

Sätze und Definitionen

Mathematik I

Quelle: Skriptum aus Mathematik 1 f. ET – Hans Jörg Dirschmid

Ausbearbeitet: Walzl Michael

Inhaltsverzeichnis:

1	Zahlen, Mengen und Abbildungen	4
1.1	Die natürlichen Zahlen.....	4
1.2	Die ganzen Zahlen	5
1.3	Die rationalen Zahlen	6
1.4	Die reellen Zahlen.....	6
1.5	Mengen.....	7
1.6	Relationen.....	9
1.7	Abbildungen und Funktionen	10
1.8	Die euklidische Ebene	10
1.9	Die komplexen Zahlen.....	11
1.10	Polynome und rationale Funktionen.....	12
2	Grenzwert und Stetigkeit. Elementare Funktionen.....	14
2.1	Funktionen reeller Veränderlicher	14
2.2	Zahlenfolgen	14
2.3	Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen	18
2.4	Die elementaren Funktionen.....	20
3	Differentialrechnung	24
3.1	Die Ableitung	24
3.2	Differentiationsregeln.....	24
3.3	Differentiation der elementaren Funktionen	26
3.4	Differential und Differentialquotient.....	26
3.5	Der Mittelwertsatz.....	27
3.6	Höhere Ableitungen	27
3.7	Die Taylorsche Formel.....	28
3.8	Relative Extremwerte	28
3.9	Unbestimmte Formen.....	29
3.10	Kurvenuntersuchungen	29
3.11	Numerische Gleichungslösung	30
3.12	Polynominterpolation	30

4	Integralrechnung	32
4.1	Das bestimmte Integral.....	32
4.2	Die Mittelwertsätze	33
4.3	Integrale mit variablen Grenzen. Stammfunktionen	33
4.4	Das unbestimmte Integral.....	34
4.5	Der Fundamentalsatz.....	34
4.6	Das Integral komplexer Funktionen.....	34
4.7	Methoden der unbestimmten Integration	35
4.8	Numerische Integration.....	37
4.9	Erweiterung des Integrals	39
4.10	Bogenlänge, Krümmung und Rotationskörper	41
5	Unendliche Reihen	42
5.1	Reihen mit konstanten Gliedern	42
5.2	Konvergenzkriterien.....	42
5.3	Das kommutative Gesetz. Bedingte und absolute Konvergenz	43
5.4	Kriterien für absolute Konvergenz.....	44
5.5	Das distributive Gesetz.....	45
5.6	Reihen mit komplexen Gliedern	45
5.7	Funktionenreihen	46
5.8	Potenzreihen.....	47
5.9	Taylorsche Reihen.....	49
5.10	Integration durch Reihenentwicklung	49

1 Zahlen, Mengen und Abbildungen

1.1 Die natürlichen Zahlen

assoziativ Gesetz. $n + (m + p) = (n + m) + p, n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p$

kommutativ Gesetz. $n + m = m + n, n \cdot m = m \cdot n$

distributiv Gesetz. $p \cdot (n + m) = p \cdot n + p \cdot m$

Halbgruppe. Ist auf eine Menge von Objekten eine assoziative binäre Operation gegeben, so spricht man von einer Halbgruppe.

Teilbarkeit. Man nennt 1 und n die „trivialen“ Teiler von n . Ein nicht – trivialer Teiler wird ein echter Teiler genannt.

Zwei Zahlen heißen relativ prim oder teilerfremd, wenn sie - außer dem trivialen Teiler 1 – keinen gemeinsamen Teiler haben.

Satz (Eindeutige Primfaktorenzerlegung). Jede natürliche Zahl n kann als (endliches) Produkt

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_l^{k_l}$$

dargestellt werden, worin p_1, p_2, \dots Primzahlen sind, $k_1, k_2, \dots, k_l \in \mathbb{N}$ durch n bestimmte Exponenten. Diese Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren.

vollständige Induktion.

- I. $A(1)$ richtig (der Induktionsbeginn)
- II. unter der Annahme, daß $A(n)$ richtig ist (die Induktionsvoraussetzung) ergibt sich die Richtigkeit von $A(n+1)$ (der Induktionsschluß)

1.2 Die ganzen Zahlen

Gruppe. Eine Menge von Objekten mit einer binären Operation für die jene vier Forderungen erfüllt sind:

- I. Die Addition $+$ ist eine binäre Operation
- II. Die Addition $+$ ist assoziativ
- III. Es gibt ein „neutrales“ Element Null, neutral im Sinne von $a + 0 = 0 + a = a$ für jede Zahl a
- IV. Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ gibt es ein „inverses“ Element $-a$, invers im dem Sinne, dass $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ist,

heißt allgemein eine Gruppe.

Teilbarkeit. Zwei Zahlen sind relativ prim, wenn 1 und -1 ihre einzigen gemeinsame Teiler sind.

Ring. Eine Menge von Objekten mit zwei binären Operationen „plus“ und „mal“, bezüglich „plus“ eine kommutative Gruppe, bezüglich „mal“ eine Halbgruppe und „mal“ distributiv gegenüber „plus“, heißt ein Ring.

kommutativer Ring. Ist mal in einem Ring kommutativ, so spricht man von einem kommutativen Ring.

Ring mit Einselement. Gibt es bezüglich der Multiplikation ein neutrales Element, d.h. ein Element 1, für welches $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ gilt, so spricht man von einem Ring mit Einselement.

Integritätsbereich. Ein kommutativer Rind, in dem (bezüglich der Operation „mal“) die Kürzungsregel gilt, heißt ein Integritätsbereich.

1.3 Die rationalen Zahlen

Schiefkörper. Sind auf eine Menge von Objekten zwei binäre Operationen plus und mal gegeben, und ist mal distributiv gegenüber plus, so spricht man von einem Schiefkörper, wenn:

- I. die Objekte bilden mit plus allein eine kommutative Gruppe
- II. die Objekte(ohne das neutrale Element 0 bezüglich plus) mit mal allein eine Gruppe bilden.

Körper. Schiefkörper und mal ist kommutativ.

1.4 Die reellen Zahlen

Definition. Jedem unendlichen Dezimalbruch entspricht ein Punkt auf der Zahlengeraden und umgekehrt.

Definition. Jeder unendliche Dezimalbruch heißt eine reelle Zahl.

Satz (Existenz der n – ten Wurzel). Zu jeder reellen Zahl $a > 0$ und zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau eine positive reelle Zahl, welche die Gleichung $x^n = a$ löst.

Axiom des Archimedes. Zu je zwei reellen Zahlen $x > 0$ und $y > 0$ gibt es stets eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit

$$nx > y.$$

Fakultät und Binomialkoeffizient.
$$\binom{x}{n} := \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!}$$

$$\binom{x}{0} := 1$$

$$\binom{x}{n} + \binom{x}{n+1} = \binom{x+1}{n+1}$$

$$(x+y)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} x^n y^{m-n}$$

1.5 Mengen

Definition. Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen.

