
Teilbarkeit

Man nennt 1 und n die "trivialen" Teiler von n . Ein nicht-trivialer Teiler wird ein echter Teiler genannt. Zwei Zahlen heißen relativ prim oder teilerfremd, wenn sie – außer dem trivialen Teiler 1 – keinen gemeinsamen Teiler haben.

Eindeutige Primfaktorenzerlegung

Jede natürliche Zahl kann als (endliches) Produkt $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_j^{k_j}$ dargestellt werden, worin p_1, p_2, \dots Primzahlen sind, $k_1, k_2, \dots, k_j \in \mathbb{N}$ durch n bestimmte Exponenten. Diese Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren.

vollständige Induktion

$A(1)$ richtig (der Induktionsbeginn)
unter der Annahme, dass $A(n)$ richtig ist (die Induktionsvoraussetzung) ergibt sich die Richtigkeit von $A(n+1)$ (der Induktionsschluss).

Halbgruppe

Wenn auf einer Menge von Objekten eine assoziative binäre Operation gegeben ist ($zB: \mathbb{N}$ bezüglich Addition).

Gruppeneigenschaften von \mathbb{Z} bezüglich Addition

Folgende Forderungen müssen bei einer Gruppe (hier im Bsp. $(\mathbb{Z}, +)$) erfüllt sein:

- die Addition $+$ ist eine binäre Operation in \mathbb{Z}
- Addition ist assoziativ
- es gibt ein neutrales Element 0 ($a+0=0+a$ für jedes $a \in \mathbb{Z}$)
- Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ existiert ein inverses Element $-a$ (wobei $a+(-a)=(-a)+a=0$)

Ring

Eine Menge von Objekten mit zwei binären Operationen $+$ und \cdot , bezüglich $+$ eine kommutative Gruppe, bezüglich \cdot eine Halbgruppe und \cdot distributiv gegenüber $+$, heißt ein Ring.

Ring mit Einselement

Gibt es bezüglich \cdot ein neutrales Element, d.h. ein Element 1, für welches $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ gilt, so spricht man von einem Ring mit Einselement.

Integritätsbereich

Ein kommutativer Ring, in dem (bezüglich der Operation „mal“) die Kürzungsregel ($a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$, $a \neq 0$) gilt, heißt ein Integritätsbereich.

Schiefkörper

Sind auf einer Menge von Objekten zwei binäre Operationen $+$ und \cdot gegeben, und ist \cdot distributiv gegenüber $+$, so spricht man von einem Schiefkörper, wenn

- die Objekte mit $+$ allein eine kommutative Gruppe bilden
- die Objekte (ohne das neutrale Element 0 bezüglich $+$) mit \cdot allein eine Gruppe bilden.

Körper

Ein Schiefkörper, wo aber \cdot auch kommutativ ist.

Was ist eine Halbordnung?

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt eine Halbordnung in der Menge A , wenn sie reflexiv ($\forall a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$), antisymmetrisch ($(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$) und transitiv ($(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$) ist.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge. Was versteht man unter $\sup M$ und $\max M$? Wie lässt sich $\sup M$ und $\max M$ über die Elemente der Menge beschreiben?

$\sup M$ ist die kleinste obere Schranke der Menge M , d.h. $\sup M$ ist obere Schranke ($\forall x \in M \Rightarrow x \leq \sup M$) und jede Verkleinerung von $\sup M$ ist keine obere Schranke ($\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x_\varepsilon \in M$ mit $x_\varepsilon > \sup M - \varepsilon$). Ist $\sup M \in M$, so ist $\sup M$ das größte Element in M , symbolisch $\max M = \sup M$.

Sei $A = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ der Grenzwert der Funktion $f : D \rightarrow B$ ($D \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$) für $x \rightarrow c$. Welche Information gibt die

Zahl A?

Strebt die unabhängige Variable x stetig gegen c , so strebt die abhängige Variable y ($y = f(x)$) stetig gegen A.

Man formuliere die wichtigsten Sätze über Funktionen, die auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall definiert und daselbst stetig sind.

=> **Satz über das Vorzeichen einer stetigen Funktion (S.59)**

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 und $f(x_0) \neq 0$, so hat $f(x)$ in einer gewissen Umgebung von x_0 dasselbe Vorzeichen wie $f(x_0)$.

=> **Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion**

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ streng monoton und in $x_0 \in I$ stetig, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ im Punkt $y_0 = f(x_0)$ stetig.

=> **Allgemeiner Zwischenwertsatz (S.63)**

Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und ist die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf I stetig, so ist $J = f(I)$ ein Intervall.

=> **spezieller Zwischenwertsatz**

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und gilt $f(a)f(b) < 0$, so existiert eine Stelle $\xi \in]a, b[$ mit $f(\xi) = 0$.

=> **Satz von Weierstraß**

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, so existiert das Minimum und das Maximum.

Produktregel nach Leibnitz:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

Was versteht man unter "Die Funktion $f(x)$ strebt von der Ordnung n bzw. von höherer als n -ter Ordnung gegen 0 (für $x \rightarrow 0$)?"

Ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} \neq 0$, so strebt $f(x)$ von der Ordnung n gegen 0 (für $x \rightarrow 0$), ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$, so sagt man, $f(x)$ strebt von höherer als n -ter Ordnung gegen 0 (für $x \rightarrow 0$).

Was versteht man unter dem Differential der reellen Funktion $f : D \rightarrow B$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) an einer Stelle $x_0 \in D$? Was ist das Differential der unabhängigen Veränderlichen?

Das Differential $dy = f'(x_0) \cdot h$ (der Funktion f an der Stelle x_0) ist die Änderung des linearen Anteils $f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$ der Funktion $y=f(x)$ an der Stelle x_0 als lineare Funktion des Argumentenzuwachses h .

Das Differential der unabhängigen Veränderlichen x ist das Differential der identischen Funktion: $dx = 1 \cdot h = h$.

Man erläutere den Begriff der Differenzierbarkeit einer reellen Funktion einer reellen Veränderlichen $f(x)$.

Differenzierbarkeit bedeutet "lokal linear approximierbar": Die Funktion f heißt an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn sich f durch eine lineare Funktion derart annähern lässt, dass der Fehler für $x \rightarrow x_0$ von höherer als erster

Ordnung gegen Null strebt: $f(x_0 + h) = f(x_0) + a \cdot h + h \cdot \varepsilon(h)$, wobei $a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Welche grundlegende Eigenschaft besitzt eine reelle Funktion $f : D \rightarrow B$ einer reellen Veränderlichen, die in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist?

Sie lässt sich lokal linearisieren, d.h. es gilt $f(x_0 + h) = f(x_0) + A \cdot h + h \cdot \varepsilon(h)$, worin $A \in \mathbb{R}$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

Was besagt (für eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$) stetig auf einem Intervall $I \subseteq D$, Lipschitz stetig auf I und differenzierbar in $x_0 \in I$?

Die Funktion f ist stetig auf I , wenn für alle $x \in I \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, f heißt Lipschitz stetig auf I , wenn der

Differenzenquotient $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ auf I beschränkt ist: $\left| \frac{\Delta f}{\Delta x} \right| < L$ für alle $x, x_0 \in I$;

f heißt differenzierbar in x_0 , wenn eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ existiert und eine Funktion $\varepsilon(h)$ mit $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$, sodass $f(x_0 + h) = f(x_0) + A \cdot h + h \cdot \varepsilon(h)$ gilt.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf $]a, b[$, so gibt es eine Stelle $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sind die Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf $]a, b[$ und ist $g(a) \neq g(b)$,

$g'(x) \neq 0$ für $x \in]a, b[$, so gibt es eine Stelle $\xi \in]a, b[$ mit $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, so gibt es eine Stelle $\xi \in]a, b[$ mit $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$

Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung

Es seien die Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$. Wechselt die Funktion g ihr Vorzeichen auf

$[a, b]$ nicht, so gibt es eine Stelle $\xi \in]a, b[$ mit $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$

Zusammenhang zwischen Mittelwertsätze der Differentialrechnung und Integralrechnung

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung für eine Stammfunktion des Integranden: $(b - a)f(\xi) = (b - a)F'(\xi) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$ (wobei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$)

Satz von Bolzano

Jede beschränkte (reelle oder komplexe) Folge besitzt mindestens einen Häufungswert.

Man formuliere Kriterien zur Konvergenz reeller Zahlenfolgen.**=> Cauchy-Kriterium (S.51)**

Die Folge (x_n) ist genau dann konvergent, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine (i.a. von ε) abhängige Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \wedge n, m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

=> Verträglichkeit der Grenzwertbildung mit den 4 Grundrechnungsarten

Seien (x_n) und (y_n) konvergente Folgen. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}, \quad y_n \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^r = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^r, \quad r \in \mathbb{Q}, \quad \begin{cases} x_n \geq 0 & \text{für } r \geq 0 \\ x_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0 & \text{für } r < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right|$$

=> Vergleichskriterium (S.54)

Es seien (a_n) , (b_n) und (x_n) drei Folgen, wobei $a_n \leq x_n \leq b_n$ (zumindest für $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$) gelten möge. Sind die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent mit dem selben Grenzwert c : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$, so ist auch die Folge (x_n) konvergent mit dem Grenzwert c , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

=> Hauptsatz über monotone Folgen

Eine monotone Folge (wachsend oder fallend) ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Was versteht man unter gleichmäßiger Konvergenz einer Folge $(f_n(x))$ ($f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf I) auf dem Intervall I ? Welche Eigenschaften kommen der Grenzfunktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zu?

Die Folge $(f_n(x))$ ist auf I gleichmäßig konvergent gegen die Grenzfunktion $f(x)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index n_0 existiert, sodass $n \geq n_0 \Rightarrow \max_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Die Grenzfunktion f ist auf I stetig!

Was versteht man unter der Konvergenz einer (reellen bzw. komplexen) Folge (z_n) .

