

Kapitel S

Sätze für lineare Schaltungen

Die besprochenen Eigenschaften elektrischer Schaltungen und die gezeigten Analyseverfahren gestatten die Ableitung einiger Sätze, durch deren Anwendung sich Schaltungsaufgaben oft vereinfachen lassen. Wir werden uns dabei auf lineare zeitinvariante Schaltungen beschränken, d.h. die realen Bauelemente (Widerstände, Spulen, Kondensatoren, Transformatoren u.ä.) sind im betrachteten Betriebsbereich durch ideale Stromkreiselemente mit konstanten Parametern (R, L, C, M usw.) darstellbar. Neben unabhängigen, idealen Strom- und Spannungsquellen (u_q bzw. i_q sind vorgeschriebene Zeitfunktionen) sind auch linear gesteuerte Quellen zugelassen, also Quellen, bei denen der Quellenstrom bzw. die Quellenspannung linear (homogen und additiv) von Strömen und Spannungen in anderen Zweigen der Schaltung abhängt.

S.1 Überlagerungssatz

Der Überlagerungssatz (Superpositionsprinzip) ist eine direkte Folge der Additivitätseigenschaften linearer Systeme. Er lässt sich - etwas unpräzise - so formulieren: „Die von den Ursachen u_1, u_2, \dots, u_n abhängige Wirkung y entsteht als Überlagerung aller Teilwirkungen y_1, y_2, \dots, y_n , die sich ergeben, wenn jeweils nur eine der Ursachen vorhanden ist und alle übrigen null sind.“

Diese Aussage müssen wir für unsere Anwendungen präzisieren. Angenommen, das Maschenverfahren liefert als Lösung des Systems (A.12) zusammen mit den Gln.(A.9)₂ die Zweigströme

$$\underline{I} = \underline{M}^T \underline{Z}_V^{-1} \underline{U}_{qV}.$$

Setzen wir noch den Ausdruck (A.11) für die Maschenquellenmatrix ein, so ergibt

sich der i -te Zweigstrom zu

$$I_i = \sum_j \left(\tilde{M}^T \tilde{Z}_V^{-1} \tilde{M} \tilde{Z} \right)_{ij} I_{qj} - \sum_j \left(\tilde{M}^T \tilde{Z}_V^{-1} \tilde{M} \right)_{ij} U_{qj}. \quad (\text{S.1})$$

Jede unabhängige Quelle liefert demnach einen individuellen Beitrag, unbeeinflusst von den Beiträgen der anderen Quellen. Der gesamte Zweigstrom ist die Summe dieser Teilströme. Für die Zweigspannungen gilt übrigens der gleiche Überlagerungssatz, was sich, etwa vom Schnittverfahren ausgehend, leicht zeigen lässt.

Halten wir fest: Der additive Beitrag einer unabhängigen, idealen Quelle zu einer Zweigspannung oder zu einem Zweigstrom lässt sich in einer linearen Schaltung getrennt von den Beiträgen der anderen unabhängigen Quellen berechnen. Sie brauchen dazu nur die anderen unabhängigen Quellen aus der Schaltung zu entfernen, d.h. ideale Stromquellen durch Unterbrechungen und ideale Spannungsquellen durch Kurzschlüsse zu ersetzen, und können anschließend die Teilspannung bzw. den Teilstrom im betrachteten Zweig nach einem der gängigen Verfahren ermitteln. Wichtig ist dabei folgendes:

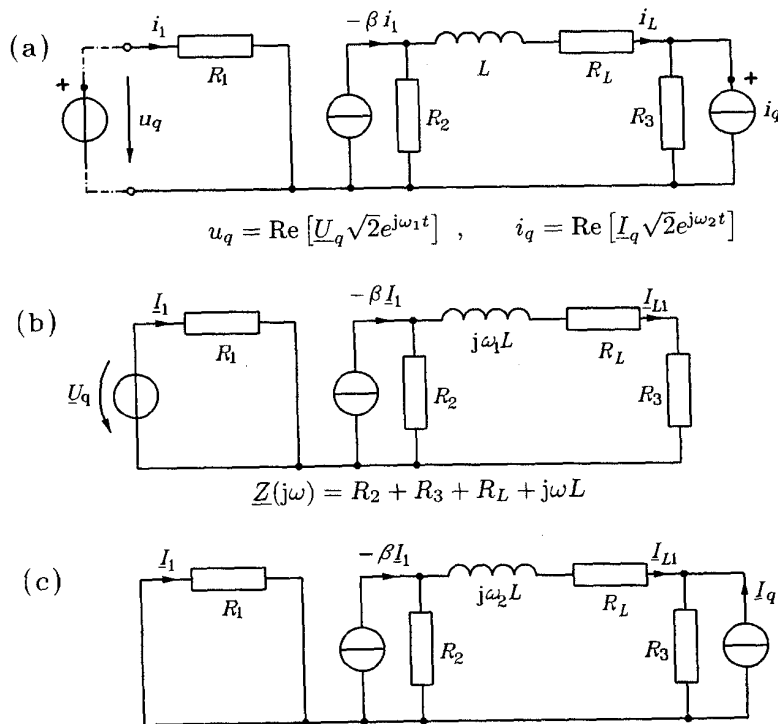


Abb.S.1 (a) Die Ersatzschaltung enthält zwei unabhängige Sinusquellen unterschiedlicher Frequenz und eine gesteuerte Quelle. Der eingeschwungene Strom im Spulenzweig ist zu bestimmen. (b) Die unabhängige Stromquelle wird entfernt und der Teilstrom i_{L1} berechnet. (c) Für die Berechnung des Teilstroms i_{L2} wird die unabhängige Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzt. Die gesteuerte Quelle verbleibt jeweils in der Schaltung. Die Summe aus i_{L1} und i_{L2} ergibt den gesuchten Strom i_L .

- **Ersatz-Innenwiderstände** von Quellen sind bei der Deaktivierung in der Schaltung zu **belassen**.
- Es sind nur die restlichen unabhängigen Quellen, **nicht aber die gesteuerten Quellen** zu entfernen. Die Parameter der gesteuerten Quellen sind nämlich nicht in den Quellenmatrizen, sondern in der ungeändert zu belassenden Impedanzmatrix enthalten.

Ein einfaches **Beispiel** soll die Anwendung des Überlagerungssatzes verdeutlichen. Wir wollen für die Ersatzschaltung in Abb.S.1a, die neben einer gesteuerten Quelle noch eine unabhängige Sinusspannungsquelle der Kreisfrequenz ω_1 und eine unabhängige Sinusstromquelle der Kreisfrequenz ω_2 enthält, den eingeschwingenen Verlauf des Stroms i_L im Spulenzweig bestimmen.

Im ersten Schritt berechnen wir den Beitrag i_{L1} zufolge der Spannungsquelle durch Entfernen der unabhängigen Stromquelle ($i_q = 0$, Abb.S.1b). Die Erregung erfolgt dann mit der einheitlichen Kreisfrequenz ω_1 , und wir erhalten durch anwenden der komplexen Wechselstromrechnung und der Stromteilerregel ohne weiteres

$$\underline{I}_1 = \frac{U_q}{R_1}, \quad \frac{\underline{I}_{L1}}{-\beta \underline{I}_1} = \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_L + j\omega_1 L},$$

d.h. für den komplexen Effektivwert

$$\underline{I}_{L1} = -\frac{R_2}{\underline{Z}(j\omega_1)} \frac{\beta}{R_1} \underline{U}_q, \quad \underline{Z}(j\omega_1) = R_2 + R_3 + R_L + j\omega_1 L.$$

Im zweiten Schritt wird der Beitrag i_{L2} zufolge der unabhängigen Stromquelle bestimmt, indem wir die Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzen ($u_q = 0$, Abb.S.1c). Wegen

$$\underline{I}_1 = 0, \quad \frac{-\underline{I}_{L2}}{\underline{I}_q} = \frac{R_3}{R_2 + R_3 + R_L + j\omega_2 L}$$

ergibt sich sofort

$$\underline{I}_{L2} = -\frac{R_3}{\underline{Z}(j\omega_2)} \underline{I}_q, \quad \underline{Z}(j\omega_2) = R_2 + R_3 + R_L + j\omega_2 L.$$

Nach dem Überlagerungssatz erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} i_L &= \operatorname{Re} \left[\underline{I}_{L1} \sqrt{2} e^{j\omega_1 t} + \underline{I}_{L2} \sqrt{2} e^{j\omega_2 t} \right] \\ &= -\operatorname{Re} \left[\frac{R_2}{\underline{Z}(j\omega_1)} \frac{\beta}{R_1} \underline{U}_q \sqrt{2} e^{j\omega_1 t} \right] - \operatorname{Re} \left[\frac{R_3}{\underline{Z}(j\omega_2)} \underline{I}_q \sqrt{2} e^{j\omega_2 t} \right], \end{aligned}$$

den gesuchten Stromverlauf im Spulenzweig.

