

# Mathematik 2 f. ET

(StPl 2000)

22. Oktober 2003

1. Sei  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Man berechne die Matrix  $e^{\mathbf{A}}$ .

2. Man löse die Differentialgleichung

$$y'' + y = \tan x.$$

3. Was ist das Minimalpolynom einer Matrix  $\mathbf{A}$ ? In welcher Beziehung steht es zum charakteristischen Polynom dieser Matrix?

4. Was besagt der Satz über implizite Funktionen?

## Anworten:

1. Die Gleichung  $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{D}$  lautet  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} e^{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{A}} = \frac{e^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

2.  $y_a(x) = y_p(x) + y_h(x)$ ;  $y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ,  $y_p(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x \Rightarrow \begin{matrix} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0 \\ -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = \tan x \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_2'(x) = \sin x \\ c_2(x) = -\cos x \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \\ c_1(x) = \sin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \end{matrix} \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{2} \cos x \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ .

3. Das Minimalpolynom  $m$  einer Matrix  $\mathbf{A}$  ist das Polynom kleinsten Grades und dem führenden Koeffizienten 1, welches die Eigenschaft  $m(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$  hat. Es ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms der Matrix  $\mathbf{A}$ .

4. Es sei  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , eine reelle Funktion und  $(x_o, y_o) \in D$  eine „Anfangslösung“ der Gleichung  $F(x, y) = 0$ , also  $F(x_o, y_o) = 0$ . Es enthalte  $D$  mit dem Punkt  $(x_o, y_o)$  auch einen Kreis um  $(x_o, y_o)$  mit geeignetem Radius  $\rho$  ( $\{(x, y) | (x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 < \rho\} \subseteq D$ ), und es seien die partiellen Ableitungen  $F_x(x, y)$  und  $F_y(x, y)$  auf diesem Kreis stetig. Ist dann  $F_y(x_o, y_o) \neq 0$ , so gibt es in einer  $\delta_x$ -Umgebung um  $x_o$  eine Auflösung  $y = f(x)$ ,  $y_o = f(x_o)$ , welche in  $x_o$  differenzierbar ist,

$$F_x(x_o, y_o) + F_y(x_o, y_o)f'(x_o) = 0.$$

Ist  $F_x(x_o, y_o) \neq 0$ , so gibt es in einer  $\delta_y$ -Umgebung von  $y_o$  eine Auflösung  $x = g(y)$ ,  $x_o = g(y_o)$ , welche in  $y_o$  differenzierbar ist,

$$F_x(x_o, y_o)g'(y_o) + F_y(x_o, y_o) = 0.$$