Eine (reelle oder komplexe) Folge (z_n) heißt konvergent, wenn sie genau einen Häufungswert (in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C}) besitzt und dieser eigentlich ist. Dabei heißt eine (reelle od. komplexe) Zahl c ($c \in \mathbb{R}$ bzw. \mathbb{C}) Häufungswert der Folge (z_n) , wenn in jeder Umgebung von c unendlich viele Glieder der Folge (z_n) liegen, d.h. für jede Zahl $\varepsilon > 0$ existiert eine unendliche Teilmenge $N \subseteq \mathbb{N}$, sodass $n \in N \Rightarrow |z_n - c| < \varepsilon$. Dies bedeutet, dass sich die Glieder einer konvergenten Folge um genau eine Stelle c häufen.

Was versteht man unter der oberen Häufungsgrenze (Limes superior) einer nach oben beschränkten reellen Zahlenfolge (x_n) ?

Sei (x_n) eine reelle Zahlenfolge, H die Menge ihrer (eigentlichen und uneigentlichen Häufungswerte), dann heißt $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup H$ die obere Häufungsgrenze der Folge (x_n) .

Die obere Häufungsgrenze $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ (mit $a \in \mathbb{R}$) ist der größte Häufungswert, rechts von $a + \varepsilon$ (mit $\varepsilon > 0$) liegen höchstens endlich viele Glieder der Folge, in jeder ε -Umgebung von a liegen unendlich viele Glieder der Folge: $x_n < a + \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, bzw. $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Was versteht man unter der unteren Häufungsgrenze (Limes inferior) einer reellen Zahlenfolge (x_n) ?

Sei (x_n) eine reelle Zahlenfolge, H die Menge ihrer (eigentlichen und uneigentlichen Häufungswerte), dann heißt $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf H$ die untere Häufungsgrenze der Folge (x_n) .

Die untere Häufungsgrenze $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ (mit $a \in \mathbb{R}$) ist der kleinste Häufungswert, links von $a - \varepsilon$ (mit $\varepsilon > 0$) liegen höchstens endlich viele Glieder der Folge, in jeder ε -Umgebung von a liegen unendlich viele Glieder der Folge: $a - \varepsilon < x_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, bzw. $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Kann man mit unendlichen Reihen arithmetisch operieren wie mit endlichen Summen? Antwort begründen.

I.a. nicht, denn das kommutative Gesetz gilt für unendliche Summenbildungen nicht. Im Falle absoluter Konvergenz jedoch lassen sich unendliche Reihen weitgehend wie endliche Summen behandeln.

Wo ist eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ mit positivem Konvergenzradius r gleichmäßig konvergent? Was besagt

die gleichmäßige Konvergenz einer Potenzreihe mit der Summenfunktion $s(x)$? Wo ist sie gleichmäßig konvergent im Falle beständiger Konvergenz ($r = \infty$)?

gleichmäßig konvergent: Auf jedem endlichen und abgeschlossenem Intervall I , das im offenen Konvergenzintervall enthalten ist: $I = [a, b] \subseteq]-r, r[$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\sup_{x \in I} \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n \right| < \varepsilon$.

Im Falle beständiger Konvergenz ist sie auf jeder beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent.

Worin besteht der Unterschied zwischen "punktweiser" und "gleichmäßiger" Konvergenz einer Funktionenreihe $\sum f_n(x)$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$?

Ist die Reihe $\sum f_n(x)$ (mit den Partialsummen $s_n(x)$) auf $I \subseteq \mathbb{R}$ punktweise konvergent (mit der Summenfunktion $s(x) = \sum f_n(x)$), so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, die von ε , aber i.a. auch von $x \in I$ abhängt, sodass $n > n_0(\varepsilon, x) \Rightarrow \sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$;

ist hingegen die Reihe $\sum f_n(x)$ auf I gleichmäßig konvergent, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine (nur) von ε abhängige Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in I$ Gültigkeit hat.

Bedeutung gleichmäßiger Konvergenz

Die Operationen $\lim_{x \rightarrow x_0}$, $\frac{d}{dx}$ und \int_a^x dürfen mit der Summation $\sum_{n=1}^{\infty}$ vertauscht werden.

Fixpunktsatz nach Banach

Es sei die Funktion $\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ Lipschitz stetig mit der Lipschitzkonstanten L ($L > 0$, mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$). Bildet die Funktion Φ das Intervall $[a, b]$ auf sich selbst ab:

$\Phi([a, b]) \subseteq [a, b]$ und gilt $L < 1$, so hat Φ auf $[a, b]$ genau einen Fixpunkt ξ . Für $x_0 \in [a, b]$ konvergiert die Näherungsfolge (x_n) , $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, gegen diesen Fixpunkt. Es gilt weiters:

$$\text{a-priori-Abschätzung: } |x_n - \xi| \leq L^n (b - a)$$

$$\text{a-posteriori-Abschätzung: } |x_{n+k} - \xi| \leq \frac{L^{k+1}}{1-L} (x_n - x_{n-1})$$

Lagrange Interpolation

Sind $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ die Stützpunkte mit $f(x_j) = y_j$, so interpoliert das Polynom $p(x) = \sum_{j=0}^n y_j \cdot p_j(x)$ die Funktion f ,

$$\text{wobei } p_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$