

MATHEMATIK 2 für Elektrotechnik SÄTZE

Satz 19.1

Jeder Vektor des dreidimensionalen Raumes läßt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination der Vektoren eines Dreibeins darstellen.

Satz 19.2

Je vier Vektoren des dreidimensionalen Raumes sind linear abhängig

Satz 20.1

Jedes System von Vektoren, das den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

Satz 20.2

Sind $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ linear abhängige Vektoren, so läßt sich mindestens einer dieser Vektoren als Linearkombination der übrigen darstellen.

Satz 20.3

Es seien $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k, \dots, \underline{a}_h$ beliebige Vektoren. Sind die Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ linear abhängig, so sind auch die Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k, \dots, \underline{a}_h$ linear abhängig. Mit anderen Worten, jede Obermenge eines Systems linear abhängiger Vektoren ist linear abhängig.

Satz 20.4

Es seien $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k, \dots, \underline{a}_h$ beliebige Vektoren. Sind die Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_h$ linear unabhängig, so sind auch die Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ linear unabhängig. Mit anderen Worten, jede Untermenge eines Systems linear unabhängiger Vektoren ist linear unabhängig.

Satz 20.5

Je $n+1$ Vektoren des n -dimensionalen Raumes sind linear abhängig.

Satz 20.6

Ist $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ ein System von n linear unabhängigen Vektoren des n -dimensionalen Raumes, so läßt sich jeder Vektor \underline{a} in eindeutiger Weise als Linearkombination dieser Vektoren darstellen, $\underline{a} = \lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{a}_n$.

Satz 20.7

Es ist $\text{Det}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = 0$ genau dann, wenn die Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ linear abhängig sind.

Satz 20.8

Der Wert einer n-reihigen Determinante ändert sich nicht, wenn man Zeilen und Spalten vertauscht, das heißt, es gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Satz 20.9

Vertauscht man zwei Spalten (Zeilen) einer Determinante, so wechselt die Determinante ihr Vorzeichen.

Satz 20.10

Sind zwei Spalten (Zeilen) einer Determinante gleich, so ist der Wert der Determinante gleich Null.

Satz 20.11

Addiert man zu einer Spalte (Zeile) ein Vielfaches einer anderen Spalte (Zeile) hinzu, so bleibt der Wert der Determinante unverändert.

Satz 20.12

Ersetzt man in einer Determinante eine Spalte (Zeile) durch ein Vielfaches derselben, so wird der Wert der Determinante um ein Vielfaches verändert, $\text{Det}(\dots, \lambda \cdot a_i, \dots) = \lambda \cdot \text{Det}(\dots, a_i, \dots)$.

Satz 20.13

Eine Determinante mit parallelen Spalten (Zeilen) hat den Wert Null.

Satz 20.14 Entwicklungssatz nach einer Spalte oder Zeile

Ist j die Nummer einer beliebigen Spalte, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \alpha_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

ist i die Nummer einer beliebigen Zeile, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \alpha_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

Satz 20.15

Sind in einer Determinante alle Elemente unterhalb oder oberhalb der Hauptdiagonale gleich Null, so ist der Wert der Determinante gleich dem Produkt der Hauptdiagonalglieder,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Satz 20.16 Multiplikationssatz für Determinanten

Die Determinante des Produkts zweier quadratischer Matrizen ist gleich dem Produkt der Determinanten dieser Matrizen, $\text{Det}(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \text{Det}(\underline{B} \cdot \underline{A}) = \text{Det}\underline{A} \cdot \text{Det}\underline{B}$.

Satz 20.17

Ist \underline{A} eine reguläre Matrix, so ist auch \underline{A}^{-1} regulär und $\text{Det}\underline{A}^{-1} = \frac{1}{\text{Det}\underline{A}}$. Sind \underline{A} und \underline{B} reguläre Matrizen, so ist auch das Produkt $\underline{A} \cdot \underline{B}$ eine reguläre Matrix; die Inverse dieses Produktes ist das Produkt der Inversen in umgekehrter Reihenfolge.

