0, 0)$.

Antwort: $f_x(x, y) = \frac{6x}{2+y^2}$, somit $f_x(0, 0) = 0$. Weiters ist $f_y(0, 0) = -\frac{1}{2}$.

(c) (3) Man bestimme $f_{xxyy}(0, 0)$ (ignorierbarer Hinweis: Taylorreihe!)

Antwort: Es ist $f(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1+3x^2-y}{1+\frac{1}{2}y^2} = \frac{1}{2}(1+3x^2-y)(1-\frac{1}{2}y^2+\dots)$ (geometrische Reihe verwendet), also ist der Koeffizient von x^2y^2 gleich $-\frac{3}{4}$ (Ausmultiplizieren!). In der Taylorreihe ist der entsprechende Koeffizient durch $\frac{1}{4!} \binom{4}{2} f_{xxyy}(0, 0)$ gegeben, woraus die Gleichung

$$\frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 6 \times f_{xxyy}(0, 0) = -\frac{3}{4}$$

entsteht, deren Lösung $f_{xxyy}(0, 0) = -3$ ist.

4. Im \mathbb{R}^3 sei K die Schnittfigur, welche durch die Bedingungen $x^2 + y^2 \leq z^2$ und $1 - x^2 - y^2 \geq z \geq 0$ bestimmt ist.

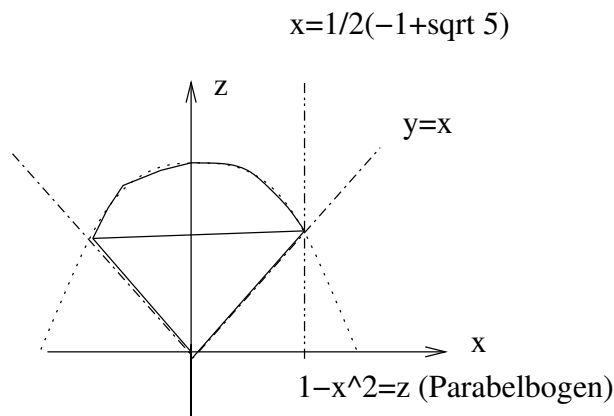
(a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

(b) (6) Es soll $J := \int_K f(x, y, z) d(x, y, z)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_A d(x, y) \int_{?}^{?} dz f(x, y, z) dz$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Als Skizze erhält man einen nach oben geöffneten Kegel, der nach oben von dem durch $(0, 0, 1)$ gehenden nach unten geöffneten Rotationsparaboloid abgeschnitten wird.



rotiert um die z -Achse \rightarrow "Eistüte"

Dementsprechend müssen entlang der Schnittkante (einem Kreis) die Gleichungen $x^2 + y^2 = (1 - x^2 - y^2)^2$ gelten, somit $z^2 = (1 - z^2)^2$, aus der man $z = 1 - z^2$, also $z = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$ ($z > 0!!$) bzw. $z^2 = -(1 - z^2)^2$ (ohne Lösung) ableitet. Demnach ergibt sich $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\}$ und als Ergebnis das umgeformte Integral

$$J = \int_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})} d(x, y) \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1-x^2-y^2} f(x, y, z) dz.$$

| | | |
|-----------|---------|----------------------------------|
| Nachname: | Matrnr: | 13.12.2007 M2-ET (Herfort) |
|-----------|---------|----------------------------------|

1. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & E \\ F & G \end{pmatrix},$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad 0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und X, Y, U, V jeweils 2×2 -Matrizen sein sollen.

- (a) (1) Geben Sie an, wieviele Zeilen und Spalten die Blockmatrix $\begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix}$ hat.

Antwort: Aufgrund der Blockstruktur ist es eine 4×4 -Matrix

- (b) (3) Welche Möglichkeiten hat man für die Zeilen- und Spaltenzahl der Lösungsmatrix. Geben Sie ein Begründung für alle von Ihnen gefundenen Möglichkeiten.

Antwort: Es handelt sich um 4×4 -Matrizen. Die gesuchte Matrix muß 4 Zeilen haben, damit die Multiplikation auf der linken Seite möglich ist und 4 Spalten, damit rechts eine 4-spaltige Matrix das Ergebnis sein kann.

- (c) (6) Man berechne die Matrizen Y und U . (Hinweis: Blockstruktur beachten).

Antwort: Man findet die Matrixgleichungen $AX + BU = I$, $AY + BV = O$, $0X + CU = 0$ und $0Y + CV = G$. Da C regulär ist, ergibt sich aus der 3.ten Gleichung $U = 0$. Danach ergibt die 1.te Gleichung $X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Die

4.te Gleichung ergibt $V = C^{-1}G = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nun ergibt die 2.te Gleichung

$$Y = -A^{-1}BV = \begin{pmatrix} -25 & -30 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

2. Gegeben ist das Differenzgleichungssystem $x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n + y_n$, $y_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n$ und die Anfangsbedingung $x_0 = y_0 = 1$.

