Mathematik 2 für ET

Prüfungen vom 2.10.2008 bis 27.4.2009 von Prof. Szmolyan

Prüfung vom 8.10.2008

1. Differentialgleichung:
$$x'' + x' - 6x = sin(t) + te^{-2t}$$

2. Eigenwerte berechnen, algebraische und geometrische Vielfachheit und aufstellen der Eigenbasis, falls existent
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Gegeben ist folgende Quadrik:
$$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 6 = 0$$
Bestimmen Sie, um welchen Körper im $\mathbb{R}^3$ es sich handelt.
Bestimmen Sie weiters den maximalen Abstand des Körpers zur Ebene $z = 0$

4. Berechnen Sie das Volumen mittels Integration.
Bereich: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$, $z \leq 4 - x^2$, $z \geq 2 + y^2$

Prüfung vom 19.11.2008

1. Bestimmen Sie die Lösung folgender DiffGl mittels Variation der Konstanten:
$$t^2 x'' + tx' - 2x = 1$$

2. Skizzieren Sie den Bereich, den folgende Gleichungen beschreiben
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$
$$x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$$
und berechnen Sie das Volumen

3. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren folgender Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$
Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die Matrix diagonalisierbar? Diagonalisieren sie die Matrix und geben sie die Transformationsmatrix T an.

4. Berechnen Sie den kleinsten bzw größten Abstand von der $x = 0$ Ebene folgender Quadrik:
$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 6 = 0$$

Prüfung vom 27.4.2009

1. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 6y' + 13y = x + e^{-3x}$$

   Wie verhalten sich die Lösungen für $t \to \infty$

2. Folgende Matrix sei gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen bzw. beantworten Sie:

   a) Das charakteristische Polynom und daraus die Eigenwerte von A.
   b) Die dazugehörigen Eigenvektoren.
   c) Die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.
   d) Ist A invertierbar? Falls ja, geben Sie die Eigenwerte von A an.

   Hinweis: Bei d) ist keine Rechnung notwendig.

3. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2$$

   auf der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 4$

   Hinweis: Minima und Maxima können auch am Rand der Kreisscheibe liegen!

4. Es sei $B \subset \mathbb{R}^2$ der durch die folgenden Ungleichungen bestimmte Bereich

   $x > 0$, $y > 0$, $1 \leq xy \leq 4$, $-2 + x \leq y \leq 3 + x$, $0 \leq z \leq x + y$

   Skizzieren Sie die Projektion auf die x, y-Ebene.

   Verwenden Sie die Substitution $u = xy$, $v = y - x$, $w = z$ zur Berechnung des Volumens von B mittels Integration.

Mathematik 2 - Prüfung vom 19.11.2008, Szmolyan

1) $t^2 x'' + t x' - 2x = 1$

↳ Euler'sche Differentialgleichung

$x(t) = t^\alpha$ ... Ansatz

$x'(t) = \alpha \cdot t^{\alpha-1}$

$x''(t) = \alpha(\alpha-1)\, t^{\alpha-2}$

Einsetzen:

$\alpha(\alpha-1) t^\alpha + \alpha t^\alpha - 2t^\alpha = 0$

$\alpha = \pm\sqrt{2}$

$$\boxed{x_h(t) = c_1 \cdot t^{\sqrt{2}} + c_2 \cdot \frac{1}{t^{\sqrt{2}}}}$$

Variation der Konstanten:

$x_p(t) = c_1(t)\, t^{\sqrt{2}} + \frac{c_2(t)}{t^{\sqrt{2}}}$

man fordert $c_1' x_1 + c_2' x_2 = 0$

$\rightarrow c_1' t^{\sqrt{2}} + \frac{c_2'}{t^{\sqrt{2}}} = 0 \rightarrow c_1' = \frac{-c_2'}{t^{2\sqrt{2}}}$ (1)

$x_p(t)$ ableiten und einsetzen liefert

$t^2 \left(c_1' \sqrt{2}\, t^{\sqrt{2}-1} + \frac{c_2' \cdot (-\sqrt{2})}{t^{\sqrt{2}+1}} \right) = 1 \quad | \cdot t^{-2}$

$c_1' \sqrt{2}\, t^{\sqrt{2}+1} + \frac{c_2' (-\sqrt{2})}{t^{\sqrt{2}-1}} = 1 \quad |$ (1) einsetzen

$-\sqrt{2}\, c_2' t^{1-\sqrt{2}} + \frac{c_2' (-\sqrt{2})}{t^{\sqrt{2}-1}} = 1 \quad | \cdot t^{1-\sqrt{2}}$

usw

↳ $c_2' = -\frac{t^{\sqrt{2}-1}}{2 \cdot \sqrt{2}} \qquad c_2 = \int c_2' = -\frac{1}{4} t^{\sqrt{2}}$

$$C_1' = \frac{t^{\sqrt{2}-1}}{2\cdot\sqrt{2}} \rightarrow C_1 = -\frac{1}{4} t^{-\sqrt{2}}$$

einsetzen

$$x_p = -\frac{1}{4} \cancel{t^{-\sqrt{2}}} \cdot \cancel{t^{\sqrt{2}}} - \frac{1}{4} \cancel{t^{+\sqrt{2}}} \cdot \cancel{t^{-\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2}$$

allg Lösung

$$\underline{\underline{x(t)}} = x_h(t) + x_p(t) = \underline{\underline{c_1 t^{\sqrt{2}} - \frac{c_2}{t^{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2}}}$$