Satz 20.18

Wenn ein inhomogenes Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ überhaupt lösbar ist, so ist es genau dann eindeutig lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix injektiv ist, der Rang von \underline{A} also gleich der Anzahl der Unbekannten ist. Eine homogene Gleichung $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ hat genau dann nur die triviale Lösung $\underline{x} = \underline{0}$, wenn die Koeffizientenmatrix \underline{A} injektiv ist.

Satz 20.19

Damit ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lösbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix \underline{B} mit dem Rang der Koeffizientenmatrix \underline{A} übereinstimmt.

Satz 20.20

Ein inhomogenes Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ist genau dann für jede beliebige rechte Seite \underline{b} lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix surjektiv ist, das heißt, wenn der Rang von \underline{A} gleich der Anzahl der Gleichungen ist.

Satz 20.21

Ein inhomogenes Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ist genau dann für jede rechte Seite \underline{b} eindeutig lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix \underline{A} regulär ist. Ein homogenes Gleichungssystem $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ mit quadratischer Koeffizientenmatrix \underline{A} ist genau dann in nichttrivialer Weise lösbar, wenn die Matrix \underline{A} singulär ist, das heißt, wenn $\text{Det}\underline{A} = 0$ gilt.

Satz 20.22 Cramer'sche Regel

Liegt bei der inhomogenen Gleichung $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ der Regelfall vor, so sind die Zahlen

$$x_i = \frac{1}{\text{Det}A} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1i-1} & b_1 & A_{1i+1} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \dots & A_{2i-1} & b_2 & A_{2i+1} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{ni-1} & b_n & A_{ni+1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

die Koordinaten der Lösung \underline{x} .

Satz 20.23

Es sei $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ ein lineares homogenes Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix \underline{A} die Spaltenzahl n und den Rang $r < n$ habe. Dann ist der mit beliebigen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ gebildete Ausdruck $\underline{x}_h = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{x}_2 + \dots + \lambda_d \cdot \underline{x}_d$, $d = n - r$ die allgemeine Lösung der Gleichung $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0}$.

Satz 20.24

Die allgemeine Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ (mit nichtinjektiver Koeffizientenmatrix) hat die Gestalt

$\underline{x}_a = \underline{x}_p + \underline{x}_h = \underline{x}_p + \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{x}_2 + \dots + \lambda_d \cdot \underline{x}_d$, worin \underline{x}_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung und \underline{x}_h die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist.

Satz 21.1

Die Eigenwerte einer quadratischen Matrix sind die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms.

Satz 21.2

Eine Matrix ist genau dann regulär, wenn alle ihre Eigenwerte von Null verschieden sind.

Satz 21.3

Die zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren einer Matrix sind linear unabhängig.

Satz 21.4

Jede quadratische Matrix genügt ihrer charakteristischen Gleichung, das heißt, ist $p(\lambda)$ das charakteristische Polynom der Matrix \underline{A} , so gilt $p(\underline{A}) = \underline{0}$.

Satz 21.5

Die Eigenwerte einer hermiteschen (symmetrischen) Matrix sind reell.

Satz 21.6

Die Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix zu verschiedenen Eigenwerten sind stets orthogonal.

Satz 21.7

Zu jeder hermiteschen Matrix läßt sich eine orthonormale Basis von Eigenvektoren angeben.

Sind $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n$ die orthonormalen Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ der hermiteschen Matrix \underline{A} und ist \underline{T} die Matrix, die den Übergang vom Orthonormalsystem der Maßvektoren \underline{e}_k auf das Orthonormalsystem der Eigenvektoren \underline{e}'_k beschreibt, $T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{e}'_j$, so

$$\text{ist } \underline{T}^* \cdot \underline{A} \cdot \underline{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Bezogen auf das Orthonormalsystem der Eigenvektoren hat die hermitesche Matrix \underline{A} Diagonalgestalt; die Hauptdiagonalelemente sind die Eigenwerte von \underline{A} .