- (a) (2) Das System kann in der Form $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$ und Anfangsbedingung $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ angeschrieben werden. Wie lauten A und a, b ?

Antwort: $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ und $a = b = 1$.

- (b) (4) Es sind die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A zu bestimmen.

Antwort: Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}$, somit sind die Eigenwerte 1 und $\frac{1}{2}$. Eigenvektoren sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu $\lambda = 1$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu $\lambda = \frac{1}{2}$.

- (c) (3) In welches entkoppelte Differenzgleichungssystem kann das Ausgangssystem übergeführt werden?

Antwort: Setzt man $\vec{u}_n = S\vec{x}_n$ mit $S := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, so ist $J := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und demnach $\vec{u}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{u}_n$ und $\vec{u}_0 = S^{-1}\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ das entkoppelte System.

- (d) (1) Man bestimme $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

Antwort: Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = S \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, wobei die letztere Umformung wegen der Stetigkeit von S möglich ist. Für $\vec{u}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ ergibt sich sofort $u_{n+1} = u_n = 2$ und $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, also als GW $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Multiplikation mit S ergibt als den gesuchten Grenzwert $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) := x^{\cos y} y^{\cos x}$ auf dem Quadrat $Q := (0, \frac{\pi}{4}) \times (0, \frac{\pi}{4})$.

- (a) (3) Begründen Sie, warum diese Funktion auf Q wohldefiniert ist.

Antwort: Die Funktion a^x ist für positives a und alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Deshalb ist die Funktion $x^{\cos y}$ für positives x und alle y definiert. Da jedoch $y^{\cos x}$ nur für positive y gebildet werden kann, müssen sowohl x als auch y positiv sein. Das trifft für alle (x, y) in Q zu.

- (b) (4) Man berechne die partiellen Ableitungen f_x und f_y .

Antwort: $f_x(x, y) = f(x, y) \left(\frac{\cos y}{x} - \sin x \ln y \right)$ und $f_y(x, y) = f(x, y) \left(\frac{\cos x}{y} - \sin y \ln x \right)$

- (c) (2) Ist f auf Q differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Antwort: Es sind f_x und f_y beides stetige Funktionen und deshalb ist f differenzierbar.

- (d) (1) Zeigen Sie, daß f auf Q kein lokales Extremum besitzen kann. (Hinweis: Welches Vorzeichen hat $\ln x$ auf dem Intervall $(0, \frac{\pi}{4})$?).

Antwort: Für ein solches lokales Extremum müßten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\cos y}{x} &= \sin x \ln y \\ \frac{\cos x}{y} &= \sin y \ln x\end{aligned}$$

gelten. In beiden Gleichungen steht links ein positiver Ausdruck, jedoch ist der Ausdruck rechts (weil der Logarithmus auf $(0, \frac{\pi}{2})$ negativ ist!) negativ. Somit können sie in Q nicht gelöst werden.

4. Im \mathbb{R}^3 sei K die Schnittfigur, welche durch die Bedingungen $x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1 - x^2 - y^2$ und $z \geq 0$ bestimmt ist.

- (a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.
(b) (6) Es soll $J := \int_K f(x, y, z) d(x, y, z)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_{?}^{?} dx \int_{?}^{?} dy \int_{?}^{?} f(x, y, z) dz$$

ausgedrückt werden.

Antwort: Als Skizze erhält man einen nach oben geöffneten Kegel, der von der Kugelkalotte begrenzt wird – rotationssymmetrisch bei Rotation um die z -Achse.

$$J = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz.$$

| | | |
|-----------|---------|----------------------------------|
| Nachname: | Matrnr: | 15.11.2007 M2-ET (Herfort) |
|-----------|---------|----------------------------------|

1. Es sei U der reelle Vektorraum aller Polynome vom Grad ≤ 2 und V der reelle Vektorraum von Funktionen der Form $a_1 \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + a_3 \frac{1}{z^3}$ mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ und z positiv. Weiters sei für ein Polynom p eine Funktion $Z(p)(z) := \int_0^\infty p(x)e^{-zx} dx$ definiert.

- (a) (4) Man zeige, daß die Funktionen $\{\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^3}\}$ eine Basis von V sind.

Antwort: Die angegebenen Funktionen liegen in V . Angenommen $a_1 \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + a_3 \frac{1}{z^3} = 0$ für alle $z > 0$. Dann ist z^3 mal dem Ausdruck für all diese z gleich Null, also $a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$ für alle $z > 0$. Dies ist ein quadratisches Polynom, kann also nur 2 Nullstellen haben, außer alle Koeffizienten verschwinden.

