

Mathematik 1 f. ET (StPI 2000)

24. Jänner 2007

1. Man berechne eine Stammfunktion für

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{2 + \sin x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

2. Man löse die Gleichung

$$\tan z + ja = 0, \quad |a| \neq 1, a \in \mathbb{R}.$$

3. Welche grundlegende Eigenschaft besitzt eine reelle Funktion $f: D \rightarrow B$ einer reellen Veränderlichen, die in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist?

4. Wo ist eine reelle Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius r *gleichmäßig* konvergent? Wo ist sie gleichmäßig konvergent im Falle beständiger Konvergenz ($r = \infty$)?

Anworten:

1. $\int \frac{1 + \sin x}{2 + \sin x} dx = x - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C$ (Skriptum S. 124).

2. $z = \arctan(-ja) = \frac{1}{2j} \ln \frac{1+a}{1-a} = \frac{1}{2j} (\ln |\frac{1+a}{1-a}| + j \arg \frac{1+a}{1-a})$; $\arg \frac{1+a}{1-a} =$

$$\begin{cases} 2k\pi & \text{für } |a| < 1 \\ (2k+1)\pi & \text{für } |a| > 1 \end{cases} \Rightarrow z = \begin{cases} k\pi - j \ln \sqrt{|\frac{1+a}{1-a}|} & \text{für } |a| < 1, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2} + k\pi - j \ln \sqrt{|\frac{1+a}{1-a}|} & \text{für } |a| > 1, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. Sie läßt sich lokal linearisieren, d.h. es gilt $f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + h\varepsilon(h)$, worin $A \in \mathbb{R}$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

4. Auf jedem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b] \subset]-r, r[$. Im Falle beständiger Konvergenz ist sie auf jeder beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent.