

mündliche Prüfung, Herr Langer

Mathematik 2

1. April 1998

Zur Vorbereitung des Rechenbeispiels hat man 30 Minuten Zeit. Man erhält ein Beispiel aus ca. 100.

Rechenbeispiel (Nr. 15):

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$-2x \sin x^2 + 8xy + (4x^2 + 2ye^{y^2})y' = 0$$

Es genügt, die Lösung in impliziter Form anzugeben

Fragen:

- symmetrische Matrix
- Hauptachsentransformation
 - EV normieren
 - Was bei 2 EV zu einem EW, Bedingung?
- autonomes System
 - Gleichgewicht
 - Stabilität
- Taylorreihe in 2 Veränderlichen

Langen

Prüfung aus Mathematik 2 für ET (WS 1996) am 13.12.1995

1. Man berechne ein Fundamentalsystem von Lösungen des Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned}y_1' &= 11y_1 + 7y_2 - 15y_3 \\y_2' &= 7y_1 + 11y_2 - 15y_3 \\y_3' &= -15y_1 - 15y_2 + 33y_3\end{aligned}$$

2. Zeige, daß die Funktion ($0 \leq y \leq 2$)

$$I(y) = \int_{y^2}^{2y} e^{x^2 y} dx$$

eine Lösung der Differentialgleichung:

$$I'(y) + \frac{1}{2y} I(y) = -\frac{5}{2} y e^{y^5} + 3 e^{4y^3}$$

ist.

3. Man bestimme alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

FET KS

Ist eine Transformation auf Diagonalform möglich? Wenn ja, bestimme man diese.

4. Eine Lieferung umfaßt 15 einwandfreie und 5 defekte Teile. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter 4 zufällig entnommenen Stücken mindestens ein fehlerhaftes?

1. Man berechne die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$



Wie lautet die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A^{-1} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -13 \\ 5 \end{pmatrix} ?$$

2. Eine Warenlieferung besteht aus 15 einwandfreien und 5 fehlerhaften Stücken. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter 4 zufällig entnommenen Stücken mindestens ein fehlerhaftes.

3. Berechne das Volumen des Körpers der entsteht wenn die Kurve bestehend aus den Stücken $y = \pm \frac{1}{x^2}$ (für $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 2$) und $x = 2$ (für $-\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{4}$) um die y -Achse rotiert.

4. (a) Man berechne die Ableitung des Integrales

$$I(y) = \int_y^{y^2} \cos(x^2 \ln y) \sin(xy) dx$$

nach dem Parameter y .

(b) Berechne die Bogenlänge des Zykloidenbogens mit der Parameterdarstellung

$$x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Handwritten notes at the bottom right of the page, including a vertical list of numbers (1, 2, 3, 4, 5) and some other scribbles.

Langer

13

Prüfung aus Mathematik 2 für ET (SS 1993) am 14.6.95

- ✓ 1. Man bestimme alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist eine Transformation auf Diagonalform möglich? Falls ja, so bestimme man diese.

- ✓ 2. In einer Urne liegen 50 Kugeln. 12 davon sind grün gefärbt, die restlichen rot. Wir ziehen aus dieser Urne 7 Kugeln (ohne sie zurückzulegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß 4 der 7 gezogenen Kugeln grün sind, wie groß, daß 4 der 7 gezogenen Kugeln rot sind.
- ✓ 3. Berechne die Oberfläche des Körpers, der entsteht, wenn die Hyperbel $x^2 - z^2 = 1$ um die z -Achse rotiert und $|z| \leq 1$ ist.
- ✓ 4. (a) Zeige, daß die Funktion ($y > 0$)

$$I(y) = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2y}}}^{\sqrt{\frac{3\pi}{2y}}} \cos(yx^2) dx$$

der Gleichung $I'(y) + \frac{1}{2y}I(y) = 0$ genügt.

- (b) Ist das Vektorfeld

$$\vec{V}(x, y, z) = (x + y, y + z, x^2 + y^2 + z^2)$$

ein Potentialfeld?

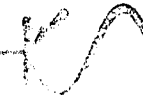
~~FET~~ K

~~FET~~ K

1. In einem Topf liegen N Zettel, die mit den Zahlen 1 bis N durchnummeriert sind. Es werden n Zettel (ohne zurücklegen) gezogen. Sei x die kleinste Zahl, die auf einem der gezogenen Zettel steht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß $x=k$ ist. ($k=1, \dots, N-n+1$)

2. a) ist das Vektorfeld:

$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} ye^{-xz} \\ e^x - \sin y \\ yxe^z \end{pmatrix}$$

~~FET~~ 

ein Potentialfeld? Wenn ja, dann berechne man dieses.

b) Berechne das Volumen der Parabel $y=x^2$, das mit der y -Achse eingeschlossen wird, im Bereich $1 \leq y \leq 3$.

3. a) Lösung des LGS:

$$\begin{pmatrix} 3 & 19 & -1 & 10 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

~~FET~~ 

b) Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Lösung der Differentialgleichung:

$$y'''(x) - y''(x) - y'(x) + y(x) = e^x + x$$

1. Berechne ein Fundamentalsystem von Lösungen aus dem folgenden Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1' &= 11y_1 + 7y_2 - 15y_3 \\ y_2' &= 7y_1 + 11y_2 - 15y_3 \\ y_3' &= -15y_1 - 15y_2 + 33y_3 \end{aligned}$$

2. Ableitung des Integrals:

$$I(y) = \int_{y^2}^{2y} e^{x^2 y} dx \quad \text{und zeige, daß} \quad I'(y) + \frac{1}{2y} I(y) = -\frac{5}{2} y e^{y^5} + 3e^{4y^3} \quad \text{ist.}$$

3. Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren, der folgenden Matrizen und bestimme, falls möglich deren Diagonalmatrix.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Eine Warenlieferung besteht aus 15 einwandfreien und 5 fehlerhaften Stücken. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei 4 zufällig entnommenen Teilen mindestens 1 Stück fehlerhaft ist?