- (b) (3) Zeigen Sie, daß Z als lineare Abbildung von U nach V aufgefaßt werden kann.

Antwort: Man setzt ein: Die Integration ist linear, daher auch Z . Ist x^k ein beliebiges Polynom, so führt partielle Integration (nach dem unterstrichenen Term) auf $Z(x^k)(z) = \int_0^\infty x^k e^{-zx} dx = \frac{e^{-zx}}{-z} x^k \Big|_0^\infty - \frac{1}{z} \int_0^\infty (-e^{-zx} k x^{k-1} dx = \frac{k}{z} Z(x^{k-1})(z)$. Da $Z(1)(z) = \frac{1}{z}$ ist, ergibt sich aus der Rekursion $Z(x)(z) = \frac{1}{z^2}$ und $Z(x^2)(z) = \frac{2}{z^3}$. Deshalb führt Z die Basiselemente von U in Elemente von V über, und ist somit eine lineare Abbildung von U nach V .

- (c) (3) Man bestimme eine Matrix A bezüglich der Basis $\{1, x, x^2\}$ von U und der oben angegebenen von V .

Antwort: Die ausgewerteten Integrale ergeben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $\dot{x} = 2x + 2y + t, \dot{y} = 6x - 2y$.

- (a) (3) Das System kann in der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$ angeschrieben werden, wobei A eine 2×2 -Matrix, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und \vec{b} von t abhängige Vektoren sind. Wie lauten A und \vec{b} ?

Antwort: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (b) (4) Es sind die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix A zu bestimmen.

Antwort: Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 + 0 \cdot \lambda - 16$, somit sind die Eigenwerte ± 4 . Eigenvektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ zu $\lambda = 4$ ergeben sich als Lösung von

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Analog ergibt sich für $\lambda = -4$ als Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- (c) (3) In welches entkoppelte Differentialgleichungssystem kann das Ausgangssystem übergeführt werden? Antwort: Setzt man $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ mit $S := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, so ist $J := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = S^{-1}\vec{b} = \frac{t}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und demnach $\dot{u} = 4u + \frac{3t}{4}$, $\dot{v} = -4v - \frac{t}{4}$ das entkoppelte System.

3. Es sollen die Seitenlängen a, b, c eines rechteckigen Quaders (Streichholzschachtel!) mit gegebenem Volumen $V = 1$ derart bestimmt werden, daß die Oberfläche möglichst klein ist.

- (a) (5) Die Aufgabe ist als Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen zu beschreiben.
Antwort: $f(a, b, c) = ab + bc + ac$ unter den Nebenbedingungen $g(a, b, c) := abc - 1 = 0$ und $a \geq 0, b \geq 0$, sowie $c \geq 0$ zu minimieren.

- (b) (5) Man ermittle alle Kandidaten von Lösungen.

Antwort: Die durch die Nebenbedingung gegebene Fläche hat keine singulären Punkte, deshalb findet man alle Kandidaten mittels Lagrangeverfahren: $F(a, b, c, \lambda) = ab + ac + bc - \lambda(abc - 1)$. Differenzieren nach a, b, c und Nullsetzen ergeben