S.2 Umkehrungssatz

Der Umkehrungssatz - er ist in ähnlicher Form in ganz unterschiedlichen Gebieten der klassischen Physik anzutreffen - lautet in einer vagen Formulierung: „Vertauschen Ursache und Wirkung ihren Ort, so erhält man bei gleich bleibender Ursache dieselbe Wirkung.“ Dies gilt natürlich nur unter gewissen Voraussetzungen, und außerdem sind die Begriffe „Ursache“ und „Wirkung“ zu klären.

Um zu einer präzisen Fassung zu gelangen, werden wir zuerst eine allgemeinere Aussage ableiten und diese dann spezialisieren. Wir ziehen dazu aus einer Schaltung zwei Zweige heraus, von denen wir annehmen, dass sie nicht miteinander oder mit Zweigen der restlichen Schaltung \mathcal{S} gekoppelt sind (induktiv oder über gesteuerte Quellen) (Abb.S.2). Es kann sich dabei um zwei bereits in der ursprünglichen Schaltung vorhandene Anschlusspaare handeln, über die unsere Schaltung mit anderen Schaltungen elektrisch verbunden ist (z.B. Eingang und Ausgang eines Zweitorts), oder um zusätzliche Anschlusspaare, die durch Auftrennen von Zweigen entstehen und die Beschaltungen mit weiteren Stromkreiselementen gestatten. Fassen wir weiters die Zweigspannungen und Zweigströme in der restlichen Schaltung \mathcal{S} in den Spaltenmatrizen $\underline{\tilde{U}}$ bzw. $\underline{\tilde{I}}$ zusammen und betrachten wir zwei unterschiedliche Verteilungen in der gleichen Schaltung \mathcal{S} (Abb.S.2), so folgt jedenfalls aus dem Satz von Tellegen Gl.(T.28)

$$\underline{U}_1 \underline{I}'_1 + \underline{U}_2 \underline{I}'_2 + \underline{U}'^T \underline{I}' = \underline{U}'_1 \underline{I}_1 + \underline{U}'_2 \underline{I}_2 + \underline{U}'^T \underline{I}. \quad (\text{S.2})$$

Als nächstes werden folgende Annahmen über die restliche Schaltung \mathcal{S} getroffen: \mathcal{S} ist **linear**, **zeitinvariant** und enthält **keine unabhängigen Quellen**. Damit verschwinden in den Zweiggleichungen (A.6) die Quellenmatrizen und es gilt

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{U}} &= \underline{Z} \underline{\tilde{I}}, & \underline{U}' &= \underline{Z} \underline{I}', \\ \underline{\tilde{U}}^T \underline{I}' - \underline{U}'^T \underline{I} &= (\underline{Z} \underline{\tilde{I}})^T \underline{I}' - (\underline{Z} \underline{I}')^T \underline{I} \\ &= \underline{I}'^T \underline{Z}^T \underline{\tilde{I}} - \underline{I}'^T \underline{Z}^T \underline{I} = \underline{I}'^T (\underline{Z}^T - \underline{Z}) \underline{I}. \end{aligned} \quad (\text{S.3})$$

(Beachten Sie: $\underline{I}'^T \underline{Z}^T \underline{I}$ ist eine 1×1 - Matrix und damit gleich ihrer Transponierten.) Der letzte Ausdruck liefert null, wenn wir schließlich $\underline{Z}^T = \underline{Z}$, d.h. die **Symmetrie der Zweigimpedanzmatrix** von \mathcal{S} voraussetzen. Gl.(S.2) reduziert sich dann auf den **Umkehrungssatz (Reziprozitätstheorem)**

$$\underline{U}_1 \underline{I}'_1 + \underline{U}_2 \underline{I}'_2 = \underline{U}'_1 \underline{I}_1 + \underline{U}'_2 \underline{I}_2, \quad (\text{S.4})$$

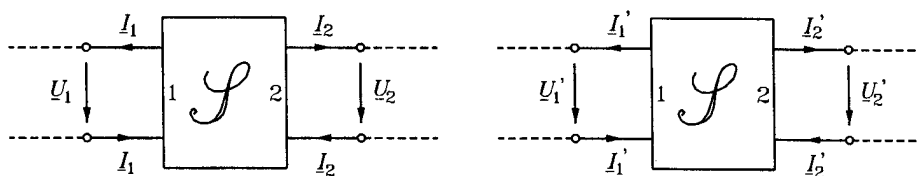


Abb.S.2 Zur Herleitung des Umkehrungssatzes. Aus einer Schaltung werden zwei Anschlusspaare herausgezogen. Dann werden zwei unterschiedliche Verteilungen von Spannungen und Strömen miteinander verglichen.

eine bemerkenswerte Aussage, wie Sie gleich sehen werden. Die vorausgesetzte Symmetrie der Zweigimpedanzmatrix ist übrigens für (Ersatz-)Schaltungen, die nur aus idealen Widerständen, Spulen (mit oder ohne Kopplung) und Kondensatoren aufgebaut sind („RLCM - Schaltungen“, „lineare passive Schaltungen“), stets gewährleistet. Unbedingt notwendig ist eine Beschränkung auf diese Stromkreiselemente allerdings nicht. Die Schaltung kann durchaus z.B. negative (Ersatz-)Widerstände oder auch linear gesteuerte Quellen enthalten, wenn die dadurch bedingten Zweigkopplungen symmetrisch sind, die Symmetrie der Zweigimpedanzmatrix also nicht zerstört wird.

Sehen wir uns nun Spezialfälle an! Angenommen, am ersten Tor wird der Strom \underline{I} eingepreßt (Ursache) und als Reaktion darauf erscheint am leerlaufenden zweiten Tor die Spannung \underline{U}_2 (Wirkung) (Abb.S.3a). Umgekehrt liefere der gleiche Strom \underline{I} , am zweiten Tor eingepreßt (Ursache), am ersten Tor die Leerlaufspannung \underline{U}'_1 (Wirkung) (Abb.S.3b). Aus Gl.(S.4) folgt dann wegen $\underline{I}_1 = \underline{I}'_2 = \underline{I}$ und $\underline{I}_2 = \underline{I}'_1 = 0$ das Ergebnis $\underline{U}_2 = \underline{U}'_1$, die beiden Leerlaufspannungen sind demnach gleich. Dies ist insofern bemerkenswert und auch überraschend, als die anderen Zweigspannungen der Schaltung in den beiden Fällen völlig unterschiedlich sein können.