Satz 21.8

Jede quadratische Form $Q = \underline{x}^* \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}$ läßt sich durch Transformation auf das von den Eigenvektoren der Matrix \underline{A} bestimmte kartesische Koordinatensystem auf die "Diagonalform" umrechnen.

Satz 21.9

Eine quadratische Form $\underline{x}^* \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte der Matrix \underline{A} positiv sind; sie ist genau dann negativ definit, wenn alle Eigenwerte negativ sind. Eine positiv semidefinite Form liegt genau dann vor, wenn die Eigenwerte nicht negativ sind, also $\lambda_k \geq 0$ gilt, eine negativ semidefinite Form hingegen, wenn die Eigenwerte von \underline{A} nicht positiv sind, also den Ungleichungen $\lambda_k \leq 0$ genügen. Schließlich ist eine quadratische Form genau dann indefinit, wenn die Koeffizientenmatrix positive und negative Eigenwerte hat.

Satz 21.10

Die quadratische Form $\underline{x}^* \cdot \underline{A} \cdot \underline{x}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptabschnittsdeterminanten der Koeffizientenmatrix \underline{A} positiv sind, $D_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$; sie ist genau dann negativ definit, wenn die Hauptabschnittsdeterminanten der Koeffizientenmatrix \underline{A} alternierendes Vorzeichen haben, das heißt wenn gilt $(-1)^k \cdot D_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Satz 22.1 Satz von Schwarz

Sind die gemischten partiellen Ableitungen $f_{xy}(x, y)$ und $f_{yx}(x, y)$ der Funktion $z = f(x, y)$ in einem Bereich B stetige Funktionen, so gilt in B überall $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$.

Satz 23.1

Notwendig dafür, daß die Funktion $y = \underline{f}(\underline{x})$, $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, m$, an der Stelle \underline{x}_0 differenzierbar ist, ist die Existenz sämtlicher partieller Ableitungen der Koordinatenfunktion f_i an der Stelle \underline{x}_0 ; hinreichend für die Differenzierbarkeit an der Stelle \underline{x}_0 ist die Stetigkeit der partiellen Ableitung (als reelle Funktionen des Argumentes x) an der Stelle \underline{x}_0 .

Die Ableitung $\underline{f}'(\underline{x}_0)$ ist die $(m \times n)$ -Matrix

$$\underline{f}'(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

für die auch die Bezeichnung Funktionalmatrix gebräuchlich ist. Ihre Elemente sind die partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen an der Stelle \underline{x}_0 .

Satz 23.2

Es sei $F(x, y) = 0$ und (x_0, y_0) eine Anfangslösung dieser Gleichung. Sind dann die partiellen Ableitungen $F_x(x, y)$ und $F_y(x, y)$ der Funktion $F(x, y)$ in einer Umgebung der Stelle (x_0, y_0) stetig und gilt $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, so gibt es ein Intervall $a \leq x \leq b$ um den Punkt x_0 , auf dem durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ eine stetige Funktion $f(x)$ mit $y_0 = f(x_0)$ bestimmt ist, die $F(x, f(x)) = 0$ für $a \leq x \leq b$ erfüllt. Die Funktion $f(x)$ ist differenzierbar und ihre Ableitung $f'(x)$ genügt an jeder Stelle des Intervalls $[a, b]$ der Gleichung $F_x(x, y) + F_y(x, y) \cdot f'(x) = 0$, $a \leq x \leq b$.

Satz 23.3

Es sei $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$ und $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ eine Anfangslösung dieser Gleichung. Sind sämtliche partiellen Ableitungen $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ und $\frac{\partial F_i}{\partial y_k}$ der Funktion $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y})$ in einer Umgebung der Stelle $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ stetig und ist die Matrix $\underline{F}_y(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ regulär, so existiert ein n-dimensionales Intervall $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, um den Punkt \underline{x}_0 , auf dem durch die Gleichung $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$ eine stetige Funktion $\underline{f}(\underline{x})$ mit $\underline{y}_0 = \underline{f}(\underline{x}_0)$ eindeutig bestimmt ist, die $\underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) = \underline{0}$ für $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, erfüllt. Die Funktion $\underline{f}(\underline{x})$ ist differenzierbar und ihre Ableitung $\underline{f}'(\underline{x})$ genügt an jeder Stelle des Intervalls $a_i \leq x_i \leq b_i$ der Gleichung $\underline{F}_x(\underline{x}, \underline{y}) + \underline{F}_y(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{f}'(\underline{x}) = \underline{0}$.