Definition. Sind A und B zwei Mengen, so heißt A eine Teilmenge oder Untermenge von B und B eine Obermenge von A , wenn jedes Element von A auch Element von B ist, symbolisch $A \subseteq B$ oder $B \supseteq A$.

Definition. Es seien A und B zwei Mengen. Dann heißt die Menge

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \quad \text{die Vereinigung von } A \text{ und } B,$$

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \quad \text{der Durchschnitt von } A \text{ und } B,$$

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \quad \text{die Differenz von } A \text{ und } B.$$

Die Differenz bezüglich einer Grundmenge X für A ($A \subseteq X$) heißt das Komplement von A in X ,

$$C_X A = X \setminus A.$$

Definition. Sind A und B zwei nicht – leere Mengen, so heißt die Menge aller geordneten Paare (a,b) mit $a \in A$ und $b \in B$ das kartesische Produkt von A und B , symbolisch

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Definition. Sind A_1, A_2, \dots, A_n beliebige nicht – leere Mengen, so versteht man unter dem kartesischen Produkt dieser Mengen

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

die Menge aller geordneten n - Tupel von Elementen aus allen „Faktoren“ A_i .

Definition. Eine nicht – leere Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ gibt, sodaß

$$\forall x \in M \Rightarrow x \leq b.$$

Jede solche Zahl b heißt eine obere Schranke für M . Die Menge M heißt nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodaß

$$\forall x \in M \Rightarrow x \geq a.$$

Jede solche Zahl heißt eine untere Schranke für M . Die Menge M heißt beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, wenn also zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\forall x \in M \Rightarrow a \leq x \leq b.$$

Ist eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht beschränkt, so heißt sie unbeschränkt.

Satz (Existenz des Infimums und des Supremums). Ist eine nicht – leere Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so existiert $\sup M$, ist M nach unten beschränkt, so existiert $\inf M$.

Satz. Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt, so ist

$$M \cap]\sup M - \varepsilon, \sup M + \varepsilon[\neq \emptyset \text{ bzw. } M \cap]\inf M - \varepsilon, \inf M + \varepsilon[\neq \emptyset$$

und

$$CM \cap]\sup M - \varepsilon, \sup M + \varepsilon[\neq \emptyset \text{ bzw. } CM \cap]\inf M - \varepsilon, \inf M + \varepsilon[\neq \emptyset$$

für jede Zahl $\varepsilon > 0$.

Definition. Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und $\sup M \in M$, so heißt $\sup M$ das Maximum von M , symbolisch $\max M$. Ist M nach unten beschränkt und $\inf M \in M$, so heißt $\inf M$ das Minimum von M , symbolisch $\min M$.

1.6 Relationen

Definition. Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge. Dann heißt eine nicht – leere Teilmenge $R \subseteq A \times A$ eine binäre (zweistellige) Relation. Ist $(a, b) \in R$, so sagt man, $a \in A$ steht in Relation zu $b \in A$, symbolisch aRb .

Definition. Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt

- | | | |
|------|------------------|---|
| I. | reflexiv: | $\forall a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$ |
| II. | symmetrisch: | $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ |
| III. | antisymmetrisch: | $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$ |
| IV. | transitiv: | $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ |
-

Definition. Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt eine Halbordnung.

Definition. Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt eine Äquivalenzrelation.

Äquivalenzklasse: Ist $a \in A$ so können alle Elemente $x \in A$ mit $x \sim a$ zu einer Menge zusammengefasst werden: $[a] = \{x \mid x \sim a\}$. Eine solche Menge heißt eine Äquivalenzklasse (bezüglich R) und a ein Vertreter.

1.7 Abbildungen und Funktionen

Definition. Es seien D und B zwei nicht – leere Mengen. Dann heißt eine Vorschrift f , die jedem Element $x \in D$ ein wohlbestimmtes Element $y \in B$ zuordnet, eine Abbildung von D in B . Ist B eine Zahlenmenge, so spricht man auch von einer Funktion auf D .

Definition. Es seien D und B zwei nicht – leere Mengen. Dann heißt eine Teilmenge $F \subseteq D \times B$ eine Abbildung von D in B , wenn

- $\forall x \in D \Rightarrow \exists y \in B \wedge (x, y) \in F$ (jedem $x \in D$ wird wenigstens ein $y \in B$ zugeordnet),
 - $(x, y') \in F \wedge (x, y'') \in F \Rightarrow y' = y''$ (einem Element $x \in D$ wird höchstens ein Element $y \in B$ zugeordnet).
-

Definition. Eine Abbildung $f : D \rightarrow B$ heißt

- surjektiv $\Leftrightarrow f(D) = B$
 - injektiv $\Leftrightarrow f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x''$ oder logisch äquivalent $x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')$ (wenn ungleiche Argumente ungleiche Bilder haben)
 - bijektiv, wenn sie sowohl surjektiv als auch injektiv ist.
-

Satz (Existenz der Umkehrbildung). Die Abbildung $f : D \rightarrow B$ ist genau dann durch $f^{-1} : B \rightarrow D$ umkehrbar, wenn sie bijektiv ist.

1.8 Die euklidische Ebene

trigonometrische Funktionen.

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

$$|\cos \varphi| \leq 1, |\sin \varphi| \leq 1,$$

$$\tan \varphi := \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \cot \varphi := \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$

Additionstheoreme 1. Art.

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

Verdopplungsformeln.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Additionstheoreme 2. Art.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

zusätzliche Gleichungen.

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

1.9 Die komplexen Zahlen

Konjugium. $\bar{z} = \overline{\Re z + j\Im z} := \Re z - j\Im z$

Argument einer komplexen Zahl. $\arg z = \arctan \frac{\Im z}{\Re z}$

Polardarstellung. $z = |z| (\cos \varphi + j \sin \varphi)$

Potenzen. $z^n = |z|^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi)$

Moivresche Formel. $(\cos \varphi + j \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + j \sin n\varphi)$

1.10 Polynome und rationale Funktionen

Fundamentalsatz der Algebra. Jedes nicht – konstante komplexe Polynom hat im Körper \mathbb{C} wenigstens eine Wurzel.

Satz. Jedes komplexe Polynom $p(z)$ kann in der Form

$$p(z) = a_0 (z - z_1)^{v_1} (z - z_2)^{v_2} \dots (z - z_s)^{v_s}$$

dargestellt werden; die Summe der Vielfachheiten der Wurzel ist der Grad des Polynoms.

Satz (Partialbruchzerlegung). Eine echt gebrochene rationale Funktion ist die Summe aller Hauptteile der Wurzeln ihres Nenners,

$$\frac{p(z)}{q(z)} = H(z, z_1) + H(z, z_2) + \dots + H(z, z_s).$$

Horner Schema. $p(\zeta) = a_n + \zeta b_{n-1}$

	a_0	a_1	a_2	...	a_n
ζ	$+ \zeta b_0$	$+ \zeta b_1$...	$+ \zeta b_{n-1}$	
	b_0	b_1	b_2	...	b_n

2 Grenzwert und Stetigkeit. Elementare Funktionen

2.1 Funktionen reeller Veränderlicher

Definition (Periodische Funktionen). Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt periodisch, wenn eine positive Zahl T existiert, sodaß

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x+T) = f(x).$$

Die kleinste solche Zahl T wird die Periode von f genannt.