Die duale Situation sehen Sie in den Abbn.S.3c und d. Hier wird zunächst am ersten Tor die Spannung \underline{U} eingepreßt und am zweiten Tor der Kurzschlussstrom \underline{I}_2 bestimmt. Die gleiche Spannung \underline{U} am zweiten Tor angelegt liefert dann wegen Gl.(S.4) mit $\underline{U}_1 = \underline{U}'_2 = \underline{U}$ und $\underline{U}_2 = \underline{U}'_1 = 0$ den Zusammenhang $\underline{I}_2 = \underline{I}'_1$, also den gleichen Kurzschlussstrom am ersten Tor.

Ein einfaches, konkretes **Beispiel** soll die Aussagen des Umkehrungssatzes weiter verdeutlichen. In der Schaltung aus Abb.S.4 speist eine Sinusstromquelle \underline{I}_q zwei parallele Zweige. Wir interessieren uns zuerst für die eingeschwungene

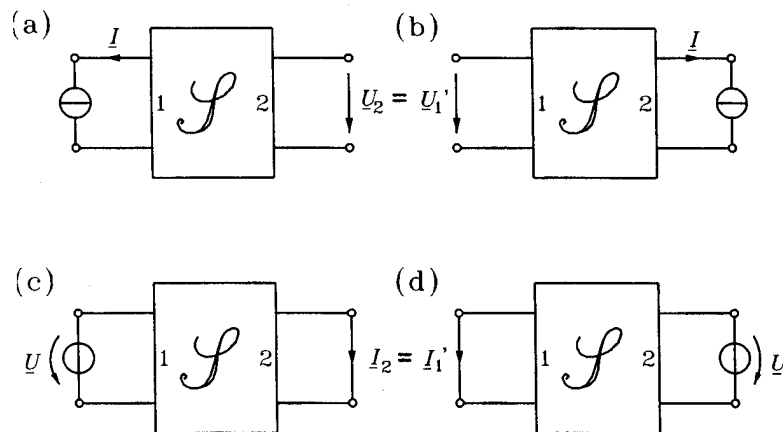


Abb.S.3 Anwendungen des Umkehrungssatzes (Reziprozitätstheorem). Bewirkt der Strom \underline{I} am ersten Tor die Leerlaufspannung \underline{U}_2 am zweiten Tor (a), so ruft der gleiche Strom \underline{I} am zweiten Tor die gleiche Leerlaufspannung $\underline{U}'_1 = \underline{U}_2$ am ersten Tor hervor (b). Und: Bewirkt die Spannung \underline{U} am ersten Tor den Kurzschlussstrom \underline{I}_2 am zweiten Tor (c), dann erzeugt die gleiche Spannung \underline{U} am zweiten Tor auch den gleichen Kurzschlussstrom $\underline{I}'_1 = \underline{I}_2$ am ersten Tor (d). Voraussetzung: Die lineare, zeitinvariante Schaltung \mathcal{S} enthält keine unabhängigen Quellen und besitzt eine symmetrische Zweigimpedanzmatrix.

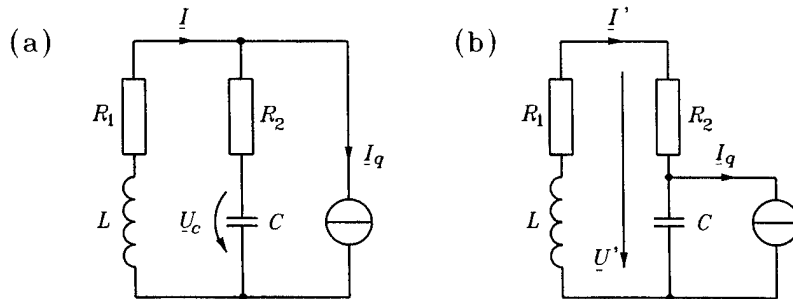


Abb.S.4 Trotz unterschiedlicher Strom- und Spannungsverteilungen in den beiden Schaltungen liefert der Umkehrungssatz $\underline{U}_C = \underline{U}'$.

Kondensatorspannung \underline{U}_C . Unter Verwendung der Stromteilerregel ergibt sich

$$\frac{I_q - \underline{I}}{I_q} = \frac{R_1 + j\omega L}{R_1 + R_2 + j\omega L + 1/(j\omega C)} = \frac{j\omega C(R_1 + j\omega L)}{1 - \omega^2 LC + j\omega(R_1 + R_2)C},$$

$$\underline{U}_C = -\frac{I_q - \underline{I}}{j\omega C} = -\frac{R_1 + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega(R_1 + R_2)C} I_q. \quad (\text{S.5})$$

Liegt dagegen wie in Abb.S.4b die Stromquelle direkt am Kondensator, so können wir mit dem Umkehrungssatz ohne weitere Rechnung sofort die Zweigspannung \underline{U}' angeben, nämlich $\underline{U}' = \underline{U}_C$. Tatsächlich liefert eine Überprüfung

$$\frac{\underline{I}'}{I_q} = \frac{1/(j\omega C)}{R_1 + R_2 + j\omega L + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega(R_1 + R_2)C},$$

$$\underline{U}' = -(R_1 + j\omega L)\underline{I}' = -\frac{R_1 + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega(R_1 + R_2)C} I_q,$$

also wieder den Ausdruck (S.5).

S.3 Sätze über Ersatzquellen

Wie verhält sich eine Schaltung in Bezug auf irgendeinen ihrer Zweige? Die nun zu besprechenden Sätze von der Ersatzspannungsquelle und von der Ersatzstromquelle - sie gehen im Kern auf Helmholtz zurück und werden in der englischsprachigen Literatur meist mit den Namen Thévenin und Norton verknüpft - geben darüber für lineare Schaltungen Auskunft.

Wir betrachten einen **beliebigen Zweig** mit der Zweigspannung u und dem Zweigstrom i , der mit der restlichen Schaltung **nicht gekoppelt** ist (induktiv oder über gesteuerte Quellen). Die **restliche Schaltung S** wird als **linear** vorausgesetzt, kann aber sonst ganz allgemein aufgebaut sein und auch unabhängige oder linear gesteuerte Quellen enthalten (Abb.S.5a). Charakteristische Größen

von \mathcal{S} sind die Leerlaufspannung u_L und der Kurzschlussstrom i_K (Abb.S.5c und d). Weiters definieren wir die der Schaltung \mathcal{S} zugeordnete **Thévenin-Schaltung** \mathcal{S}_T . Dazu werden alle unabhängigen Quellen aus \mathcal{S} entfernt, d.h. alle idealen Stromquellen werden durch Unterbrechungen und alle idealen Spannungsquellen durch Kurzschlüsse ersetzt. Die linear gesteuerten Quellen sind jedoch in der Schaltung zu belassen. Mit diesen Festlegungen gilt:

Satz von der Ersatzspannungsquelle (Thévenin-Theorem): In Bezug auf ein Tor lässt sich jede lineare Schaltung durch ihre Leerlaufspannung als ideale Spannungsquelle in Reihe mit der zugeordneten Thévenin-Schaltung ersetzen (Abb.S.6a).

Satz von der Ersatzstromquelle (Norton-Theorem): In Bezug auf ein Tor lässt sich jede lineare Schaltung durch ihren Kurzschlussstrom als ideale Stromquelle parallel zu der zugeordneten Thévenin-Schaltung ersetzen (Abb.S.6b).

Beachten Sie: Die Äquivalenzen gelten nur bezüglich des betrachteten Tores. Beispielsweise werden die Leistungsumsätze in der Schaltung \mathcal{S} durch die Ersatzquellen i.a. nicht richtig wiedergegeben.