Satz 23.4

Hat die Funktion $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ in einer Umgebung der Stelle \underline{x}_0 stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ und ist $\underline{f}'(\underline{x}_0)$ regulär, so gibt es in einer gewissen Umgebung der Stelle $\underline{y}_0 = \underline{f}(\underline{x}_0)$ genau eine Umkehrung $\underline{x} = \underline{g}(\underline{y})$ von $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$. Die Funktion $\underline{g}(\underline{y})$ ist in dieser Umgebung differenzierbar, ihre Ableitung lautet $\underline{g}'(\underline{y}) = \left(\underline{f}'(\underline{x})\right)^{-1}$, $\underline{x} = \underline{g}(\underline{y})$.

Satz 29.1 Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Es sei die Funktion $f(x, y)$ in einem Rechteck $|x - x_0| < a, |y - y_0| < b$ stetig und beschränkt. In diesem Rechteck genüge ferner $f(x, y)$ einer Lipschitzbedingung bezüglich der Variablen y , und zwar gleichmäßig in x , das heißt, es möge eine Konstante L existieren, so daß für beliebige Werte y' und y'' aus dem Intervall $]y_0 - b, y_0 + b[$ die Ungleichung $|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L \cdot |y' - y''|$ für jeden Wert von x aus dem Intervall $]x_0 - a, x_0 + a[$ gültig ist. Dann gibt es auf einem gewissen Intervall $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $\alpha < a$, genau eine Lösung der Anfangswertaufgabe.

Satz 30.1

Eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung besitzt stets n linear unabhängige Lösungen, je $n + 1$ Lösungen sind stets linear abhängig.

Definition 23.1

Die Funktion $y = \underline{f}(\underline{x})$ heißt an der Stelle \underline{x}_0 *differenzierbar*, wenn Funktionen

$\varepsilon_i(h_1, h_2, \dots, h_n)$, $i = 1, 2, \dots, m$, existieren, als Vektor $\varepsilon(\underline{h})$, für die $\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \varepsilon(\underline{h}) = \underline{0}$ gilt, und weiter

eine $(m \times n)$ -Matrix \underline{A} , so daß die Gleichung $\underline{f}(\underline{x}_0 + \underline{h}) = \underline{f}(\underline{x}_0) + \underline{A} \cdot \underline{h} + |\underline{h}| \cdot \varepsilon(\underline{h})$ für alle Vektoren \underline{h} erfüllt ist, für die auch der Punkt $\underline{x}_0 + \underline{h}$ im Definitionsbereich der Funktion

\underline{f} liegt. Die Matrix \underline{A} heißt die *Ableitung* der Funktion \underline{f} an der Stelle \underline{x}_0 , symbolisch

$\underline{f}'(\underline{x}_0) = \underline{A}$; der Ausdruck $\underline{f}(\underline{x}_0) + \underline{A} \cdot \underline{h} = \underline{f}(\underline{x}_0) + \underline{f}'(\underline{x}_0) \cdot \underline{h}$ wird der *lineare Anteil* der

Funktion \underline{f} an der Stelle \underline{x}_0 genannt, seine Änderung als lineare Funktion des

Argumentzuwachses $\underline{h} = \Delta \underline{x}$, $d\underline{y} = \underline{f}'(\underline{x}_0) \cdot \underline{h} = \underline{f}'(\underline{x}_0) \cdot \Delta \underline{x}$, heißt das *Differential* der Funktion \underline{f} an der Stelle \underline{x}_0 .