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

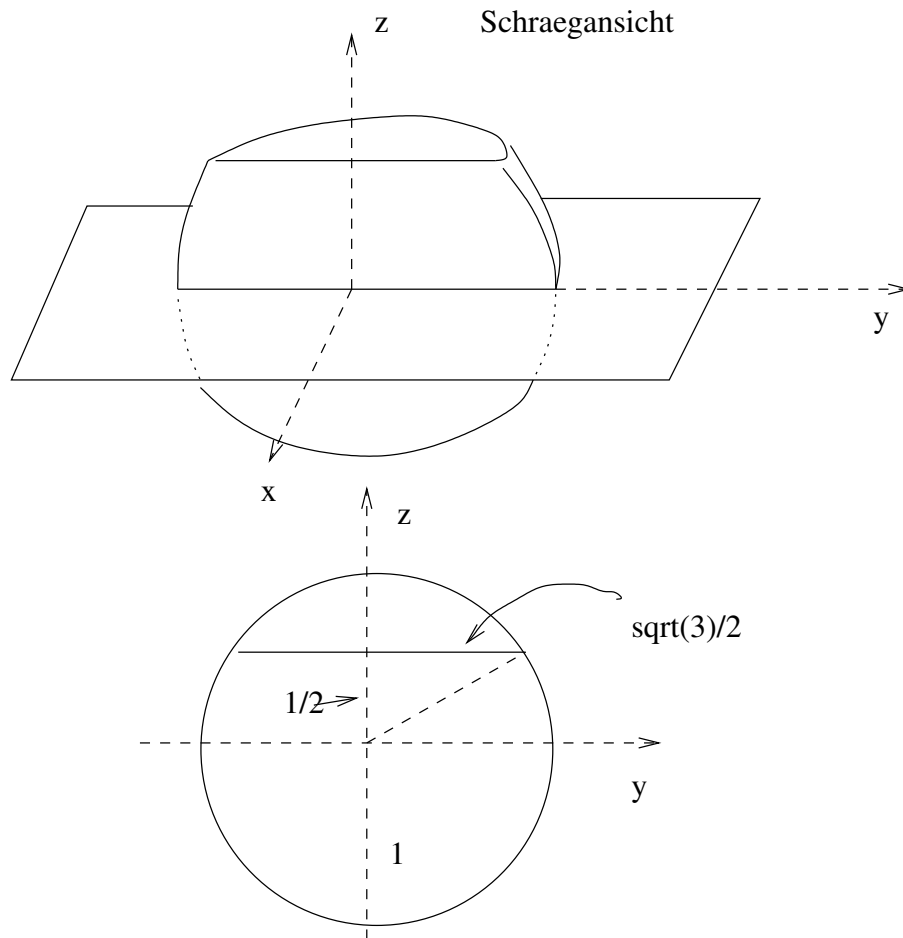
4. Im \mathbb{R}^3 sei K die Schnittfigur, welche durch die Bedingungen $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x \leq 0$ und $2z \leq 1$ bestimmt ist.

- (a) (4) Eine Skizze der Schnittfigur K möge angefertigt werden.

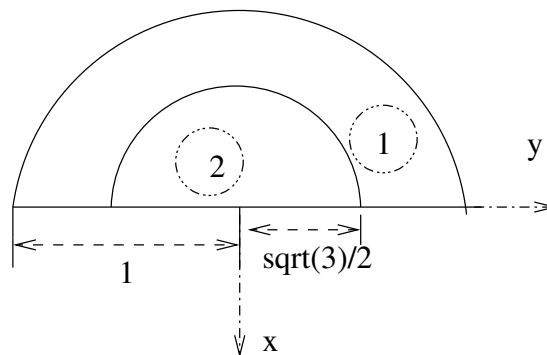
- (b) (6) Es soll $J := \int_K f(x, y, z) d(x, y, z)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_{?}^{?} dx \int_{?}^{?} dy \int_{?}^{?} f(x, y, z) dz$$

ausgedrückt werden.



Der Teil oberhalb $z=1/2$ sollte weggeschnitten sein



Antwort: Die obigen Skizzen helfen, den Integrationsbereich zu beschreiben. Im

Bereich 1 (unterste Skizze) ist z jeweils im Intervall $[-\sqrt{1-x^2-y^2}, \sqrt{1-x^2-y^2}]$, während z im Bereich 2 stets im Intervall $[-\sqrt{1-x^2-y^2}, \frac{1}{2}]$ verbleibt. In der mittleren Zeichnung sieht man, daß bei gegebenem $x \in [-1, 0]$ der Wert von y in den Intervallen $I_1 := [-\sqrt{1-x^2}, -\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}]$ und $I_2 := [\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$ im Bereich 1, und im Intervall $J := [-\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}, \sqrt{\frac{3}{4}-x^2}]$ im Bereich 2 verläuft. Dies legt es nahe, die Funktion

$$\phi(x, y) := \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{falls } x \in I_1 \cup I_2 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x \in J \end{cases}$$

zu definieren.

$J = \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\phi(x,y)} f(x, y, z) dz$, wobei $\phi(x, y) = \frac{1}{2}$, sofern $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}$ gilt, und $\phi(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ sonst.

| | | |
|-----------|---------|----------------------------------|
| Nachname: | Matrnr: | 25.10.2007 M2-ET (Herfort) |
|-----------|---------|----------------------------------|

1. Es sei U die lineare Hülle der auf ganz \mathbb{R} definierten Funktionen e^x und xe^x bezüglich des Skalkörpers \mathbb{R} . Weiters sei A die lineare Abbildung, die jeder Funktion y in U die Funktion $y'' + 2y' + y$ zuordnet.

(a) (1) Zeigen Sie, daß A als Abbildung von U nach U aufgefaßt werden kann.

Antwort: Man setzt ein: $A(e^x) = 4e^x \in U$ und $A(xe^x) = 4e^x + xe^x \in U$.

(b) (4) Man bestimme eine Basis des Bildes von A .

