Mathematematik 2 f. ET

(StPl 2000)

13. Oktober 2004

1. Man löse die Anfangswertaufgabe $\dot{x} = x^2 y,\ \dot{y} = xy^2,\ x(0) = y(0) = 1$.

2. Sei $p(x) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 1$ ein Polynom. Unter welcher Voraussetzung über die beiden Koeffizienten α und β hat das Polynom p nur Wurzeln in der Halbebene $\Re z < 0$?

3. Was ist eine *normale* Matrix? Was sind ihre Besonderheiten?

4. Es seien X_1, X_2 unabhängige stetige $N(0,1)$-verteilte Zufallsgrößen. Wie ist die Zufallsgröße $Y = X_1^2 + X_2^2$ verteilt?

Anworten:

1. Aus $\dot{x} = x^2 y, \dot{y} = xy^2$ folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}dt}{\dot{x}dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{xy^2}{x^2 y} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln C \Rightarrow y = Cx \Rightarrow 1 = y(0) = Cx(0) = C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = x$, also $\dot{x} = x^3 \Rightarrow \frac{dx}{x^3} = dt \Rightarrow -\frac{1}{2}x^{-2} = t + D \Rightarrow \frac{1}{x^2} = -2t - 2D \Rightarrow 1 = \frac{1}{[x(0)]^2} = -2D \Rightarrow D = -\frac{1}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = y(t)$.

Oder: $\dot{x}y - \dot{y}x = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y = Cx$.

2. $\alpha > 0$ und $\beta > \frac{1}{\alpha} > 0$.

3. Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ heißt *normal*, wenn sie mit ihrer Transponierten $\mathbf{A}^H$ vertauschbar ist: $\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$. Eine normale Matrix ist unitär ähnlich einer Diagonalmatrix.

4. Die Zufallsgröße Y ist χ^2-verteilt mit 2 Freiheitsgraden: $f_Y(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}$ für $x > 0$ (und $f_Y(x) = 0$ für $x \leq 0$).