Lösungen:

1. Lsg.:

$$y_1(x) = C_1 \cdot e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y_2(x) = C_2 \cdot e^{4x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y_3(x) = C_3 \cdot e^{48x} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

FET 

2.

$$I(y) = \int_{y^2}^{2y} 1 \cdot e^{x^2 y} dx = \left[x \cdot e^{x^2 y} - 2y \int_{y^2}^{2y} x^2 \cdot e^{x^2 y} dx \right]_{y^2}^{2y}$$

3.

FET 

Prüfung aus Mathematik 2 für ET (SS 1993) am 16.11.94

Man bestimme alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\
 -x_1 + x_3 &= 2 \\
 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3
 \end{aligned}$$

Weiters berechne man die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$


2. Berechne die Oberfläche des Körpers der entsteht, wenn die Parabel $y = x^2$ um die y -Achse rotiert und $y \leq 2$ ist.

Ein Kind spielt mit Buchstaben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es bei einer zufälligen Aneinanderreihung der Buchstaben A, E, I, M, N, R, S das Wort „SEMINAR“ erhält.

4. Ist das Vektorfeld

$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz - \frac{1}{x+y} \\ xz - \frac{1}{x+y} \\ xy + 1 \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld ? Falls ja, so berechne man sein Potential.

FET 

Mayls

✓ Eine Münze wird 10 mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß

- (a) genau 4 mal „Zahl“ erscheint,
- (b) mindestens 4 mal „Zahl“ erscheint,
- (c) höchstens 4 mal „Zahl“ erscheint.

✓ 2. Ist das Vektorfeld

$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y} \cos z \\ \frac{1}{x+y} \cos z \\ -\ln(x+y) \sin z \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld? Falls ja, so berechne man sein Potential.

3. Man bestimme alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$x_1 - x_2 + x_4 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 8$$

$$x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 3$$

$$-2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2$$

$$-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -5$$

~~FET~~ K

✓ 4. Man berechne die Ableitung des Integrales

$$I(y) = \int_y^{2y} e^{y^2 x} \cos x \, dx$$

nach dem Parameter y .

~~FET~~

- ✓ 1. Man berechne das Volumen des Körpers, der entsteht wenn man aus der Halbkugel

11.93

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

den Kegel

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z, 0 \leq z$$

ausschneidet.

- ✓ 2. Ist das Vektorfeld

$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 \sin(y^2 + z) - \frac{1}{x^2} \\ 2x^3 y \cos(y^2 + z) \\ x^3 \cos(y^2 + z) \end{pmatrix}.$$

ein Potentialfeld? Falls ja, so berechne man sein Potential.

- ✓ 3. Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$x_1 - 2x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$$

$$3x_1 + x_2 - 3x_3 = 11$$

✓ Weiters berechne die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

✓ [REDACTED] In einer Urne liegen 50 Kugeln. 12 davon sind grün gefärbt, die restlichen rot. Wir ziehen aus dieser Urne 7 Kugeln (ohne sie zurückzulegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß 4 der 7 gezogenen Kugeln grün sind, wie groß, daß 4 der 7 gezogenen Kugeln rot sind.

~~FET~~

Länger

Prüfung aus Mathematik 2 für ET (SS 1993) am 9.3.94

1. Zeige, daß die Funktion ($0 \leq y \leq 2$)

$$I(y) = \int_{y^2}^{2y} e^{x^2 y} dx$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$I'(y) + \frac{1}{2y} I(y) = -\frac{5}{2} y e^{y^5} + 3e^{4y^3}$$

ist.

2. Ist das Vektorfeld

$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos x \sin y \sin z + 3x^2 \\ \cos y \sin x \sin z + 2y \\ \cos z \sin x \sin y + 1 \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld? Falls ja, so berechne man sein Potential.

3. An einer Versammlung nehmen 40 Student(inn)en teil. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei von ihnen am gleichen Tag des Jahres Geburtstag?

(Ein Jahr habe 365 Tage und die Geburtstage seien gleichmäßig übers Jahr verteilt. Stirlingsche Formel: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$)

4. Man berechne alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$-12x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -8$$

$$9x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 13$$

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$15x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 12$$

~~FET~~ KS

~~FET~~ KS

~~rote Mappe~~
~~Original~~

Prüfung aus Mathematik 2 für ET (SS 1992/93) am 24.6.93

(LANGER) (2)

1. Eine Telefonzentrale versorgt 500 Teilnehmer. Die Wahrscheinlichkeit, daß einer der Teilnehmer im Verlauf einer Stunde in der Zentrale anruft sei $p = \frac{1}{100}$. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, daß während einer Stunde

- (a) genau 3 Teilnehmer
(b) mehr als 3 Teilnehmer

anrufen.

Hinweis: Poissonverteilung

2. Man bestimme alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\x_2 + 2x_3 &= 1 \\-2x_1 + x_2 + 12x_3 &= 3 \\3x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= 2\end{aligned}$$

3. Berechne die Bogenlänge, sowie den geometrischen Schwerpunkt des Zyklidenbogens mit der Parameterdarstellung

$$x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

4. (a) Ist das Vektorfeld

$$\vec{V}(x, y, z) = (x + y, y + z, x^2 + y^2 + \text{FET})$$

ein Potentialfeld?

- (b) Berechne die erste und zweite Ableitung des Integrals

$$I(y) = \int_y^1 \frac{1}{x} \sin(x - y) dx, \quad 0 < y < 1$$

nach dem Parameter y und bestätige $I''(y) + I(y) = \frac{1}{y}$.