Prüfung vom 22.4.2008
Mathematik 1 für Elektrotechnik
Prof. Szmolyan

1. a) *(7 Punkte)*
   Eine Folge a_n ist rekursiv definiert:

   $$a_{n+1} := b \cdot a_n + c \qquad a_0 \in \mathbb{R}$$

   i. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $b \neq 1$ gilt:

   $$a_n = b^n \cdot a_0 + \frac{c}{1-b} \cdot (1 - b^n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   ii. Bestimmen Sie eine explizite Formel für a_n, die im Fall $b = 1$ gilt.

   iii. Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge in Abhängigkeit von b, c und a_0.

   b) *(3 Punkte)*

   $$A := \{sin(\frac{\pi}{2} + \frac{n}{k}); n, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

   Bestimmen Sie $\inf A, \sup A, \min A, \max A$.

2. a) *(6 Punkte)*
   Bestimmen Sie die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

   $$z^5 - 2z^4 + (1+i)z - 2 - 2i = 0$$

   Bei komplexen Lösungen genügt es die Polardarstellung anzugeben.
   Hinweis: $z = 2$ ist eine Lösung.

   b) *(4 Punkte)*
   Berechnen Sie

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2 + 3^x)}{\ln(3 + 2^x)}$$

3. a) *(5 Punkte)*
   Berechnen Sie

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 + 2n}$$

   b) *(5 Punkte)*
   Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

   $$|ac + bd| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

4. Es sei

$$f(x) := e^{-x}x^3 \qquad x \in \mathbb{R}$$

a) *(6 Punkte)* Bestimmen Sie

- Nullstellen
- lokale und globale Maxima bzw. Minima
- Wendepunkte

Bestimmen Sie weiters maximale Intervalle in denen die Funktion:

- streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend
- konvex bzw. konkav ist.

Zeichnen Sie den Graph von $f(x)$

b) *(4 Punkte)*
Berechnen Sie

$$\int_0^\infty f(x)dx$$