Antwort: Das Bild wird von $4e^x$ und $4e^x + xe^x$, somit auch von e^x und xe^x aufgespannt, die Funktionen sind aber lin.unabh., also eine Basis des Bildes

(c) (2) Man bestimme den Kern von A als Abbildung von U nach U aufgefaßt.

Antwort: Der Kern ist trivial, weil U und das Bild unter A in U Dimension 2 haben, und bekanntlich $\dim(U) = \dim(\ker A) + \dim(\text{Bild}(A))$ gilt.

(d) (3) Man bestimme eine Matrix der Abbildung bezüglich der Basis $B := \{e^x, xe^x\}$.

Antwort: $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (5) Es ist ein Orthonormalsystem (bezüglich des üblichen Skalarprodukts im \mathbb{R}^4) der linearen Hülle $U := \mathcal{L}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ gesucht.

Antwort: z.B. $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}$, $\vec{u}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{c}$.

(b) (4) Es ist jener Punkt \vec{u} in U gesucht, von dem die Spitze des Vektors $\vec{w} := (2, 1, 1, 1)^T$ minimalen Abstand hat, mit anderen Worten, für den $\|\vec{u} - \vec{w}\|$ minimal wird.

Antwort: Die Lösung wird durch den Abschnitt der *Fourierreihe* angegeben:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 \cdot \vec{w} \cdot \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{w} \cdot \vec{u}_2 = \dots = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) (1) Liegt \vec{w} in U ? Antwort: Nein, sonst wäre $\vec{w} = \vec{u}$.

3. Jemand interessiert sich für einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ der Länge 1, dessen Summe der Koordinaten maximalen Wert erreicht.

(a) (4) Die Aufgabe ist als Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen zu beschreiben.

Antwort: $f(x, y, z) = x + y + z$ ist unter der Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ zu maximieren.

(b) (3) Man ermittle alle Kandidaten von Lösungen.

Antwort: Die Nebenbedingung hat keine singulären Punkte, deshalb findet man sie alle mittels Lagrangeverfahren: $F(x, y, z, \lambda) = x + y + z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

Differenzieren nach x, y, z und Nullsetzen ergeben $\vec{x} = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) (3) Man löse die Aufgabe, d.h. finde den Vektor mit maximaler Koordinatensumme unter der Nebenbedingung und skizziere die Situation.

Antwort: Im Vorigen muß das Pluszeichen gewählt werden.

4. Im \mathbb{R}^3 sei T das Tetraeder mit den Eckpunkten $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 0)$ und $D(0, 0, 1)$

(a) (2) Eine Skizze möge angefertigt werden.

(b) (5) Es soll $J := \int_T f(x, y, z) d(x, y, z)$ als iteriertes Integral der Form

$$J = \int_K d(x, y) \int_{?}^{?} f(x, y, u) du$$

ausgedrückt werden. Skizze des ebenen Bereichs K . Antwort: $K = \{(x, y) \mid \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$, $J = \int_K d(x, y) \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}} f(x, y, u) du$

(c) (3) Man berechne das Volumen von T .

Antwort: 2, weil $1/6$ des Volumens des Quaders $1 \times 3 \times 4$. Das gleiche Resultat ergibt sich durch explizite Berechnung von $\int_K d(x, y) \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}} du$.

| | | |
|-----------|---------|---------------------------------|
| Nachname: | Matrnr: | 4.10.2007 M2-ET (Herfort) |
|-----------|---------|---------------------------------|

1. Gegeben ist eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow V$, wobei V der reelle Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens 2 ist. Von dieser Abbildung weiß man lediglich, daß ihr Kern die lineare Hülle der Polynome $x^2 + x + 1$ und $2x + 5$ und $A(x + 1) = x^2$ ist.

(a) (5) Wie lauten die Polynome $A(1)$, $A(x)$ und $A(x^2)$.

Antwort: Man weiß, daß $0 = A(x^2 + x + 1) = A(x^2) + A(x) + A(1) = A(2x + 5) = 2A(x) + 5A(1)$, und $A(x) + A(1) = x^2$. Das ergibt lineare Gleichungen für $A(1)$, $A(x)$, und $A(x^2)$. Lösung: $-\frac{2}{3}x^2, \frac{5}{3}x^2, -x^2$

(b) (3) Bezüglich der kanonischen Basis $\{1, x, x^2\}$ soll eine Matrixdarstellung von A angegeben werden.

Antwort: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}$

(c) (2) Geben Sie eine Basis des Kerns und des Bildes von A an.

Antwort: Basis des Kerns $\{x^2 + x + 1, 2x + 5\}$, Basis des Bildes $\{x^2\}$

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) (5) Man bestimme alle Eigenwerte von A .