Bei der Anwendung dieser Sätze auf eine vorliegende Schaltung \mathcal{S} können Sie die Leerlaufspannung oder den Kurzschlussstrom mit einem der gängigen Verfahren berechnen. Wird im Frequenzbereich gearbeitet (komplexe Wechselstromrechnung), reduziert sich die zugeordnete Thévenin-Schaltung als linearer Zweipol mit verschwindender Leerlaufspannung bzw. mit verschwindendem Kurzschlussstrom auf die **Thévenin-Impedanz** \underline{Z}_T , die Innenimpedanz der Ersatzquelle. Wenn die Schaltung keine gesteuerten Quellen enthält, lässt sich \underline{Z}_T

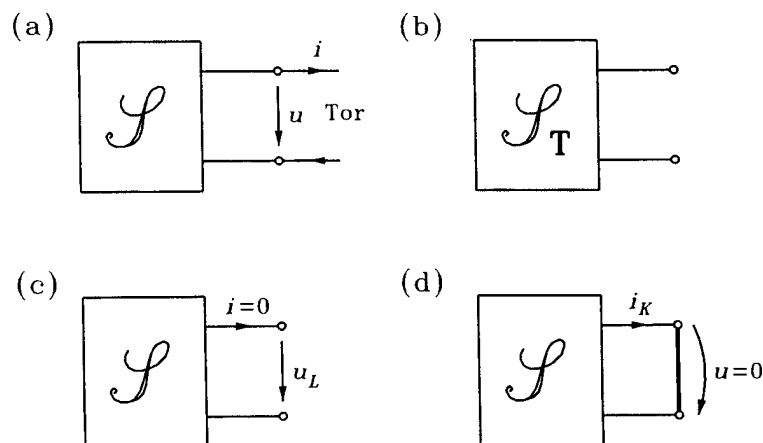


Abb.S.5 Zur Definition der Ersatzquellen. (a) Der betrachtete Zweig wird aus der Schaltung herausgezogen und durch ein allgemeines Tor (Anschlusspaar) repräsentiert. (b) Durch Entfernen der unabhängigen Quellen erhält man aus \mathcal{S} die zugeordnete Thévenin-Schaltung \mathcal{S}_T . Kenngrößen der Schaltung sind (c) ihre Leerlaufspannung u_L und (d) ihr Kurzschlussstrom i_K .

in der Regel durch eine gewöhnliche Schaltungsumwandlung berechnen (Reihen- und Parallelschaltung, Dreieck-Stern-Umwandlung). Ansonsten wenden Sie eines der folgenden Verfahren an:

- (i) Legen Sie an das Tor von \mathcal{S}_T eine Spannung \underline{U} und berechnen Sie den aufgenommenen Strom \underline{I} . Dann ist $\underline{Z}_T = \underline{U}/\underline{I}$.
- (ii) Legen Sie an das Tor von \mathcal{S}_T einen Strom \underline{I} und berechnen Sie die sich dabei einstellende Spannung \underline{U} . Es gilt wieder $\underline{Z}_T = \underline{U}/\underline{I}$.
- (iii) Berechnen Sie die Leerlaufspannung \underline{U}_L und den Kurzschlussstrom \underline{I}_K der ursprünglichen Schaltung \mathcal{S} . Dann ist die gesuchte Impedanz $\underline{Z}_T = \underline{U}_L/\underline{I}_K$.

Die Sätze von den Ersatzquellen sind Anwendungen des Überlagerungssatzes: Angenommen, wir legen an das Tor von \mathcal{S} anstelle der äußeren Beschaltung eine ideale Spannungsquelle mit der Zweigspannung \underline{U} als Quellenspannung. Damit wird die Strom- und Spannungsverteilung in \mathcal{S} nicht geändert. Nach dem Überlagerungssatz lässt sich der Strom \underline{I} nun aufspalten in zwei Anteile, $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$, wobei \underline{I}_1 nur von den unabhängigen Quellen in \mathcal{S} für $\underline{U} = 0$ herrührt, also gleich dem Kurzschlussstrom \underline{I}_K ist, während sich \underline{I}_2 ausschließlich zufolge \underline{U} nach dem Nullsetzen aller unabhängigen Quellen in \mathcal{S} ergibt, d.h. $\underline{I}_1 = \underline{I}_K$, $\underline{I}_2 = -\underline{U}/\underline{Z}_T$. Daraus folgt

$$\underline{I} = \underline{I}_K - \underline{U}/\underline{Z}_T, \quad (\text{S.6})$$

was genau den Inhalt des Satzes von der Ersatzspannungsquelle wiedergibt. Durch Anlegen einer Stromquelle \underline{I} zeigt man ganz analog

$$\underline{U} = \underline{U}_L - \underline{Z}_T \underline{I}, \quad (\text{S.7})$$

die Formulierung des Satzes von der Ersatzspannungsquelle.

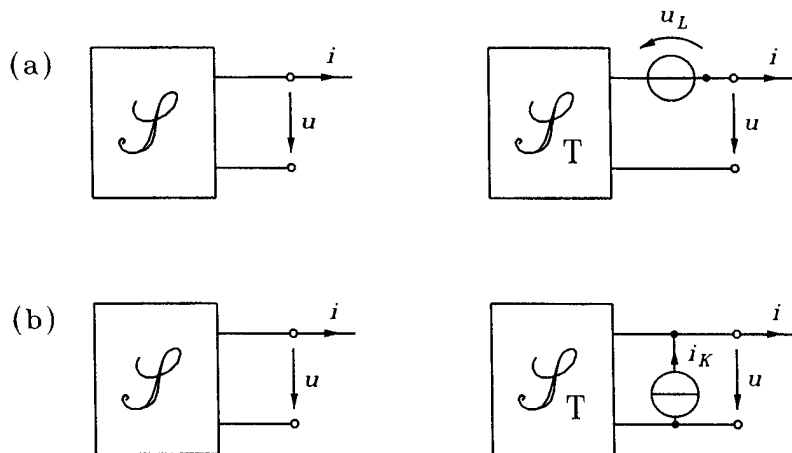


Abb. S.6 Bezüglich des betrachteten Tores lässt sich die Schaltung \mathcal{S} ersetzen durch die zugeordnete Thévenin-Schaltung \mathcal{S}_T zusammen mit entweder (a) der Leerlaufspannung u_L von \mathcal{S} als idealer Spannungsquelle oder (b) dem Kurzschlussstrom i_K von \mathcal{S} als idealer Stromquelle.

Als einfaches **Beispiel** soll der eingeschwungene Strom im Querzweig einer Wechselstrombrücke berechnet werden (Abb.S.7a). Wir ziehen dazu den Querzweig heraus und stellen die verbleibende Schaltung als Spannungsquelle mit Innenimpedanz dar (Abb.S.7b). Die zugehörige Quellenspannung \underline{U}_L lässt sich als Leerlaufspannung am betrachteten Tor nach der Spannungsteilerregel sofort angeben (Abb.S.7c):

$$\underline{U}_L = \left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} - \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \right) \underline{U}_q.$$

Ebenso einfach ist die Innenimpedanz \underline{Z}_T als Ersatzimpedanz der zugeordneten Thévenin-Schaltung zu bestimmen (Abb.S.7d):

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_1 \parallel \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \parallel \underline{Z}_4 = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}.$$

Der gesuchte Strom folgt dann aus

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_L}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_5}.$$

Wie Sie sehen, ist diese Art der Rechnung sehr direkt und sparsam.

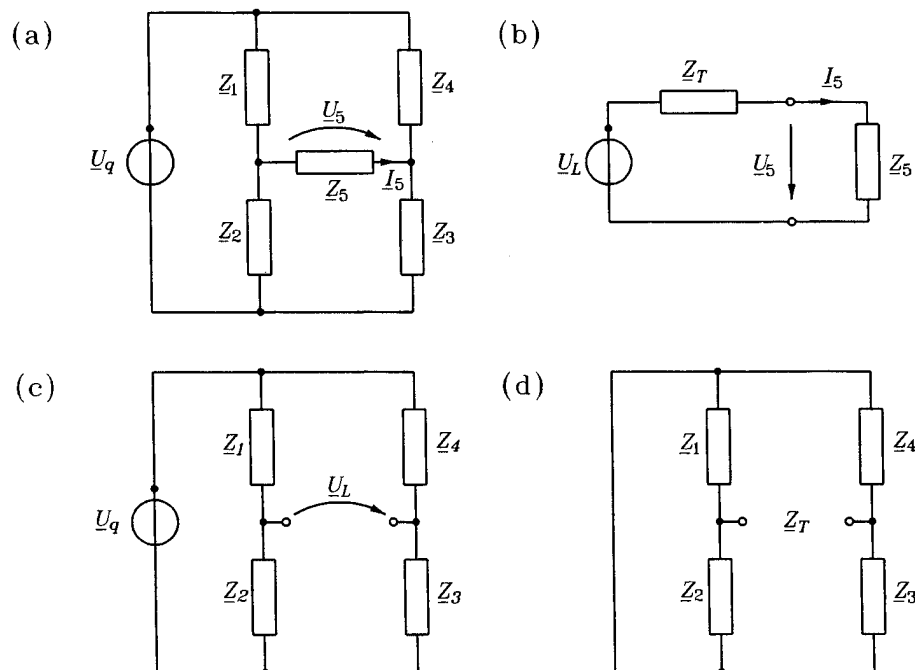


Abb.S.7 Beispiel zur Anwendung des Satzes von der Ersatzspannungsquelle. In der Wechselstrombrücke (a) sind die Quellenspannung \underline{U}_q und die Impedanzen \underline{Z}_1 bis \underline{Z}_5 bekannt. Es soll der eingeschwungene Strom \underline{I}_5 durch die Impedanz \underline{Z}_5 bestimmt werden. Die Parameter \underline{U}_L und \underline{Z}_T der Ersatzspannungsquelle (b) werden als Leerlaufspannung am betrachteten Tor (c) und als Ersatzimpedanz der zugeordneten Thévenin-Schaltung (d) betrachtet.

Ein zweites **Beispiel** soll das Vorgehen bei gesteuerten Quellen zeigen. Wir behandeln die vereinfachte, aus einer Stromquelle gespeiste Transistor-Ersatzschaltung gemäß Abb.S.8. Gesucht ist der Zusammenhang zwischen der Ausgangsspannung u_2 und dem Ausgangsstrom i_2 in Abhängigkeit vom Quellenstrom i_q und den Schaltungsparametern. Zuerst wird der Kurzschlussstrom durch Anwenden der Kirchhoff-Regeln berechnet,

$$\begin{aligned} i_K &= i_2 \quad \text{für} \quad u_2 = 0 : \\ i_K &= -\beta i_1, \quad R_1 i_1 + R_S (i_1 - i_q) = 0, \\ i_K &= \frac{-\beta R_S}{R_S + R_1} i_q. \end{aligned} \quad (\text{S.8})$$

Ähnlich ergibt sich für die Leerlaufspannung

$$\begin{aligned} u_L &= u_2 \quad \text{für} \quad i_2 = 0 : \\ u_L &= -R_2 \beta i_1, \quad R_1 i_1 + \alpha u_L + R_S (i_1 - i_q) = 0, \\ u_L &= \frac{-\beta R_S R_2}{R_S + R_1 - \alpha \beta R_2} i_q. \end{aligned} \quad (\text{S.9})$$

Die Ersatzimpedanz \underline{Z}_T der zugeordneten Thévenin-Schaltung, berechnet nach dem Verfahren (iii), reduziert sich in unserem Fall auf einen Widerstand mit dem Wert

$$R_T = \frac{u_L}{i_K} = \frac{(R_S + R_1) R_2}{R_S + R_1 - \alpha \beta R_2}. \quad (\text{S.10})$$

Damit liegt das Ergebnis bereits vor (Abb.S.9).

Die Methode der Ersatzquellen liefert als Rechenverfahren für bestimmte Aufgaben die Antworten mit geringem Aufwand. Noch wichtiger ist jedoch die damit verknüpfte Betrachtungsweise: Wie kompliziert eine lineare Schaltung auch immer sein mag, von einem Tor aus gesehen lässt sie sich jedenfalls als einzelne Impedanz in Reihe mit einer idealen Spannungsquelle oder als einzelne Impedanz parallel zu einer idealen Stromquelle betrachten.

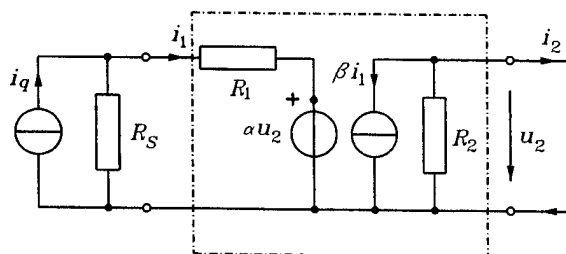


Abb. S.8 Beispiel zur Anwendung von Ersatzquellen. Eine vereinfachte Transistor-Ersatzschaltung wird von einer Stromquelle angesteuert. Gesucht ist der Zusammenhang der Ausgangsgrößen u_2 und i_2 bei beliebiger Ausgangsbeschaltung.

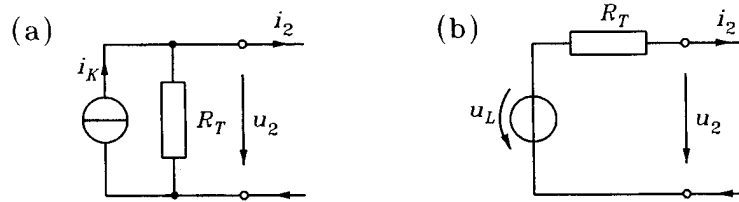


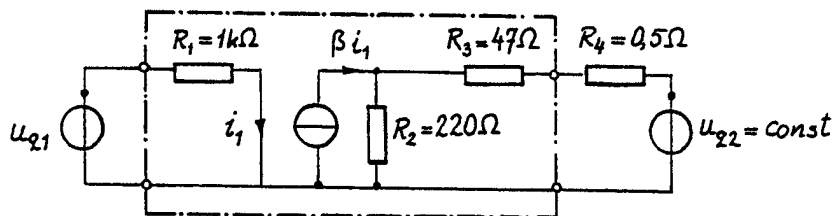
Abb.S.9 Bezüglich des Ausgangs lässt sich die ganze Schaltung aus Abb.S.8 gleichwertig darstellen entweder als Stromquelle (a) oder als Spannungsquelle (b), jeweils mit dem Innenwiderstand R_T . Die Größen i_K , u_L und R_T sind durch die Ausdrücke (S.8), (S.9), (S.10) gegeben.

S.4 Fragen

1. Wann nennen wir eine Schaltung linear und zeitinvariant?
2. Was genau verstehen Sie unter einer linear gesteuerten Quelle?
3. Wie lautet der Überlagerungssatz in einer vagen, aber treffenden Formulierung?
4. Was drückt der Überlagerungssatz für elektrische Schaltungen aus? Unter welchen Voraussetzungen gilt er?
5. Können Sie das Reziprozitätstheorem in einer unpräzisen, aber einprägsamen Form wiedergeben?
6. Welche Eigenschaften müssen elektrische Schaltungen besitzen, damit der Umkehrungssatz anwendbar ist? Was besagt er?
7. Wie lauten die Sätze von den Ersatzquellen? Unter welchen Voraussetzungen gelten sie?
8. Wie ist die zugeordnete Thévenin-Schaltung definiert? Warum müssen Sie gesteuerte Quellen in der zugeordneten Thévenin-Schaltung belassen?
9. Unter welchen Umständen lässt sich die zugeordnete Thévenin-Schaltung durch eine Impedanz darstellen? Wie finden Sie diese?
10. Welche Rolle übernimmt die Thévenin-Impedanz in den Ersatzquellen?

S.5 Aufgaben

AS.1 Überlagerungssatz: Die Ersatzschaltung aus Abb.AS.1 enthält links eine Sinusspannungsquelle und rechts eine Gleichspannungsquelle. Die mittlere Quelle ist linear gesteuert. Berechnen Sie zuerst den Stromverlauf $i_3(t)$ und dann die Leistung, die der Widerstand R_3 im zeitlichen Mittel aufnehmen muss.



$$u_{q1} = \operatorname{Re}(U_{q1} \sqrt{2} e^{j\omega t}), U_{q1} = 5V; u_{q2} = U_{q2} = 10V; \beta = 9$$

Abb. AS.1

AS.2 Auswirkung einer Spannungsänderung: Untersuchen Sie, wie sich in der Wechselstrom-Ersatzschaltung aus Abb. AS.2a eine Änderung der Spannung \underline{U}_1 auf den Strom \underline{I}_L (komplexe Effektivwerte) im eingeschwungenen Zustand auswirkt, d.h. berechnen Sie $\Delta \underline{I}_L$ zu $\Delta \underline{U}_1$.

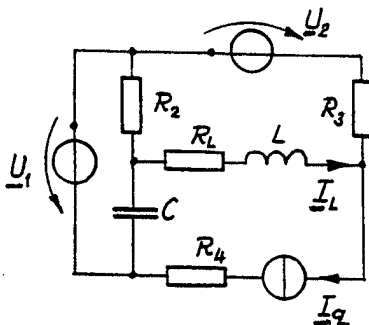


Abb. AS.2a

AS.3 Umkehrungssatz: An einem reziproken (kopplungssymmetrischen) Zweitor (Abb. AS.3) werden im eingeschwungenen Zustand die Spannungen und Ströme

$$\underline{U}_1 = 3,45V;$$

$$\underline{I}_1 = 1,00A \cdot e^{j18,4^\circ};$$

$$\underline{U}_2 = 0;$$

$$\underline{I}_2 = -0,71A \cdot e^{-j26,6^\circ}$$

gemessen. Berechnen Sie daraus den Eingangsstrom \underline{I}'_1 bei gleichzeitigem Anliegen der Spannungen

$$\underline{U}'_1 = 5,00V \cdot e^{-j90^\circ};$$

$$\underline{U}'_2 = 5,00V.$$

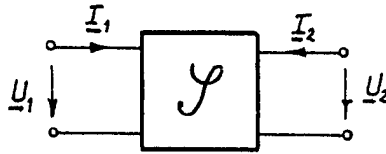


Abb.AS.3a

AS.4 Ersatzstromquelle: Die in Abb.AS.4a angegebene Beschaltung eines Tores soll für den eingeschwungenen Zustand durch die äquivalente Stromquelle nach Abb.AS.4b ersetzt werden. Bestimmen Sie deren Parameter \underline{Z}_T und \underline{I}_q .

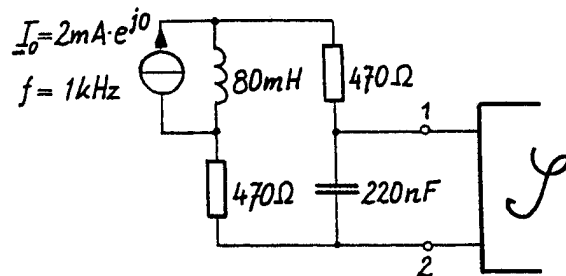


Abb.AS.4a

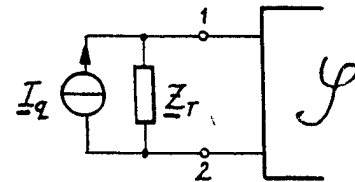


Abb.AS.4b

AS.5 Ersatzspannungsquelle: Der Schaltungsteil aus Abb.AS.5a - er enthält eine unabhängige Sinusspannungsquelle und eine gesteuerte Stromquelle - soll für eine nachfolgende Wechselstromanalyse durch eine äquivalente Spannungsquelle ersetzt werden. Bestimmen Sie deren Parameter.

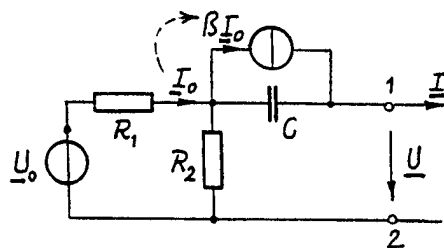


Abb.AS.5a

Kapitel Z

Zweitore

Elektrische Schaltungen werden in der Regel funktionsgerichtet entworfen, d.h. sie haben bestimmte Aufgaben zu erfüllen. Beispielsweise soll ein Verstärker zu einem vorgegebenen Eingangssignal ein entsprechend vergrößertes, sonst aber möglichst getreues Abbild als Ausgangssignal liefern, oder ein Filter soll Signale in einem bestimmten Frequenzbereich möglichst unverändert übertragen, andere aber sperren. Wie eine Schaltung diese ihr übertragene Aufgabe im Detail erledigt, ist für viele Anwendungen von untergeordneter Bedeutung. Es kommt in dieser funktionsorientierten Betrachtungsweise also auf das Eingangs-Ausgangs-Verhalten an, oder, etwas allgemeiner ausgedrückt, auf die Beantwortung der Frage, welche Ursachen welche Wirkungen hervorrufen.

Die elektrische Wechselwirkung einer Schaltung mit ihrer Umgebung erfolgt bekanntlich über die Ströme und Spannungen an den äußeren Anschlüssen. Gibt es insgesamt $n \geq 2$ Anschlusspunkte oder Pole, dann nennen wir solch eine Schaltung einen **n -Pol** und es stellt sich die Aufgabe, die Zusammenhänge zwischen den Anschlussströmen und den Anschlussspannungen zu beschreiben.

Z.1 Mehrtore

Für die Anwendungen von besonderer Bedeutung sind mehrpolige Schaltungen, die durch äußere Zweipole derart betrieben werden, dass sich die Anschlüsse paarweise zu Toren zusammenfassen lassen. Dabei nennen wir ein Anschlusspaar dann ein **Tor**, wenn der an dem einen Anschluss zufließende Strom zu jedem Zeitpunkt gleich dem am anderen Anschluss abfließenden Strom ist. Eine Schaltung dieser Art mit n Toren heißt **n -Tor**, in einer früher üblichen Bezeichnung auch **$2n$ -Pol** (Abb.Z.1).

Ganz wesentlich für die folgenden Überlegungen sind zwei Voraussetzungen: Die Stromkreiselemente, aus denen unser n -Tor aufgebaut ist, verhalten sich im betrachteten Betriebsbereich **linear** (genauer: sind durch lineare Elementgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreibbar), und, die innere Schaltung enthält **keine unabhängigen Strom- oder Spannungsquellen**. Überdies er-

folgt die Beschreibung im Rahmen der **komplexen Wechselstromrechnung**; mit den Strömen und Spannungen sind in der Regel deren komplexe Effektivwerte gemeint. Damit können wir den **Überlagerungssatz** (das Superpositionsprinzip) in seiner algebraischen Form verwenden, d.h., grob gesprochen, jede Wirkung als Linearkombination ihrer Ursachen angeben.

