Prüfung aus Mathematik 1 für ET (neuer Studienplan) am 29. 1. 2003
(Prof. Langer)

1. (a) Zeige die folgende Summenformel für $n > 1$ mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$$

   (b) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$, für die $\cos z = j$ gilt.

   (c) Ist die Funktion $f(z) = \sinh z$ periodisch ($z \in \mathbb{C}$)? Wenn ja, gib die Periode an.

2. (a) Bestimme Nullstellen, Extrema und Asymptoten der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

   Skizziere die Funktion.

   (b) Wieviele Nullstellen hat die Funktion $g(x) = x^5 - 6x + 1$ im Intervall $[0, 1]$?

3. (a) Berechne die unbestimmten Integrale

$$\int 3t^2 \sin t^3 \, dt, \quad \text{und} \quad \int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} \, dx$$

   (b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{ax} \, dx\,?$$

4. (a) Beschreibe $\mathbb{Q}$, die Menge der rationalen Zahlen.

   (b) Geben Sie die Definition des *Grenzwertes* einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Kann eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die *monoton* und *beschränkt* ist, mehr als einen Häufungspunkt haben?

   (c) Formuliere den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

   (d) Geben Sie die Definition des Begriffes *Stammfunktion* einer stetigen Funktion. Ist die Stammfunktion eindeutig?

FET K

Prüfung aus Mathematik 1 für ET (neuer Studienplan) am 19. 3. 2003 (Prof. Langer)

Arbeitszeit: 90 Minuten

FET

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt:

   (a) $\sqrt{2-x} = x$ $\quad x = 1$

   (b) $\frac{x^2-4}{|x+2|} \leq x$ $\quad x > -2$

2. Berechne die folgenden Grenzwerte:

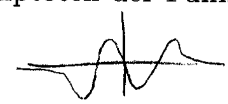
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{an^2+bn+1}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{1}{a}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{x \sin x}$

3. (a) Bestimme Nullstellen, Extremwerte und Asymptoten der Funktion $\quad \emptyset, 1, -1 \quad y_A - \emptyset$

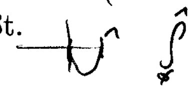
$$f(x) = e^{-x^2}(x^3 - x).$$



   Fertigen Sie auch eine Skizze an. Es ist dabei nur das qualitative Verhalten wichtig!

   Hinweis: $x_{1,4} := \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}} \approx \pm 1.5$, $x_{2,3} := \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}} \approx \pm 0.5$, $f''(x_{1,3}) < 0$, $f''(x_{2,4}) > 0$

   (b) Berechne den Flächeninhalt, den die Funktion $f(x) = e^{-x^2}(x^3 - x)$ im zweiten Quadranten mit der x-Achse einschließt.



   $\Rightarrow \frac{e-2}{2}$

4. (a) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{n+1}{n-1} z^n$$

   konvergiert.

   (b) Untersuche die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{jnx}}{n+1}$ für $x \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz.

5. (a) Geben Sie die Definitionen von Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Folgt Stetigkeit aus Differenzierbarkeit? Ist jede stetige Funktion differenzierbar?

   (b) Beschreiben Sie das Konvergenzverhalten von Potenzreihen.

   (c) Geben Sie die Definition einer Äquivalenzrelation?

   (d) Formuliere den Satz von Taylor (Taylorformel mit Restglied).

FET

Mathematik 1 f. ET

(StPl 2000)

17. April 2002

1. Man bestimme sämtliche Nullstellen der Funktion $\cosh\sqrt{z}$.

2. Man entwickle die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

in ihre Taylorsche Reihe um $x_o = \frac{1}{2}$. Für welche Werte von x ist die Reihe konvergent?

3. Man erläutere den Begriff „gleichmäßige Konvergenz" für Funktionenreihen und dessen Bedeutung.

4. Man formuliere den Fixpunktsatz von BANACH.

Anworten:

1. $\cosh\sqrt{z} = 0 \;\Rightarrow\; e^{2\sqrt{z}-j\pi} = 1 \;\Rightarrow\; z = -(k+\frac{1}{2})^2\pi^2$.

2. $f(y+\frac{1}{2}) = \frac{1}{y-\frac{3}{2}} - \frac{1}{y-\frac{1}{2}} = \frac{2}{1-2y} - \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{2y}{3}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^{n+1} - (\frac{2}{3})^{n+1})y^n$, $|y| < \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^{n+1} - (\frac{2}{3})^{n+1})(x-\frac{1}{2})^n$, $0 < x < 1$.