Definition (Monotone Funktionen). Eine reelle Funktion f einer reellen Veränderlichen heißt

- monoton wachsend, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
 - monoton fallend, wenn $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;
 - streng monoton wachsend, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
 - streng monoton fallend, wenn $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
-

Satz. Ist $f : D \rightarrow B$ streng monoton, so ist f injektiv.

Satz (Existenz der Umkehrfunktion). Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, so ist f genau dann umkehrbar durch eine Funktion $g : W(f) \rightarrow I$, wenn f auf I streng monoton ist. Die Umkehrfunktion g ist streng monoton im gleichen Sinn wie f .

2.2 Zahlenfolgen

Definition. Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. \mathbb{C}) heißt eine reelle (bzw. komplexe) Zahlenfolge.

Definition. Eine (reelle oder komplexe) Zahlenfolge (x_n) heißt beschränkt, wenn

$$\exists c \in \mathbb{R} \wedge \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| \leq c.$$

Definition. Eine reelle Zahlenfolge (x_n) heißt

- monoton wachsend, wenn $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \leq x_{n+1}$, *symbolisch* $(x_n) \uparrow; \#$
- monoton fallend, wenn $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \geq x_{n+1}$, *symbolisch* $(x_n) \downarrow$;
- streng monoton wachsend, wenn $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n < x_{n+1}$;
- streng monoton fallend, wenn $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n > x_{n+1}$;

Definition. Eine Zahl $c \in \mathbb{R} (\in \mathbb{C})$ heißt ein Häufungswert der reellen (komplexen) Zahlenfolge (x_n) , wenn in jeder Umgebung von c unendlich viele Glieder der Folge liegen.

Satz von Bolzano. Jede beschränkte (reelle oder komplexe) Zahlenfolge hat mindestens einen Häufungswert.

Satz. Jede (reelle oder komplexe) Zahlenfolge besitzt mindestens einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Häufungswert.

Definition. Eine (reelle oder komplexe) Zahlenfolge (x_n) heißt konvergent, wenn sie nur einen einzigen Häufungswert $c (c \in \mathbb{R} \text{ oder } c \in \mathbb{C})$ besitzt, und zwar einen eigentlichen. Wir schreiben hierfür

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$$

und nennen diesen Häufungswert den Grenzwert der Folge (x_n) ; ist dabei $c = 0$ so heißt (x_n) eine Nullfolge. Ist eine (reelle oder komplexe) Zahlenfolge nicht konvergent, so heißt sie divergent.

Definition. Ist (x_n) eine divergente reelle Folge und ist ∞ bzw. $-\infty$ ihr einziger Häufungswert, so heißt sie bestimmt divergent gegen ∞ bzw. $-\infty$, symbolisch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \text{ bzw. } = -\infty.$$

Ist eine Zahlenfolge nicht bestimmt divergent, so heißt sie unbestimmt divergent.

Für eine komplexe Zahlenfolge gibt es nur ∞ als einzigen uneigentlichen Häufungswert.

Satz. Eine (reelle oder komplexe) Zahlenfolge (x_n) ist genau dann konvergent mit dem Grenzwert c , wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine (i.a. von ε abhängige Zahl) $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß

$$\forall n \in \mathbb{N} \wedge n > n_0 \Rightarrow |x_n - c| < \varepsilon.$$

Eine reelle Zahlenfolge ist genau dann bestimmt divergent gegen ∞ bzw. $-\infty$, wenn es zu jeder Zahl $L \in \mathbb{R}$ (i.a. von L abhängige) Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß,

$$\forall n \in \mathbb{N} \wedge n > n_0 \Rightarrow x_n > L \text{ bzw. } x_n < L.$$

Satz. Ist (x_n) eine (reelle oder komplexe) konvergente Zahlenfolge, so ist (x_n) beschränkt. Ist c ihr Grenzwert, so ist die Folge mit den Gliedern $x_n - c$ eine Nullfolge.

Satz. Ist (x_n) bestimmt divergent und $x_n \neq 0$, so ist die Folge $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ eine Nullfolge.

Satz von Cauchy. Die Folge (x_n) ist genau dann konvergent, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine (i.a. von ε) abhängige Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \wedge n, m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Satz (Verträglichkeit der Grenzwertbildung mit den Grundrechnungsarten). Seien (x_n) und (y_n) konvergente Folgen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \pm \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)}, \quad y_n \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) \neq 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^r &= (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^r, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| &= |\lim_{n \rightarrow \infty} x_n|.\end{aligned}$$

Satz (Verträglichkeit der Grenzwertbildung mit der Real- und Imaginärteilbildung). Eine komplexe Folge (z_n) ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(\Re z_n)$ ihrer Realteile und die Folge $(\Im z_n)$ ihrer Imaginärteile konvergiert, es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \Re z_n + j \lim_{n \rightarrow \infty} \Im z_n.$$

Satz (Verträglichkeit der Grenzwertbildung mit der Relation \leq). Es seien (x_n) und (y_n) konvergente Folge mit $x_n \leq y_n$ (zumindest für $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$). Dann ist auch $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Satz (Vergleichskriterium). Es seien $(a_n), (b_n)$ und (x_n) drei Folgen, wobei $a_n \leq x_n \leq b_n$ (zumindest für $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$) gelten möge. Sind die Folge (a_n) und (b_n) konvergent mit dem selben Grenzwert $c : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$, so ist auch die Folge (x_n) konvergent mit dem Grenzwert c ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$$

Hauptsatz für monotone Folge. Eine monotone Folge (wachsend oder fallend) ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Eulersche Zahl.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n \frac{a^m}{m!} \quad a \in \mathbb{R}$$

Definition. Sei (x_n) eine reelle Zahlenfolge, H die Menge ihrer (eigentlichen und uneigentlichen) Häufungswerte. Dann heißt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf H, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup H$$

die untere bzw. obere Häufungsgrenze der Folge (x_n) .

2.3 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

Definition (Stetigkeit). Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in I$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Satz (Folgenkriterium). Die Funktion f hat an der Stelle x_0 genau dann einen Grenzwert, wenn die Folge $(f(x_n))$ für jede „zulässige“ Folge (x_n) , d.h. für jede Folge (x_n) mit $x_n \neq x_0$, $x_n \rightarrow x_0$, konvergent ist.

Es ist dann $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, $x_n \neq x_0$, $x_n \rightarrow x_0$.

Satz (Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen). Ist die Funktion $z = g(x)$ stetig an der Stelle x_0 , $y = f(z)$ stetig in $y = g(x_0)$, so ist die zusammengesetzte Funktion $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ stetig in x_0 .

Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion). Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I streng monoton in $x_0 \in I$ stetig, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ im Punkt $y_0 = f(x_0)$ stetig.

Satz (Vorzeichen einer stetigen Funktion). Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 und $f(x_0) \neq 0$, so hat $f(x)$ in einer gewissen Umgebung von x_0 dasselbe Vorzeichen wie $f(x_0)$.

Definition. Existiert der linksseitige Grenzwert von f an der Stelle x_0 und gilt $f(x_0) = f(-x_0)$ so heißt f linksseitig stetig in x_0 , existiert der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle x_0 und ist $f(x_0) = f(x_0+)$, so heißt f rechtsseitig stetig in x_0 .

Wachstumsvergleich. Es sei $f(x)$ in einer Umgebung von $x = 0$ definiert und $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodaß

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = A \neq 0$$

ausfällt, so sagt man, $f(x)$ strebt von der Ordnung n gegen Null, denn für kleine x ist

$f(x) \approx Ax^n$. Existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ m sodaß

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \text{ existiert, nicht aber } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^{n+1}},$$

so sagt man, $f(x)$ strebt von höherer als n -ter Ordnung gegen Null.

Satz (Verträglichkeit der Grenzwertbildung mit den Grundrechnungsarten). Es seien f und g reelle Funktionen. Existieren die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \bullet} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow \bullet} g(x)$, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \bullet} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow \bullet} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \bullet} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow \bullet} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow \bullet} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \bullet} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow \bullet} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \bullet} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \bullet} g(x)}, \quad g(x) \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \bullet} g(x) \neq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \bullet} (f(x))^r = \left(\lim_{x \rightarrow \bullet} f(x) \right)^r,$$

$$\lim_{x \rightarrow \bullet} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow \bullet} f(x) \right|.$$

Satz. Sind die Funktionen f und g stetig an der Stelle x_0 , so sind die Funktionen

$$f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g} (g(x_0) \neq 0), f^r (r \in \mathbb{Q}) \text{ und } |f| \text{ stetig in } x_0.$$

Satz (Allgemeiner Zwischenwertsatz). Ist I ein Intervall und ist die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf I stetig, so ist $J(I) = f(I)$ ein Intervall.

Satz (Spezieller Zwischenwertsatz). Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und gilt $f(a)f(b) < 0$, so existiert eine Stelle $\xi \in]a, b[$ mit $f(\xi) = 0$.

Definition. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, W = f(D)$. Ist $\sup W \in W$, also $\max W = \sup W$, so heißt $\max W$ das Maximum von f auf D : $\max_{x \in D} f(x) := \max W$.

Ist $\inf W \in W$, also $\min W = \inf W$, so heißt $\min W$ das Minimum von f auf D : $\min_{x \in D} f(x) := \min W$.

Satz von Weierstraß. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, so existiert das Minimum und das Maximum.

2.4 Die elementaren Funktionen

komplexe Exponentialfunktion.

$$e^z = e^{\Re z + j\Im z} = e^{\Re z} \cdot e^{j\Im z}$$

$$e^{j\varphi} := \cos \varphi + j \sin \varphi$$

$$e^z = e^{\Re z} (\cos \Im z + j \sin \Im z)$$

$$|e^z| = e^{\Re z}, \quad \arg e^z = \Im z$$

komplexer Logarithmus.

$$\ln z = \ln |z| + j(\arg z + 2k\pi)$$

Satz. Die komplexe (natürliche) Exponentialfunktion $\exp(z) = e^z$ ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert, ihr Wertebereich ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und sie ist periodisch mit der Periode $2\pi j$.

unimodular. Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird unimodular genannt, wenn $|z| = 1$

reelle trigonometrische Funktionen.

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1],$$

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1],$$

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

komplexe trigonometrische Funktionen.

$$\cos z := \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz}), \quad \arccos z = -j \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\sin z := \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz}), \quad \arcsin z = -j \ln(jz + \sqrt{1 - z^2})$$

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \arctan z = \frac{1}{2j} \ln \frac{1 + jz}{1 - jz}$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \operatorname{arctan} z = \frac{1}{2j} \ln \frac{jz - 1}{jz + 1}$$

hyperbolische Funktionen.

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\operatorname{arcosh} z := \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\operatorname{arsinh} z := \ln(z + \sqrt{1 + z^2}), \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\operatorname{artanh} z := \frac{1}{2} \ln \frac{1 + z}{1 - z}, \quad z \neq \pm 1$$

$$\operatorname{coth} x := \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{arcoth} z := \frac{1}{2} \ln \frac{z - 1}{z + 1}, \quad z \neq \pm 1$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin \Re z \cdot \cosh \Im z + j \cos \Re z \cdot \sinh \Im z \\ \cos z &= \cos \Re z \cdot \cosh \Im z - j \sin \Re z \cdot \sinh \Im z\end{aligned}$$

Additionstheoremen 1. Art.

$$\begin{aligned}\cosh(\alpha \pm \beta) &= \cosh \alpha \cosh \beta \pm \sinh \alpha \sinh \beta, \\ \sinh(\alpha \pm \beta) &= \sinh \alpha \cosh \beta \pm \cosh \alpha \sinh \beta\end{aligned}$$

Verdopplungsformeln

$$\begin{aligned}\sinh 2\alpha &= 2 \sinh \alpha \cosh \alpha, \\ \cosh 2\alpha &= \cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha\end{aligned}$$

Additionstheoreme 2. Art.

$$\begin{aligned}\sinh \alpha + \sinh \beta &= 2 \sinh \frac{\alpha + \beta}{2} \cosh \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cosh \alpha + \cosh \beta &= 2 \cosh \frac{\alpha + \beta}{2} \cosh \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cosh \alpha - \cosh \beta &= -2 \sinh \frac{\alpha + \beta}{2} \sinh \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

3 Differentialrechnung

3.1 Die Ableitung

Definition (Differenzierbarkeit). Es sei die Funktion f in einer Umgebung von x_0 definiert.

Existiert eine Zahl $A \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\varepsilon(h)$ mit $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$, sodaß

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + h\varepsilon(h),$$

so heißt die Funktion f in x_0 differenzierbar; die Zahl A wird ihre Ableitung in x_0 genannt, in Zeichen $f'(x_0) := A$. Die ganze lineare Funktion

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

wird der lineare Anteil von f an der Stelle x_0 genannt.

Satz. Die in einer Umgebung der Stelle x_0 definierte Funktion f ist an der Stelle x_0 genau dann differenzierbar, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$

existiert, der dann auch der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ genannt wird.

Satz. Ist die Funktion f in x_0 differenzierbar, so ist sie in x_0 stetig. (Die Umkehrung ist natürlich nicht richtig, denn sonst wäre stetig und differenzierbar ein und dasselbe!)