Nehmen wir zuerst an, die n Torspannungen $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \dots, \underline{U}_n$ bilden ein unabhängiges (frei wählbares) System von Erregungen (Ursachen), und als Reaktion (Wirkung) darauf entsteht das System der n Torströme $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \dots, \underline{I}_n$. Da es in der Schaltung sonst keine unabhängigen Quellen (Ursachen) gibt, lassen sich die Torströme ohne weiteres als Linearkombinationen der Torspannungen in der Form der **Admittanzgleichungen** des n -Tors darstellen,

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 + \dots + \underline{Y}_{1n}\underline{U}_n, \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 + \dots + \underline{Y}_{2n}\underline{U}_n, \\ &\vdots \\ \underline{I}_n &= \underline{Y}_{n1}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{n2}\underline{U}_2 + \dots + \underline{Y}_{nn}\underline{U}_n, \end{aligned} \quad (\text{Z.1})$$

oder, mit den $n \times 1$ - Matrizen

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{I}} &= [\underline{I}_1, \underline{I}_2, \dots, \underline{I}_n]^T, \\ \underline{\tilde{U}} &= [\underline{U}_1, \underline{U}_2, \dots, \underline{U}_n]^T \end{aligned} \quad (\text{Z.2})$$

und der $n \times n$ - Matrix \underline{Y} der Koeffizienten \underline{Y}_{ij} in der kompakten Schreibweise

$$\underline{\tilde{I}} = \underline{Y}\underline{\tilde{U}}. \quad (\text{Z.3})$$

Die Matrix \underline{Y} heißt **Admittanzmatrix** des n -Tors, ihre Elemente sind die **Admittanzparameter**. Insbesondere nennt man \underline{Y}_{ii} die Kurzschlussadmittanz des Tors i - es handelt sich nämlich um die Eingangsadmittanz dieses Tors, wenn alle anderen Tore kurzgeschlossen sind. Weiters heißt \underline{Y}_{ij} mit $i \neq j$ die **Kopplungsadmittanz** des Tors i mit dem Tor j für **Kurzschluss** an allen Toren mit Ausnahme des Tors j ($\underline{Y}_{ij} = \underline{I}_i / \underline{U}_j$ mit $\underline{U}_k = 0$ für alle $k \neq j$).

Wir können aber auch die n Torströme als voneinander unabhängige Erregungsgrößen betrachten und erhalten dann umgekehrt die n Torspannungen aus

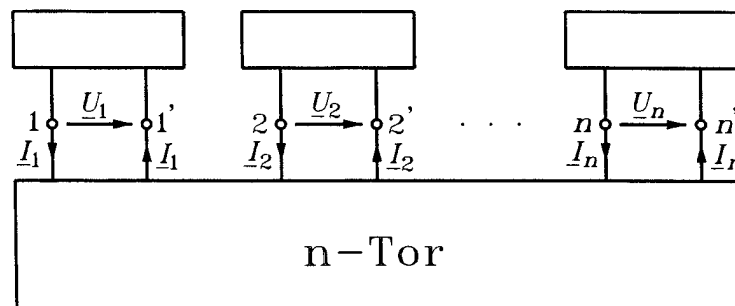


Abb.Z.1 n -Tor mit Spannungen und Strömen im Verbraucher Bezugssystem. An jedem Tor ist der zufließende Strom gleich dem abfließenden.

den **Impedanzgleichungen** des n -Tors,

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_{1n}\underline{I}_n, \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_{2n}\underline{I}_n, \\ &\vdots \\ \underline{U}_n &= \underline{Z}_{n1}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{n2}\underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_{nn}\underline{I}_n, \end{aligned} \quad (\text{Z.4})$$

oder in Matrixform,

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{Z}}\underline{\underline{I}}. \quad (\text{Z.5})$$

Die $n \times n$ -Matrix $\underline{\underline{Z}}$ ist die **Impedanzmatrix** des n -Tors, ihre Elemente \underline{Z}_{ij} heißen **Impedanzparameter**. Im speziellen nennen wir \underline{Z}_{ii} die **Leerlaufimpedanz** des Tors i , weil sich diese Größe als Eingangsimpedanz dieses Tors ergibt, wenn alle anderen Tore offen sind. Für $i \neq j$ heißt \underline{Z}_{ij} die **Kopplungsimpedanz** des Tors i mit dem Tor j für Leerlauf an allen Toren mit Ausnahme des Tors j ($\underline{Z}_{ij} = \underline{U}_i/\underline{I}_j$ mit $\underline{I}_k = 0$ für alle $k \neq j$).

Ist die Admittanzmatrix $\underline{\underline{Y}}$ und die Impedanzmatrix $\underline{\underline{Z}}$ eines Mehrtors regulär, so besteht der Zusammenhang

$$\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Y}}^{-1}. \quad (\text{Z.6})$$

Wir nennen ein Mehrtor im speziellen **kopplungssymmetrisch** oder reziprok, wenn seine Admittanzmatrix bzw. seine Impedanzmatrix symmetrisch ist.

Es kann vorkommen, dass die gewählten Erregungsgrößen nicht unabhängig voneinander vorgebar sind. In solchen Fällen müssen die beschreibenden Gleichungen nicht notwendig in der Form (Z.1) oder (Z.4) existieren - ein typisches Beispiel dafür ist der ideale Transformator; es gibt aber immer mindestens eine der nun zu besprechenden gemischten Formen.

Wir teilen alle Tore eines betrachteten n -Tors in zwei Klassen ein: Die erste Klasse enthalte k Tore („Eingangstore“) mit den Spannungen $\underline{U}_1, \dots, \underline{U}_k$ und den Strömen $\underline{I}_1, \dots, \underline{I}_k$, die zweite Klasse die restlichen $n - k$ Tore („Ausgangstore“) mit den Spannungen $\underline{U}_{k+1}, \dots, \underline{U}_n$ und den Strömen $\underline{I}_{k+1}, \dots, \underline{I}_n$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{U}}_E &= [\underline{U}_1, \dots, \underline{U}_k]^T, & \underline{\underline{U}}_A &= [\underline{U}_{k+1}, \dots, \underline{U}_n]^T, \\ \underline{\underline{I}}_E &= [\underline{I}_1, \dots, \underline{I}_k]^T, & \underline{\underline{I}}_A &= [\underline{I}_{k+1}, \dots, \underline{I}_n]^T. \end{aligned} \quad (\text{Z.7})$$

Werden nun die k „Eingangsspannungen“ $\underline{\underline{U}}_E$ und die $n - k$ „Ausgangsströme“ $\underline{\underline{I}}_A$ in Abhängigkeit von den k „Eingangsströmen“ $\underline{\underline{I}}_E$ und den $n - k$ „Ausgangsspannungen“ $\underline{\underline{U}}_A$ dargestellt, ergeben sich die **Reihenparallelgleichungen** oder **Hybridgleichungen**

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{U}}_E \\ \underline{\underline{I}}_A \end{bmatrix} = \underline{\underline{H}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}}_E \\ \underline{\underline{U}}_A \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{H}}_{EE} & \underline{\underline{H}}_{EA} \\ \underline{\underline{H}}_{AE} & \underline{\underline{H}}_{AA} \end{bmatrix}. \quad (\text{Z.8})$$

Die $n \times n$ -Matrix $\underline{\underline{H}}$ heißt **Reihenparallelmatrix** oder **Hybridmatrix**. Sie ist immer quadratisch, wie auch die Teilmatrizen $\underline{\underline{H}}_{EE}$ und $\underline{\underline{H}}_{AA}$ ($k \times k$ -Matrix

bzw. $(n-k) \times (n-k)$ -Matrix). Dagegen sind die Teilmatrizen \underline{H}_{EA} und \underline{H}_{AE} i.a. nicht quadratisch.