Antwort: Die Blockstruktur 2×2 -Block links oben, und der 3×3 -Block

$$\begin{pmatrix} -1 - \lambda & 2 & -5 \\ 0 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 5 & -3 - \lambda \end{pmatrix},$$

der selbst eine Blockstruktur aufweist, ergeben das charakteristische Polynom in bereits faktorisierte Form, nämlich $p(\lambda) = -(\lambda^2 + 4\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$. Hier liest man als Lösungen für die Eigenwerte $\{-1, -3, -1, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})\}$ als Wurzeln der Faktoren ab.

(b) (5) Für den betragsgrößten Eigenwert gebe man eine Basis des zugehörigen Eigenraumes, sowie dessen Dimension an.

Antwort: Der betragsgrößte Eigenwert ist -3 . Man findet $(5, -5, 24, 1, 10)^T$ als Eigenvektor und die Dimension des Eigenraumes ist 1

3. Es sei $f(x, y, z) := \begin{pmatrix} e^{xyz} \\ \cosh(x + z^2 - y^2) \end{pmatrix}$ und $g(u, v) := \begin{pmatrix} \ln u - e^v \\ e^{uv} \end{pmatrix}$. Weiters sei $h(x, y, z) := g \circ f(x, y, z)$ die zusammengesetzte Funktion.

(a) (2) Man ermittle den Definitionsbereich von h .

Antwort: Ganz \mathbb{R}^3

(b) (1) Man ermittle $h(0, 0, 0)$.

Antwort: Wenn man weiß, daß $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ist, findet man auch ohne

Taschenrechner $h(0, 0, 0) = e \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) (5) Wie lautet die Funktionalmatrix von h an der Stelle $(0, 0, 0)$?

Antwort: Die Kettenregel ergibt $h'(0, 0, 0) = g'(1, 1)f'(0, 0, 0)$ und weil $g'(1, 1)$ eine 2×2 -Matrix, sowie $f'(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist, ergibt sich sehr schnell $h'(0, 0, 0) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) (2) Kann $f \circ g$ gebildet werden. Falls nicht, bitte begründen.

Antwort: g führt von einer Teilmenge des \mathbb{R}^2 in eine solche des \mathbb{R}^2 , jedoch benötigt f drei Argumente. Also kann die Zusammensetzung nicht gebildet werden

4. Ein ebenes Plättchen B werde in der (x, y) -Ebene durch $B := \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 \leq y \leq x\}$ beschrieben.

(a) (2) Eine Skizze möge angefertigt werden.

(b) (2) Man berechne die von B eingenommene Fläche.

Antwort: $\frac{1}{6}$

(c) (4) Man berechne die Koordinaten des Schwerpunkts unter der Annahme homogener Massendichte.

Antwort: $\vec{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

(d) (2) Geben Sie die Definition für die Unabhängigkeit zweier Ereignisse A und B an.

Antwort: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ bzw. äquivalent dazu $P(A \mid B) = P(A)$, sofern $P(B) \neq 0$

| | | |
|-----------|---------|---------------------------------|
| Nachname: | Matrnr: | 13.9.2007 M2-ET (Herfort) |
|-----------|---------|---------------------------------|

1. Auf dem reellen Vektorraum V aller Polynome vom Grad höchstens 2 sei eine Abbildung $A : V \rightarrow V$ durch $A(p)(x) = \int_0^1 (x-t)p(t) dt$ (p Polynom vom Grad ≤ 2) gegeben.

(a) (3) Zeigen Sie, daß die Abbildung A linear ist.

(b) (5) Bezüglich der kanonischen Basis $\{1, x, x^2\}$ soll eine Matrixdarstellung von A angegeben werden.

Ergebnis $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) (2) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix und eine Jordannormalform.

Ergebnis bis auf Permutation der Hauptdiagonalelemente: $J = \begin{pmatrix} \frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Es sei durch $144 = -3x^2 + 23y^2 + 26\sqrt{3}xy$ die Gleichung eines Kegelschnittes in der Ebene gegeben.

(a) (6) Zeigen Sie, daß es eine Drehmatrix O gibt, sodaß nach Koordinatentransformation $\vec{x} = O\vec{u}$ die Gleichung die Gestalt

$$1 = \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}$$

hat, wobei $\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Welche Werte haben a und b ?

Ergebnis: Es ist $O = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, weiters sind $a = 2, b = 3$ und der Drehwinkel ist 60° , wobei das (u, v) -System entgegen dem Uhrzeiger in das (x, y) -System gedreht wird.

(b) (3) Man gebe den Drehwinkel der Matrix O und die Richtungen und Längen der Achsen des Kegelschnittes an. Liegt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel vor?

Ergebnis: Hyperbel

(c) (1) Man skizziere den Kegelschnitt in der (x, y) -Ebene samt Asymptoten.