3. Eine Reihe $s(x) = \sum f_n(x)$ mit den Partialsummen heißt auf einem Intervall I *gleichmäßig* konvergent mit der Summe $s(x)$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; \exists n_o \in \mathbb{N} \text{ mit: } n > n_o \;\Rightarrow\; \sup_{x\in I}|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon\,.$$

Die Bedeutung der gleichmäßigen Konvergenz besteht darin, daß die Operationen $\lim\limits_{x\to x_o}$, $\frac{d}{dx}$ und $\int_a^x$ mit der Summation $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ vertauscht werden darf.

4. Es sei $f : [a,b] \to [a,b]$ auf $[a,b]$ Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten $L < 1$. Dann hat f in $[a,b]$ genau einen Fixpunkt. Für $x_0 \in [a,b]$ konvergiert die durch Iteration $x_n = f(x_{n-1})$ gegebene Folge (x_n) gegen diesen Fixpunkt.

Mathematatik 1 f. ET

(StPl 2000)

13. Juni 2002

1. Man bestimme Betrag und Argument der komplexen Zahl
$$z_n = \frac{1}{(x+j)^n}, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

2. Man berechne
$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\, dx.$$

3. Man erläutere den Begriff der Differenzierbarkeit.

4. Man formuliere den Fixpunktsatz von BANACH.

Antworten:

1. $|z_n| = (x^2+1)^{-n/2}$, $\arg z_n = n(\arctan x - \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$.

2. Substituiere $y = x^2 \Rightarrow I = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{8}$.

3. Eine reelle Funktion f der reellen Veränderlichen x heißt an der Stelle x_o differenzierbar, wenn eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert und eine Funktion ε mit $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$, sodaß
$$f(x_o + h) = f(x_o) + ah + h\varepsilon(h).$$
Eine in x_o differenzierbare Funktion kann (um die Stelle x_o) durch eine ganze lineare Funktion des Argumentzuwachses $h = x - x_o$ so approximiert werden, daß der Fehler von höherer als erster Ordnung gegen Null geht.

4. Es sei $f : [a,b] \to [a,b]$ auf $[a,b]$ Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten $L < 1$. Dann hat f in $[a,b]$ genau einen Fixpunkt. Für $x_0 \in [a,b]$ konvergiert die durch Iteration $x_n = f(x_{n-1})$ gegebene Folge (x_n) gegen diesen Fixpunkt.

Mathematatik 2 f. ET

(StPl 2000)

11. Dezember 2002

1. Für welche Werte von α ist die quadratische Form

$$Q = x^2 + \alpha y^2 + 10z^2 + 2xy + 6xz + 10yz$$

positiv definit?

2. Sei $z = f(x, y)$. Man rechne den Differentialausdruck

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

auf die Variablen $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ um.

3. Sei X eine Zufallsgröße mit der Dichte $f_X(x)$, Y eine von X unabhängige Zufallsgröße mit der Dichte $f_Y(y)$. Was ist die Dichte der zweidimensionalen Zufallsgröße (X, Y) und was ist die Dichte der Zufallsgröße $Z = X + Y$?

4. Sei $y_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, eine Funktion in n unabhängigen und m abhängigen Veränderlichen, kurz $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Wann nennt man die Funktion $\mathbf{f}$ differenzierbar an einer Stelle $\mathbf{x}_o$?

Anworten:

1. $D_1 = 1, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 1, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & \alpha & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \alpha - 5$: $D_1 > 0, D_2 > 0$, $D_3 > 0 \;\Rightarrow\; \alpha > 1 \wedge \alpha > 5 \;\Rightarrow\; \alpha > 5$.

2. $4\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$.

3. $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - \zeta) f_Y(\zeta) d\zeta$.

4. Die Funktion $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ heißt differenzierbar an der Stelle $\mathbf{x}_o$, wenn eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existiert und eine Funktion $\varepsilon(\mathbf{h})$ mit $\lim\limits_{\mathbf{h} \to \mathbf{o}} \varepsilon(\mathbf{h}) = \mathbf{o}$, sodaß gilt:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_o + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{A}\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \varepsilon(\mathbf{h}).$$

FET

Mathematatik 2 f. ET

(StPl 2000)

19. März 2003

1. Man bestimme den Spektralradius der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-7j & 3j & -2j \\ -6j & 1+2j & -2j \\ 16j & -6j & 1+5j \end{pmatrix}.$$

2. Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \quad y(1) = 1.$$

3. Sei X eine Zufallsgröße mit der Dichte $f_X(x)$, Y eine von X unabhängige Zufallsgröße mit der Dichte $f_Y(y)$. Was ist die Dichte der zweidimensionalen Zufallsgröße (X, Y) und was ist die Dichte der Zufallsgröße $Z = X + Y$?

4. Genau unter welchen Bedingungen ist ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{s}$

(i) für eine konkrete rechte Seite $\mathbf{s}$ lösbar?

(ii) für jede rechte Seite $\mathbf{s}$ lösbar?

(iii) höchstens eindeutig lösbar?