4) $q(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 6 = 0$

$q(x,y) = x^T A x - 6 = 0$

$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9 = 0 = (-1)(\lambda-3)^2(\lambda-1)$$

$$\lambda_1 = 3 \quad n_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 1 \quad n_1 = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\hat{q}(y) = y^T D y - 6 = 3u^2 + 3v^2 + 2w^2$

ergibt folgende Quadrik: $\hat{q}(y): \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{6} - 1 = 0$

$\hookrightarrow$ <u>Ellipsoid</u>

Kleinster bzw größter Abstand von der $x=0$ Ebene

Eigenräume:

$E(3)$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $E(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$E(1)$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $E(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Drehmatrix $\underset{\sim}{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \underset{\sim}{V} \cdot \vec{y}$

Normalvektor auf $x=0$ Ebene $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

transformieren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{V} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$\vec{n}_{[B]} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $-\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

max Abstand bei:

$\vec{n}_B = \nabla \tilde{\varphi}$

$\nabla \tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} v \\ u \\ w/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt $v = 0$, $u = 1/\sqrt{2}$, $w = 3/\sqrt{2}$ bzw $v = 0$, $u = -1/\sqrt{2}$, $w = -3/\sqrt{2}$

rücktransformieren: $\vec{x}_1 = V \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

max Abstand ± 2

min Abstand gibt es nicht, da es $x=0$-Ebene schneidet

Alternativ Extremwert bei $f_y = f_z = 0$

$f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 6 = 0$

$x = h(y,z)$ ↳ Implizit differenzieren

$2h^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2hz - 6 = 0$

$\frac{\partial}{\partial z}$ $4h \cdot h_z + 4z + 2h + 2z h_z = 0$

$$h_z = \frac{-4z - 2h}{4h + 2z} = 0$$

$\frac{\partial}{\partial y}$ $4h \cdot h_y + 6y + 2z h_y = 0$

$$h_y = \frac{-6y}{4h + 2z} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$4z = -2x \Rightarrow z = -x/2$$

$$f(x, 0, -x/2) = 2x^2 + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{4}2} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - 6 = 0$$

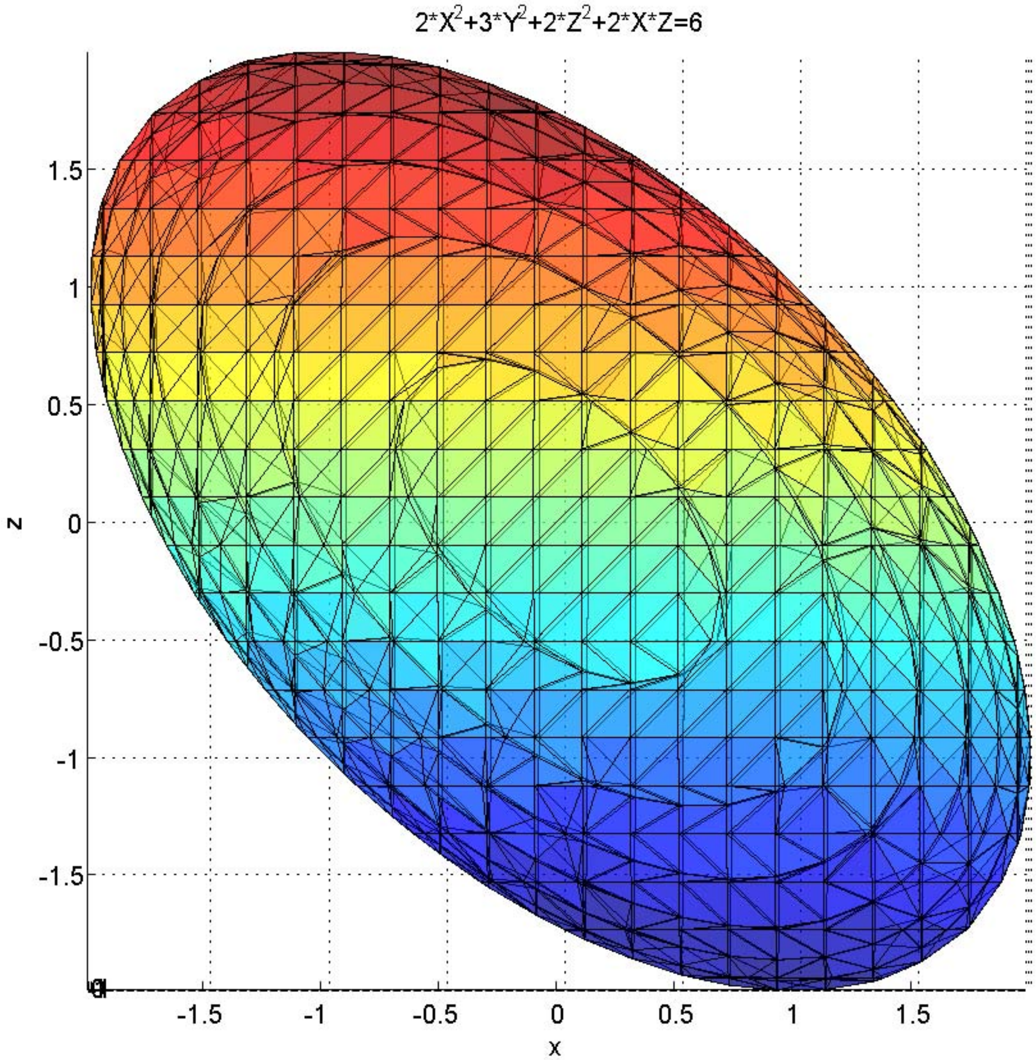
$$x^2 + x^2/2 = 6$$

$$x = \pm 2$$

$$y = 0$$

$$z = \mp 1$$

$$\boxed{\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$


2*X^2+3*Y^2+2*Z^2+2*X*Z=6
z
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
x
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5