3.2 Differentiationsregeln

Satz. Sind f und g zwei an der Stelle x_0 differenzierbare Funktionen, so

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0) \text{ (Summen- bzw. Differenzenregel),}$$

gilt $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (Produktregel),

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} \text{ (Quotientenregel).}$$

Satz (Kettenregel zur Differentiation zusammengesetzter Funktionen). Es seien $z = g(x)$ in x_0 und $y = f(z)$ in $z_0 = g(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die Zusammensetzung $(f \circ g)(x)$ in x_0 differenzierbar, es gilt die sogenannte Kettenregel

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(z_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

In der „Differentialschreibweise“ nach LEIBNIZ lautet sie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx},$$

als wäre der „Quotient“ $\frac{dy}{dx}$ mit dz „erweitert“ worden.

Satz (Differentiation der Umkehrfunktion). Es sei $y = f(x)$ und $x = g(y)$ die Umkehrung von f . Ist f in $x_0 = g(y_0)$ differenzierbar und ist $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $g(y)$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, es gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Satz (Logarithmische Differentiation). Sind die Funktionen f und g in einer Umgebung von x_0 definiert, in x_0 differenzierbar und ist $f(x_0) > 0$, so ist die Funktion f^g um x_0 definiert und in x_0 differenzierbar, ihre Ableitung ist

$$(f^g)'(x_0) = (f^g)(x_0) \left(g'(x_0) \ln f(x_0) + g(x_0) \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right).$$

3.3 Differentiation der elementaren Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^a	$a \cdot x^{a-1}$	c	0
a^x	$a^x \ln a$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}, x > 0$
e^x	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{x}, x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$	$\operatorname{arc} \cot x$	$-\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\operatorname{ar} \sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\operatorname{ar} \cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\operatorname{ar} \tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}, x < 1$
$\operatorname{coth} x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \operatorname{coth}^2 x$	$\operatorname{ar} \operatorname{coth} x$	$\frac{1}{1-x^2}, x > 1$

3.4 Differential und Differentialquotient

Definition. Der Zuwachs des linearen Anteils als Funktion des Argumentenzuwachses

$h = \Delta x = x - x_0$ heißt das Differential von f an der Stelle x_0 ,

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

3.5 Der Mittelwertsatz

Satz von Rolle. Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig, auf $]a, b[$ differenzierbar und $f(a) = f(b)$. Dann gibt es eine Stelle $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf $]a, b[$, so gibt es eine Stelle $\xi \in]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Satz. Ist I ein Intervall $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf I differenzierbar und $f'(x) = 0$ für $x \in I$, so ist f auf I konstant.

Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Sind die Funktion f, g stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf $]a, b[$ und ist $g(a) \neq g(b)$, $g'(x) \neq 0$ für $x \in]a, b[$, so gibt es eine Stelle $\xi \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

3.6 Höhere Ableitungen

Regeln zur Bildung der höheren Ableitungen. Von den Regeln zur Bildung der Ableitungen höherer Ordnung lassen sich nur die Summen-, Differenzen- und Produkt – Regel übertragen:

$$\begin{aligned} (f \pm g)^{(n)}(x) &= f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x), \\ (cf)^{(n)}(x) &= cf^{(n)}(x), \quad c \in \mathbb{R}, \\ (f \cdot g)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x). \end{aligned}$$

Die letzte Regel wird auch LEIBNIZSCHE – Produktregel genannt.

3.7 Die Taylorsche Formel

Satz. Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung der Stelle $x_0 \in I$ $n-1$ -mal differenzierbar, in x_0 möge die Ableitung von $f^{(n-1)}(x)$ existieren. Ist dann

$$p(h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n,$$

so ist

$$f(x_0 + h) = p(h) + h^n \varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Satz von Taylor. Es sei die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ im Intervall I $n+1$ -mal differenzierbar. Dann gilt für eine geeignete Zahl $0 < \varrho < 1$

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + R_n(x_0, h),$$

die sogenannte Taylorsche Formel, mit

$$R_n(x_0, h) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \varrho h)}{(n+1)!} h^{n+1} & \text{(Lagrange),} \\ \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \varrho h)}{mn!} (1 - \varrho)^{n+1-m} h^{n+1}, 1 \leq m \leq n+1, & \text{(Cauchy).} \end{cases}$$

Der Ausdruck $R_n(x_0, h)$ wird das Restglied zur Taylorschen Formel genannt.

3.8 Relative Extremwerte

Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Man sagt, die Funktion f hat in x_0 ein relatives Maximum, wenn eine gewisse δ -Umgebung $U_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq I$ existiert und für $x \in U_\delta$ stets $f(x) \leq f(x_0)$ gilt. Man spricht von einem relativen Minimum, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ für $x \in U_\delta$ ist.

Satz. Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ Ort eines relativen Extremums der Funktion f und ist f in x_0 differenzierbar, so ist $f'(x_0) = 0$.

Satz. Es habe $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq I$ eine verschwindende Ableitung. Ist die erste in x_0 nicht verschwindende Ableitung der Funktion f von gerader Ordnung $2n$, so liegt in x_0 ein relatives Extremum vor. Ist $f^{(2n)}(x_0) > 0$, so handelt es sich um ein relatives Minimum, ist $f^{(2n)}(x_0) < 0$, so handelt sich um ein relatives Maximum.

3.9 Unbestimmte Formen

Satz (Erste Regel von De L'Hopital für $\frac{f}{g} \rightarrow \frac{0}{0}$). Ist $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ und existiert der Grenzwert $\lim \frac{f'}{g'}$, so existiert auch der Grenzwert $\lim \frac{f}{g}$, es gilt $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$.

Satz (Zweite Regel von De L'Hopital für $\frac{f}{g} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$). Ist $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$ und existiert der Grenzwert $\lim \frac{f'}{g'}$, so existiert auch der Grenzwert $\lim \frac{f}{g}$, es gilt $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$.

3.10 Kurvenuntersuchungen

3.11 Numerische Gleichungslösung

Definition. Sei $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt die Funktion Φ Lipschitz – stetig auf I , wenn eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ existiert, sodaß

$$x_1, x_2 \in I \Rightarrow |\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|.$$

Die Zahl L heißt eine Lipschitz – Konstante.

Fixpunktsatz von Banach. Es sei die Funktion $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ Lipschitz – stetig mit der Lipschitz – Konstanten L . Bildet die Funktion Φ das Intervall $[a, b]$ auf sich ab:

$\Phi([a, b]) \subseteq [a, b]$, und gilt $L < 1$, so hat Φ auf $[a, b]$ genau einen Fixpunkt ξ . Für $x_0 \in [a, b]$ konvergiert die Näherungsfolge $(x_n), x_{n+1} = \Phi(x_n)$, gegen diesen Fixpunkt. Es gilt

- $|x_n - \xi| \leq L^n (b - a)$ (a-priori-Abschätzung)
- $|x_{n+k} - \xi| \leq \frac{L^{k+1}}{1 - L} |x_n - x_{n-1}|$ (a-posteriori-Abschätzung)

3.12 Polynominterpolation

Satz. Interpoliert das Polynom p die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in den Stellen $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und ist f auf dem Intervall $[a, b]$ zumindest $(n + 1)$ -mal differenzierbar, so gilt

$$f(x) - p(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad x \in [a, b], \quad \xi \in]a, b[.$$

4 Integralrechnung

4.1 Das bestimmte Integral

Satz. Ist die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, so existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} R(f, \xi_n)$ für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge (ξ_n) unabhängig von der Auswahl der Zwischenstellen.

Definition. Der Grenzwert Riemannscher Summen $R(f, \xi_n)$ einer auf dem Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion f für eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge (ξ_n) heißt das bestimmte Integral von f über $[a, b]$, symbolisch nach LEIBNIZ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(f, \xi_n) = \lim \sum f(\zeta) \Delta x = \int_a^b f(x) dx.$$

Die Zahlen a, b heißen die Integrationsgrenzen, a die untere und b die obere. x heißt die Integrationsvariable und ist wie der Summen- und Produktzeiger eine gebundene Variable. Das Intervall $[a, b]$ wird auch das Integrationsintervall genannt.

Definition.

$$\int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx := 0$$

4.2 Die Mittelwertsätze

Mittelwertsatz der Integralrechnung. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, so gibt es eine Stelle $\xi \in]a, b[$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung. Es seien die Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$. Wechselt die Funktion g ihr Vorzeichen auf $[a, b]$ nicht, so gibt es eine Stelle $\xi \in]a, b[$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

4.3 Integrale mit variablen Grenzen. Stammfunktionen

Definition. Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$. Eine auf $[a, b]$ (stetig) differenzierbare Funktion F heißt Stammfunktion von f auf $[a, b]$, wenn $F'(x) = f(x)$ für $x \in [a, b]$ gilt.

Satz. Sind F und G zwei Stammfunktionen von f auf $[a, b]$, so unterscheiden sie sich um eine Konstante,

$$F'(x) = G'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) - G(x) = C.$$

4.4 Das unbestimmte Integral

Definition. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall I . Die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f auf I heißt das unbestimmte Integral von f auf I , symbolisch

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in I,$$

mit einem „Vertreter“ F für alle Stammfunktionen von f auf I .

4.5 Der Fundamentalsatz

Fundamentalsatz der Integralrechnung. Ist F eine Stammfunktion von f auf dem Intervall $[a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

4.6 Das Integral komplexer Funktionen

Definition. Ist $\zeta(t)$ stetig auf $[a, b]$, so existiert das Integral des Real- und Imaginärteils,

$$\int_a^b \zeta(t)dt := \int_a^b \xi(t)dt + j \int_a^b \eta(t)dt$$

wird das bestimmte Integral der komplexen Funktion $\zeta(t)$ genannt.

Definition. Ist $\zeta(t)$ stetig auf $[a, b]$, so heißt die Gesamtheit aller Stammfunktionen von ζ das unbestimmte Integral der Funktion ζ , symbolisch

$$\int \zeta(t) dt = Z(t) + C$$

Mit einem Vertreter Z aller Stammfunktionen für ζ auf $[a, b]$.

4.7 Methoden der unbestimmten Integration

$f(x)$	$\int f(x) dx$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}, a \neq -1$	e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1$	$\arcsin x$
$\cos x$	$\sin x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1$	$\arccos x$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$	$\arctan x$
$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$	$\cot x$	$\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$	$-\operatorname{arc} \cot x$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{ar} \sinh x$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$	$\operatorname{ar} \cosh x$
$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	$\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}, x < 1$	$\operatorname{ar} \tanh x$
$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \operatorname{coth}^2 x$	$\operatorname{coth} x$	$\frac{1}{1-x^2}, x > 1$	$\operatorname{ar} \operatorname{coth} x$

Äquivalente Umformung. Umformung des Integrals, unter Einhaltung der Rechenregeln, auf Grundintegrale.

Variablensubstitution. Ist F eine Stammfunktion von f , g eine beliebige Funktion, so gilt

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x))g'(x) \text{ und somit}$$

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Partielle Integration. Sind u und v auf I stetig differenzierbare Funktionen, so ist

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ und daher}$$

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

beziehungsweise

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

4.8 Numerische Integration

Satz (Fehleranalyse der Newton – Cotes – Quadratur). Sei die Funktion $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar bis einschließlich der (geraden) Ordnung $2m + 2 \geq 2$. Ist $Q(h)$ die Quadraturformel für $2m + 1$ oder $2m + 2$ Stützstellen einschließlich der Intervallenden, also

$$Q(h) = \begin{cases} (\beta - \alpha) \sum_{j=0}^{2m} \gamma_j f(\alpha + jh), & \text{für } 2m + 1 \text{ Stützstellen, } h = \frac{\beta - \alpha}{2m} \\ (\beta - \alpha) \sum_{j=0}^{2m+1} \gamma_j f(\alpha + jh), & \text{für } 2m + 2 \text{ Stützstellen, } h = \frac{\beta - \alpha}{2m + 1} \end{cases}$$

so gilt mit geeignetem $\xi \in]\alpha, \beta[$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = Q(h) + (\beta - \alpha)^{2m+3} \frac{K}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi)$$

mit

$$K = \begin{cases} \frac{1}{(\beta - \alpha)^{2m+3}} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) q(x) dx = \int_0^1 x \prod_{k=0}^{2m} \left(x - \frac{k}{2m} \right) dx & \text{bei } 2m + 1 \\ \frac{1}{(\beta - \alpha)^{2m+3}} \int_{\alpha}^{\beta} q(x) dx = \int_0^1 \prod_{k=0}^{2m+1} \left(x - \frac{k}{2m+1} \right) dx & \text{bei } 2m + 2 \end{cases}$$

Stützstellen.

Trapezregel und Eulersche Formel. (2 Stützstellen) Die Interpolation durch eine ganze lineare Funktion bedeutet Approximation des Inhaltes eines ebenen Normalbereiches durch den Inhalt eines Trapezes.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx (\beta - \alpha) \frac{1}{2} [f(\alpha) + f(\beta)]$$

Die Summation über alle n – Teilintervalle wird auch als Eulersche Formel bezeichnet:

$$\int_a^b f(x) dx \approx E(h) := h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + \dots + f(b-h) + \frac{1}{2} f(b) \right] \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Fehler:
$$F \leq h^2 \frac{b-a}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Keplersche Faßregel und die Simpsonsche Formel. (3 Stützstellen)

Keplersche Faßregel:
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx \frac{\beta - \alpha}{6} \left[f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f(\beta) \right]$$

Die Summation über alle n – Teilintervalle wird auch als Simpsonsche Formel bezeichnet:

$$\int_a^b f(x) dx \approx S(h) := \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \dots \right. \\ \left. \dots + 2f(b-4h) + 4f(b-3h) + 2f(b-2h) + f(b-4h) + f(b) \right] \quad h = \frac{b-a}{2n}$$

Fehler:
$$F \leq h^4 \frac{b-a}{180} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

3/8 Regel und Newtonsche Formel. (4 Stützstellen)

3/8 Regel:
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx \frac{\beta - \alpha}{8} \left[f(\alpha) + 3f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) + 3f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) + f(\beta) \right]$$

Die Summation über alle n – Teilintervalle wird auch als Simpsonsche Formel bezeichnet:

$$\int_a^b f(x) dx \approx S(h) := \frac{3h}{8} \left[f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + 2f(a+3h) + 3f(a+4h) + \dots \right. \\ \left. \dots + 3f(b-4h) + 2f(b-3h) + 3f(b-2h) + 3f(b-4h) + f(b) \right] \quad h = \frac{b-a}{3n}$$

Fehler:
$$F \leq h^4 \frac{b-a}{80} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

Milne Regel.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \approx \frac{\beta - \alpha}{90} \left[7f(\alpha) + 32f\left(\frac{3\alpha + \beta}{4}\right) + 12f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + 32f\left(\frac{\alpha + 3\beta}{4}\right) + 7f(\beta) \right]$$

Die Summation über alle n – Teilintervalle wird auch als Milne Regel bezeichnet:

$$\int_a^b f(x) dx \approx S(h) := \frac{2h}{45} \left[7f(a) + 32f(a+h) + 12f(a+2h) + 32f(a+3h) + 14f(a+4h) \dots \right] \quad h = \frac{b-a}{4n}$$

$$\dots 14f(b-4h) + 32f(b-3h) + 12f(b-2h) + 32f(b-4h) + 7f(b)$$

Fehler:
$$F \leq h^6 \frac{2(b-a)}{80} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(6)}(x)|$$

4.9 Erweiterung des Integrals

Hebbare Unstetigkeiten.

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b \tilde{f}(x) dx \quad \dots \text{Der Integrand wird in } c \text{ stetig abgeändert.}$$

Sprungstellen.

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Unendlichkeitsstellen. Uneigentliche Integrale 1. Art.

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(\xi) d\xi \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(x) dx := \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(\xi) d\xi$$

Satz (Konvergenzkriterium für uneigentliche Integrale 1. Art). Es sei die Funktion $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b[$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$ ($-\infty$). Existiert für eine Zahl $\alpha > 1$ der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^\alpha f(x) = A$$

im eigentlichen Sinn, so ist das uneigentliche Integral der Funktion f über $[a, b[$ konvergent. Existiert dieser Grenzwert für eine Zahl $\alpha \geq 1$ im eigentlichen oder im uneigentlichen Sinn und ist $A \neq 0$, so ist das uneigentliche Integral der Funktion f über $[a, b[$ bestimmt divergent.

Unbeschränkte Integrationsintervalle. Uneigentliche Integrale 2. Art.

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(\xi) d\xi \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(\xi) d\xi \quad \text{bzw.}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx$$

Satz (Konvergenzkriterium für uneigentliche Integrale 2. Art). Es sei die Funktion $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, \infty[$ stetig. Existiert für eine Zahl $\alpha > 1$ der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = A$$

im eigentlichen Sinn, so ist das Integral von f über $[a, \infty[$ konvergent. Existiert dieser Grenzwert für eine Zahl $\alpha \leq 1$ im eigentlichen oder im uneigentlichen Sinn und ist $A \neq 0$, so divergiert das Integral von f über $[a, \infty[$.

Hauptwerte uneigentlicher Integrale.

Cauchyscher Hauptwert:
$$HW = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

4.10 Bogenlänge, Krümmung und Rotationskörper

Bogenlänge ebener Kurven.

Bogendifferential: kartesische Koordinaten: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

Polarkoordinaten: $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$

Bogenlänge: $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

Krümmung ebener Kurven.

Krümmung: kartesische Koordinaten: $\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{f''(x)}{\sqrt{(1 + [f''(x)]^2)^3}}$

Polarkoordinaten: $\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{rd\varphi^3 + rdrd^{2\varphi} + 2dr^2d\varphi + rd^2rd\varphi}{\sqrt{(dr^2 + rd\varphi^2)^3}}$

Oberfläche und Volumen eines Rotationskörpers.

Oberfläche: $O = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

Volumen: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

5 Unendliche Reihen

5.1 Reihen mit konstanten Gliedern

Definition. Es sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge. Dann heißt der Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

eine unendliche Summe oder Reihe, die „Summanden“ a_n werden ihre Glieder genannt.

Existiert dieser Grenzwert im eigentlichen Sinn, so wird er die Summe der Reihe genannt, die Reihe selbst heißt konvergent; existiert er im uneigentlichen Sinn, so heißt die Reihe bestimmt divergent. Ist die Reihe weder konvergent noch bestimmt divergent, so heißt sie unbestimmt divergent.

Satz. Konvergente Reihen dürfen „gliedweise“ addiert, subtrahiert und mit einer Zahl multipliziert werden,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (c * a_n) = c * \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Satz. In einer konvergenten Reihe dürfen Klammern beliebig gesetzt und weggelassen werden, letzteres aber nur dann, wenn die durch Weglassen von Klammern hervorgehende Reihe konvergent ist.

5.2 Konvergenzkriterien

Satz (Konvergenzkriterium von Cauchy). Eine Reihe $\sum a_n$ ist genau dann konvergent, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß

$$n > n_0, k \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

Satz (Notwendiges Konvergenzkriterium). Ist eine Reihe konvergent, so bilden ihre Glieder eine Nullfolge.

Satz (Konvergenzkriterium von Abel). Ist (A_n) , $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, eine beschränkte Folge und (b_n) eine monotone Nullfolge, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

Satz (Konvergenzkriterium von Leibniz). Es sei (a_n) eine monotone Nullfolge mit positiven Gliedern. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent.

5.3 Das kommutative Gesetz. Bedingte und absolute Konvergenz

Umordnungssatz. Hat eine Reihe unendlich viele positive und unendlich viele negative Glieder und ist sowohl die Reihe der positiven als auch die Reihe der negativen Glieder bestimmt divergent, so kann die Reihe so umgeordnet werden, dass ihre Summe eine beliebige reelle Zahl ist, insbesondere kann sie so umgeordnet werden, dass sie divergent wird.

Definition. Eine (konvergente) Reihe wird bedingt konvergent genannt, wenn durch eine einzige Umordnung ihre Summe bzw. ihr Konvergenzverhalten geändert werden kann.

Definition. Eine Reihe wird absolut konvergent genannt, wenn die Reihe der Beträge ihrer Glieder konvergiert.

Satz. Eine Reihe ist genau dann absolut konvergent, wenn sie nicht bedingt konvergent ist.

