Mathematatik 1 f. ET

(StPl 2000)

22. Oktober 2003

1. Man berechne den Hauptteil der rationalen Funktion

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z}{z^6 - z^5 - z^4 + z^3 + z - 1}$$

zur Nullstelle $z_o = 1$ des Nenners.

2. Man berechne

$$I_n = \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2} dx\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

3. Sei $s(x) = \sum f_n(x)$ eine auf dem Intervall I konvergente Funktionenreihe. Was versteht man unter „gleichmäßiger" Konvergenz dieser Reihe auf dem Intervall I ?

4. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge. Was versteht man unter $\sup M$ und $\max M$? Wie läßt sich $\sup M$ und $\max M$ über die Elemente der Menge beschreiben?

Anworten:

1. Wegen $q'(1) = 1$ ist $z_o = 1$ einfache Nullstelle $\Rightarrow$ $H(z,1) = \frac{p(1)}{q'(1)} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1}$.

2. Partielle Integration: $I_n = -\frac{1}{2} x^{2n} e^{-x^2}\Big|_0^\infty + n \int_0^\infty x^{2n-1} e^{-x^2} dx = n I_{n-1} \Rightarrow$ $I_n = n! I_0 = n! \int_0^\infty x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} n! e^{-x^2}\Big|_0^\infty = \frac{n!}{2}$.

3. Sind $s_n(x)$ die Partialsummen der Reihe $\sum f_n(x)$, so heißt die Reihe gleichmäßig konvergent auf I, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $n_o \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß $n > n_o \;\Rightarrow\; \sup\limits_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$.

4. $\sup M$ ist die kleinste obere Schranke der Menge M. $\sup M$ ist obere Schranke, also: $\forall x \in M \;\Rightarrow\; x \leq \sup M$, $\sup M$ ist kleinste obere Schranke, also: $\forall \varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; \exists x_\varepsilon \in M$ mit $\sup M - \varepsilon < x_\varepsilon$. Ist $\sup M \in M$, so ist $\sup M$ das größte Element in M, symbolisch $\max M = \sup M$.