Muster Prüfung   Mathematik 1 f. ET

Kennummer:	Familienname:
Matrikelnummer:	Vorname:

1:	Summe:
2:	
3:	Note:
4:	

Bitte keine zusätzlichen Blätter abgeben!
Diese würden beim Korrigieren nicht berücksichtigt werden.

Bemerkungen:

1) Bei jedem der vier Beispiele können 10 Punkte erreicht werden. Manche Beispiele setzen sich aus mehreren kurzen Aufgaben zusammmen, manche Beispiele bestehen aus einer längeren Aufgabe.

2) Die angegeben Aufgaben sollen einen Eindruck vom angestrebten Schwierigkeitsgrad der Prüfung geben.

3) **Unterlagen sind nicht erlaubt.**

4) **Taschenrechner mit einzeiligem Display (keine Graphik) sind erlaubt.**

5) Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden.

6) Berechnungen und Ergebnisse müssen nachvollziehbar sein. Besser zu viel als zuwenig hinschreiben.

1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + a) \ ,$$

die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$: den maximalen Definitionsbereich, das Monotonieverhalten und eventuelle Maxima oder Minima von f. Skizzieren Sie die für $a \in \mathbb{R}$ auftretenden verschiedenen Graphen von f, so daß die a-Abhängigkeit der Funktion qualitativ richtig dargestellt wird.

2. a) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{1+\ln n}$$

auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz.

b) Bestimmen Sie die Konstante c sodaß gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4.$$

3. a) Berechnen Sie mittels der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \to 0+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \ .$$

b) Berechnen Sie mittels Taylorentwicklung

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{e^{2x} - 1} \right)^2 \cdot \sqrt{2 + x^3} \ .$$

4. a)(5 Punkte) Untersuchen Sie die Konvergenz der Folgen

$$a_n = \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

b) (5 Punkte) Zeigen Sie

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

indem Sie das Cauchyprodukt der Taylorreihen der Exponentialfunktion berechnen.

5. a) (3 Punkte) Es sei

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x+3}{|x+3|}.$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f und untersuchen Sie f auf Stetigkeit und klassifizieren Sie die Unstetigkeitsstellen. Skizzieren Sie den Graph von f.

b) (2 Punkte) Entscheiden und begründen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist für differenzierbare Funktionen f, g, h gilt

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g' \cdot h + f' \cdot g \cdot h' + f \cdot g' \cdot h'$$

c) (2 Punkte) Berechnen Sie:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2(x-1)}$$

d) (3 Punkte) Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 3 von

$$f(x) = e^{sin 2x}$$

bei Entwicklung um die Stelle $x_0 = 0$.

6. Gegeben ist die Rekursion

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{2}{9}\,.$$

Man zeige, daß die Wahl $a_0 = 0$ auf eine konvergente Folge führt, und berechne deren Grenzwert. Weiters zeige man, daß mit der Wahl $a_0 = 1$ die Folge divergiert.

7. a) Leiten Sie für die rekursiv definierte Folge

$$a_{n+1} := \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{2}, \quad a_1 = 1$$

eine explizite Formel her, beweisen Sie die Formel mittels vollständiger Induktion und untersuchen Sie die Konvergenz der Folge.

b) Bestimmen Sie die Konstante c sodaß gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4.$$

8. a) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-\sqrt{n}}$$

auf Konvergenz.

b) Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x+\frac{1}{4}$.
Bestimmen Sie drei abgeschlossene Intervalle, von denen jedes genau eine Nullstelle von f enthält und deren Längen kleiner gleich 1 sind.
Welchen Wert muss die Konstante c haben, damit die Funktion $g(x)=f(x)+c$ genau zwei reelle Nullstellen hat?

9. a) Berechnen Sie:

$$\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{6x} - 2e^{3x} + 5}}\, dx$$

b) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+x}}\, dx$$

auf Konvergenz.

10. a) Man bestimme eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2\cos x}\,.$$

b) Untersuchen Sie die Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + 2\cos x} dx.$$