Hinweis: Hauptachsentransformation

3. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei durch $f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^2 + 3y^2 - z^2 \\ \ln(x^2 + y^2 + z^2) \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) (3) Zeigen Sie, daß f auf dem ganzen Definitionsbereich stetig differenzierbar ist.
Ergebnis: Zusammensetzung von unendlich oft differenzierbaren Funktionen

(b) (5) In welchen Punkten sind die Voraussetzungen des Hauptsatzes der impliziten Funktionen erfüllt, wenn man davon ausgeht, das Gleichungssystem $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch eine Funktion $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\phi}(x)$ "lokal aufzulösen"?

Ergebnis: Man muß die (partielle) Funktionalmatrix

$$f_{y,z} = \begin{pmatrix} 6y & -2z \\ \frac{2y}{r^2} & \frac{2z}{r^2} \end{pmatrix}$$

mit $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ bilden, und bekommt die Punkte, in denen der Hauptsatz versagt, durch Lösen des Gleichungssystems

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x^2 + 3y^2 - z^2 = \det(f_{y,z}(x, y, z)) = \frac{22yz}{r^2}.$$

Die fraglichen Punkte sind $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$, es sind 4 an der Zahl (die VZ sind frei wählbar).

(c) (1) Skizzieren Sie die Punktmenge $\{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

Ergebnis: Ein elliptischer Kegel schneidet aus der Oberfläche der Einheitskugeloberfläche zwei spiegelsymmetrisch bezüglich der (x, y) -Ebene gelegene geschlossene Kurven aus.

4. Jemand benötigt von der Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(x, y, z) = \frac{1+x+2z-4y^2}{3-4x+z^3}$ mit Anschlußstelle $P(0, 0, 0)$ nachstehende Koeffizienten:

(a) (1) Wie lautet das konstante Glied?

$$\frac{1}{3}$$

(b) (3) Wie lauten die Koeffizienten von x , y und z ?

$$\frac{7}{9}, 0, \frac{2}{3}$$

(c) (6) Wie lauten die Koeffizienten von xy , yz und z^2 ?

Alle Null

Hinweis: 6.9 in

http://www.math.tuwien.ac.at/~herfort/ET/M2_SS07/UE_ANGABEN/ue_aller.pdf

| | | |
|-----------|---------|----------------------------------|
| Nachname: | Matrnr: | 24.08.2007 M2-ET (Herfort) |
|-----------|---------|----------------------------------|

1. Auf dem reellen Vektorraum aller kubischen Polynome sei eine Abbildung $\Phi(p) = x^2 p'' + 2xp' - p$ (p kubisches Polynom) gegeben.
 - (a) (3) Zeigen Sie, daß die Abbildung Φ linear ist.
 - (b) (5) Bezüglich der kanonischen Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ im Raum der kubischen Polynome soll eine Matrixdarstellung von Φ angegeben werden. Diagonalmatrix $\text{diag}(-1, 1, 5, 11)$
 - (c) (2) Warum ist die Gleichung $\Phi(p) = q$ für beliebiges kubisches Polynom q lösbar? weil Matrix invertierbar.

2. Von einer 4×4 Matrix A weiß man, daß sie die Eigenwerte 1 und 2 besitzt, beide mit arithmetischer Vielfachheit 2, 1 jedoch mit geometrischer Vielfachheit 1 und 2 mit geometrischer Vielfachheit 2.
 - (a) (2) Man bestimme das charakteristische Polynom von A . $((x-1)^2(x-2)^2)$
 - (b) (3) Man berechne Spur und Determinante von A . 6 und 4
 - (c) (5) Man bestimme eine Jordannormalform von A .
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Gegeben sind die Funktion $f(x, y, z) = xyz$ und ein Bereich B im \mathbb{R}^3 , dessen Punkte (x, y, z) durch die Bedingungen $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ und $x + y + z \leq 1$ festgelegt sind.
 - (a) (1) Zeigen Sie, daß B kompakt ist.
 - (b) (3) Zeigen Sie, daß f stetig ist.
 - (c) (6) Man berechne das Maximum m , welches f auf B (laut Satz von Weierstraß) annimmt. An welchen Punkten wird das Maximum angenommen? $m = \frac{1}{27}$ an $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

4. Jemand möchte das Integral $I := \int_B f(x, y, z) d(x, y, z)$ über den im 1.ten Oktanten liegenden Bereich B des Ellipsoids mit den Halbachsen $a = 2, b = 3, c = 4$ erstrecken.
 - (a) (2) Skizzieren Sie den Bereich B .
 - (b) (3) Durch welches endliche Set von Ungleichungen kann man B beschreiben (so wenige Ungleichungen als nötig)?
 - (c) (5) I soll als iteriertes Integral der Form $\int_0^2 dx \int_0^2 dy \int_0^2 f(x, y, z) dz$ ausgedrückt werden.