5.4 Kriterien für absolute Konvergenz

Satz (Vergleichskriterium). Sei $\sum a_n$ eine Reihe und $\sum b_n$ eine zweite konvergente Reihe mit positiven Gliedern, wobei $|a_n| \leq b_n$ (zumindest ab einem gewissen Index) gelten möge. Dann ist die Reihe $\sum a_n$ absolut konvergent und damit konvergent. Ist $\sum c_n$ eine bestimmt divergente Reihe mit positiven Gliedern und gilt $|a_n| \geq c_n$ (zumindest ab einem gewissen Index), so ist die Reihe $\sum a_n$ nicht absolut konvergent und damit divergent oder bedingt konvergent.

Satz (Wurzelkriterium von Cauchy). Die Reihe $\sum a_n$ ist absolut konvergent, wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$$

Und divergent im Falle $q > 1$. Im Falle $q = 1$ ist keine Entscheidung möglich, die Reihe $\sum a_n$ kann konvergent oder divergent sein.

Satz (Quotientenkriterium von D'Alembert). Die Reihe $\sum a_n$ ist absolut konvergent, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$$

Und divergent im Falle $q > 1$. Existiert dieser Grenzwert nicht, so ist sie konvergent, wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \text{ und divergent, wenn } \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1.$$

Satz (Kriterium von Raabe). Die Reihe $\sum a_n$ ist absolut konvergent, wenn

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = \alpha > 1$$

Und divergent, wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = \beta < 1$$

Existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)$, so ist $\alpha = \beta$; die Entscheidung bleibt dann offen, wenn $\alpha = 1$.

5.5 Das distributive Gesetz

Satz (Cauchy – Multiplikation). Sind die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent,

so ist auch das Cauchy – Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n a_m b_{n-m} \right)$ absolut konvergent, es gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) * \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n a_m b_{n-m} \right)$$

Wegen $\sum_{m=0}^n a_m b_{n-m} = \sum_{m=0}^n a_{n-m} b_m$ wird das kommutative Gesetz durch das Cauchy – Produkt nicht verletzt.

5.6 Reihen mit komplexen Gliedern

Eine Reihe mit komplexen Gliedern ist genau dann konvergent, wenn die Reihe der Realteile und die Reihe der Imaginärteile konvergiert,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + j\beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + j \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

5.7 Funktionenreihen

Wichtige Reihen sind.	Potenzreihen:	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$
	Trigonometrische Reihen:	$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$
	Dirichlet – Reihen:	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-x\lambda_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$

Definition. Es sei I ein Intervall, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $s(x) = \sum f_n(x)$ auf I punktweise konvergent. Dann heißt die Reihe $\sum f_n(x)$ mit den Partialsummen $s_n(x)$ gleichmäßig konvergent auf I mit der Summe $s(x)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $n > n_0 \Rightarrow \sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$.

Satz. Die Reihe $\sum f_n(x)$ ist auf dem Intervall I genau dann gleichmäßig konvergent, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n, m > n_0 \Rightarrow \sup_{x \in I} |s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$.

Satz (Majorantenkriterium). Sei $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $\sum f_n(x)$ auf I konvergent. Gilt $|f_n(x)| \leq c_n$ für $x \in I$ (zumindest ab einem gewissen Index) und ist die Reihe $\sum c_n$ konvergent, so ist die Reihe $\sum f_n(x)$ auf I gleichmäßig konvergent.

Satz. Sei I ein Intervall und $s(x) = \sum f_n(x)$ auf I gleichmäßig konvergent. Sind die Glieder $f_n(x)$ in $x_0 \in I$ stetig, so ist auch die Summenfunktion $s(x)$ in x_0 stetig,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0), \quad x_0 \in I$$

Satz. Es sei I ein Intervall, $s(x) = \sum f_n(x)$ eine auf I gleichmäßig konvergente Reihe mit auf

I stetigen Gliedern f_n und $g_n(x) = \int_a^x f_n(\xi) d\xi$, $a, x \in I$. Dann ist die Reihe $\sigma(x) = \sum g_n(x)$

auf I gleichmäßig konvergent, es ist $\sigma(x) = \int_a^x s(\xi) d\xi$,

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi) \right) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(\xi) d\xi, \quad a, x \in I.$$

Satz. Es seien I ein Intervall, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf I differenzierbar mit stetiger Ableitung und

$\sigma(x) = \sum f_n'(x)$ auf I gleichmäßig konvergent. Dann ist die Reihe $s(x) = \sum f_n(x)$ auf I

gleichmäßig konvergent, es gilt $\sigma(x) = s'(x)$,

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in I.$$

5.8 Potenzreihen

Definition. Eine Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

heißt eine Potenzreihe. Die Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$ heißen die Koeffizienten der Potenzreihe, die Zahl x_0 wird die Anschlußstelle genannt.

Satz. Es sei $\sum a_n x^n$ eine Potenzreihe und

$$\eta = \limsup_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ist $\eta = 0$, so ist die Reihe $\sum a_n x^n$ beständig konvergent, ist $\eta = \infty$, so ist die Reihe $\sum a_n x^n$ trivial konvergent, ist $0 < \eta < \infty$, so ist die Reihe für $|x| < \frac{1}{\eta}$ absolut konvergent und für $|x| > \frac{1}{\eta}$ divergent.

Satz. Ist $\sum a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $r > 0$, so ist die Reihe $\sum a_n x^n$ auf $] -r, r[$ absolut konvergent und auf jeem Intervall $[a, b] \subseteq] -r, r[$ gleichmäßig konvergent.

Grenzwertsatz von Abel. Hat die Reihe $\sum a_n x^n$ den positiven Konvergenzradius r und ist die Reihe $\sum a_n r^n$ bzw. die Reihe $\sum a_n (-r)^n$ konvergent, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow r^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ bzw. } \lim_{x \rightarrow r^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-r)^n.$$

Satz. Ist $s(x) = \sum a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius r , so stellt die Summe $s(x)$ eine auf $] -r, r[$ beliebig oft differenzierbare Funktion dar. Es gilt

$$s^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m} \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n x^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{m} a_{n+m} x^n, \quad |x| < r.$$

Identitätssatz für Potenzreihen. Sind $s(x) = \sum a_n x^n, \sigma(x) = \sum b_n x^n$ zwei Potenzreihen mit positivem Konvergenzradien r_a und r_b und ist (x_m) eine Nullfolge mit $s(x_m) = \sigma(x_m)$ für $m = 0, 1, 2, \dots$, so sind die beiden Reihen $\sum a_n x^n$ und $\sum b_n x^n$ identisch ($a_n = b_n$), d.h es ist $s(x) = \sigma(x)$ für $|x| < r_a = r_b$.

5.9 Taylorsche Reihen

Satz (Taylor – Entwicklung). Ist die Funktion $f :]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und besteht für $|x - x_0| < r \leq \rho$ die Grenzwertbeziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0$, so ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots, \quad |x - x_0| < r. \end{aligned}$$

Diese Reihe heißt die Taylorsche Reihe der Funktion f an der Stelle x_0 .

5.10 Integration durch Reihenentwicklung