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dy \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}} f(x, y, z) dz$$

| | | |
|-----------|---------|----------------------------------|
| Nachname: | Matrnr: | 20.07.2007 M2-ET (Herfort) |
|-----------|---------|----------------------------------|

1. (a) (5) Liegt der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in dem von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

aufgespannten linearen Teilraum des \mathbf{C}^4 ?

nein

- (b) (5) Ist die Funktion $u(x) = \cos^3(x)$ in dem von den Funktionen $f(x) = \cos(3x)$ und $g(x) = \cos x$ und $h(x) = 1$ aufgespannten linearen Teilraum aller stetigen auf $[0, \pi]$ definierten Funktionen mit Werten in \mathbb{R} . Wenn ja, gebe man Koeffizienten a, b, c mit $u = af + bg + ch$ explizit an.

ja $a = 3/4$, $b = 1/4$ Begründung z.B. mittels De'Moivre

2. (a) (6) Man löse die Matrixgleichung $XA^T = B^T$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Es gibt keine Lösung

- (b) (4) Welche der Matrizenprodukte

i. AB ,

ii. $A^T B$,

iii. $A^{-1}B$

können gebildet werden.

Nur (ii)

3. Es sei $f(x, y) := x^2 + y^2$ und $g(x, y) = 7x^2 - 2xy + 7y^2 - 1$ gegeben.

- (a) (3) Stellen Sie jene Gleichungen auf, die zur Bestimmung des Minimums von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ nötig sind.

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- (b) (5) Formulieren Sie die Gleichungen in ein Eigenwertproblem um und lösen Sie es.

$$\lambda = -\frac{1}{\mu} \mu = 8, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \mu = 6, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) (2) Skizzieren Sie die Menge der Punkte mit $g(x, y) = 0$. Welche geometrische Deutung hat die Aufgabe.

Extrema des Abstandes eines Punktes auf der skizzierten Ellipse.

4. Durch $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$, $x \leq \frac{1}{2}$ und $y \leq \frac{1}{2}$ werden die Punkte eines räumlichen Bereichs B beschrieben.

- (a) (3) Man skizziere den Bereich B .

- (b) (7) Man formuliere das Bereichsintegral $\int_B f(x, y, z) d(x, y, z)$ als iteriertes Integral bzw. nötigenfalls als Summe iterierter Integrale.

Zu b)

$$\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz + \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz.$$

| | | |
|-----------|---------|----------------------------------|
| Nachname: | Matrnr: | 27.06.2007 M2-ET (Herfort) |
|-----------|---------|----------------------------------|

1. (a) (3) Wenn $k = 2.5$, $l = 3.2$ und $r = 1.5$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, so berechne man von $k\vec{a} + l\vec{b} + r\vec{c}$ die zweite Koordinate.
- (b) (3) Wenn $k = 2.5$, $l = 3.2$ und $r = 1.5$ und $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos(3x)$ und $h(x) = e^{2x}$, so berechne man den Wert der Funktion $u := kf + lg + rh$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$.
- (c) (2) Sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 ?
- (d) (2) Sind die Funktionen f, g, h im offenen Intervall $(0, \pi)$ linear unabhängig?

2. Gegeben ist die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2007 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (2) Man berechne die Determinante von A .
- (b) (2) Man berechne die Spur von A .
- (c) (6) Man berechne das charakteristische Polynom von A .
3. Gegeben ist die Gleichung $x^2 + yz + z^3x = 3$ und es sei F die Menge der Punkte im \mathbb{R}^3 , welche diese Gleichung erfüllen.
- (a) (3) Für welches z liegt der Punkt $P(1, 1, z)$ in dieser Menge?
- (b) (4) Hat diese Menge singuläre Punkte?
- (c) (3) Man berechne $z_{xx}(1, 1)$, wobei z den in a) berechneten Wert hat.
4. Durch die Ungleichungen $x^2 + y^2 \leq 9$, $x \geq 1$, und $x + y \geq 3$ wird ein ebener Bereich B festgelegt. Es geht um das Bereichsintegral $I := \int_B f(x, y) d(x, y)$.
- (a) (2) Skizzieren Sie den Bereich B .
- (b) (3) I soll als iteriertes Integral (eventuell nach Unterteilen in Intervalle der y -Achse) der Form $\int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx$ ausgedrückt werden.
- (c) (5) I soll als iteriertes Integral (eventuell nach Unterteilen in Intervalle der x -Achse) der Form $\int_{\gamma}^{\delta} dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy$ ausgedrückt werden.