Eine andere Möglichkeit ist, die „Eingangsströme“ \underline{I}_E und die „Ausgangsspannungen“ \underline{U}_A durch die „Eingangsspannungen“ \underline{U}_E und die „Ausgangsströme“ \underline{I}_A auszudrücken. Dies liefert die **Parallelreihengleichungen**

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_E \\ \underline{U}_A \end{bmatrix} = \underline{P} \begin{bmatrix} \underline{U}_E \\ \underline{I}_A \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{P}_{EE} & \underline{P}_{EA} \\ \underline{P}_{AE} & \underline{P}_{AA} \end{bmatrix}. \quad (\text{Z.9})$$

Für die **Parallelreihenmatrix** \underline{P} und ihre Teilmatrizen gelten die gleichen Aussagen wie für die Matrix \underline{H} . Ist die Reihenparallelmatrix \underline{H} und die Parallelreihenmatrix \underline{P} regulär, so sind sie zueinander invers,

$$\underline{H} = \underline{P}^{-1}. \quad (\text{Z.10})$$

Wir nennen ein n -Tor **torzahlsymmetrisch** wenn die Anzahl der „Eingangstore“ gleich der Anzahl der „Ausgangstore“ ist, also $k = n/2$ gilt. In diesem Fall lassen sich die insbesondere für Kettenschaltungen (Hintereinanderschaltungen) von Mehratoren geeigneten **Kettengleichungen**

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_E \\ \underline{I}_E \end{bmatrix} = \underline{A} \begin{bmatrix} \underline{U}_A \\ -\underline{I}_A \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{EE} & \underline{A}_{EA} \\ \underline{A}_{AE} & \underline{A}_{AA} \end{bmatrix} \quad (\text{Z.11})$$

angeben. Beachten Sie das bei der einheitlichen Verwendung des Verbraucherbezugssystems auftretende Minuszeichen an \underline{I}_A (Konvention!). Die **Kettenmatrix** \underline{A} ist quadratisch, ebenso die vier angegebenen Teilmatrizen. Für **kopplungssymmetrische** (reziproke) Mehratore gilt überdies

$$\det(\underline{A}) = 1. \quad (\text{Z.12})$$

Im folgenden werden wir diese und ähnliche Begriffsbildungen spezialisieren und weiter ausbauen.

Z.2 Zweitorgleichungen

Unter den Mehratoren besitzen die Zweitore (Abb.Z.2) eine herausragende Bedeutung für die elektrotechnischen Anwendungen. Sie weisen einige Besonderheiten auf, die nun in knapper Form dargestellt werden sollen. Wie schon bisher setzen wir auch weiterhin voraus, dass die jeweils zugrundeliegende Schaltung **linear** ist, **keine unabhängigen Quellen** besitzt und im Rahmen der **komplexen Wechselstromrechnung** beschrieben wird.

Die beschreibenden Gleichungen eines linearen Zweitores ohne unabhängige Quellen - sie folgen unmittelbar aus dem Überlagerungssatz - lassen sich durch Spezialisierung der Mehrtorgleichungen sofort angeben. Insgesamt gibt es sechs mögliche Formen, von denen aber nicht in jedem Fall alle existieren.

Admittanzform

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2, \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{Y} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Z.13})$$

Impedanzform

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2, \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{Z} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Z.14})$$

Kettenform (Primärform)

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 - \underline{A}_{12}\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 - \underline{A}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \underline{A} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Z.15})$$

Umgekehrte Kettenform (Sekundärform)

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{B}_{11}\underline{U}_1 + \underline{B}_{12}\underline{I}_1, \\ \underline{I}_2 &= -\underline{B}_{21}\underline{U}_1 - \underline{B}_{22}\underline{I}_1 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{B} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{Z.16})$$

Reihenparallelform (Hybridform)

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2, \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{H} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Z.17})$$

Parallelreihenform

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{P}_{11}\underline{U}_1 + \underline{P}_{12}\underline{I}_2, \\ \underline{U}_2 &= \underline{P}_{21}\underline{U}_1 + \underline{P}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{P} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Z.18})$$

Wie die jeweiligen Koeffizienten (Zweitoreparameter) zu interpretieren sind und wie sie im Prinzip auch gemessen werden können, lässt sich nach dem Herstellen passender Leerläufe und Kurzschlüsse an den beiden Toren leicht angeben.

Natürlich sind die sechs Zweitormatrizen für ein gegebenes Zweitor nicht unabhängig voneinander. Ihre vollständigen Zusammenhänge zeigt Tab.Z.1. Im speziellen gilt

$$\underline{Z} = \underline{Y}^{-1}, \quad \underline{B} = \underline{A}^{-1}, \quad \underline{P} = \underline{H}^{-1}, \quad (\text{Z.19})$$

Regularität der Matrizen vorausgesetzt.

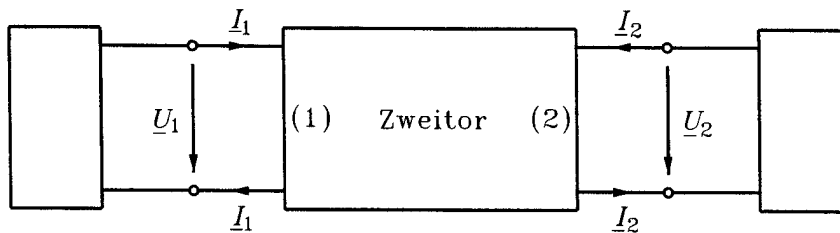
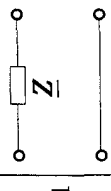
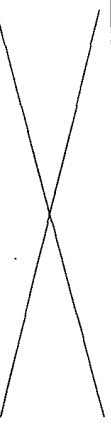
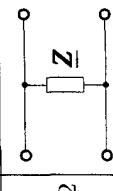
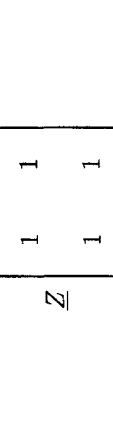

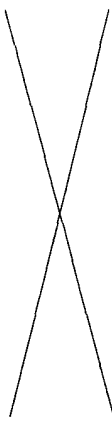
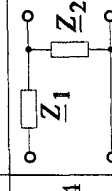
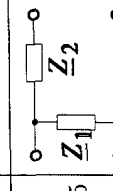
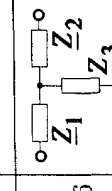
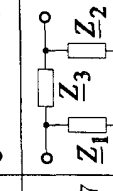


Abb.Z.2 Zweitor (Vierpol) mit angeschlossenen Netzwerken. An beiden Toren ist das Verbraucherbezugssystem zugrundegelegt.

	Y_{\sim}	Z_{\sim}	A_{\sim}	B_{\sim}	H_{\sim}	P_{\sim}
Y_{\sim}	$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{22} & -\underline{A}_{12} \\ -1 & \underline{A}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\underline{B}_{11} & 1 \\ \underline{B}_{12} & -\underline{B}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{P}_{12} & \underline{P}_{11} \\ -\underline{P}_{21} & 1 \end{bmatrix}$
Z_{\sim}	$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{12} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ 1 & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\underline{B}_{22} & -1 \\ -\underline{B}_{21} & -\underline{B}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{H}_{12} & \underline{H}_{11} \\ -\underline{H}_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\underline{P}_{12} \\ \underline{P}_{21} & \underline{P}_{11} \end{bmatrix}$
A_{\sim}	$\begin{bmatrix} -\underline{Y}_{22} & -1 \\ -\underline{Y}_{21} & -\underline{Y}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ 1 & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{B}_{22} & -\underline{B}_{12} \\ -\underline{B}_{21} & \underline{B}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\underline{H}_{12} & -\underline{H}_{11} \\ -\underline{H}_{22} & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \underline{P}_{22} \\ \underline{P}_{21} & \underline{P}_{11} \end{bmatrix}$
B_{\sim}	$\begin{bmatrix} -\underline{Y}_{11} & 1 \\ \underline{Y}_{12} & -\underline{Y}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ -1 & \underline{Z}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{22} & -\underline{A}_{12} \\ -\underline{A}_{21} & \underline{A}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\underline{H}_{11} \\ -\underline{H}_{12} & \underline{H}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\underline{P}_{12} & \underline{P}_{22} \\ \underline{P}_{11} & -1 \end{bmatrix}$
H_{\sim}	$\begin{bmatrix} 1 & -\underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{11} \\ -\underline{Z}_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{12} & \underline{A}_{11} \\ -1 & \underline{A}_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\underline{B}_{12} & 1 \\ -\underline{B}_{21} & -\underline{B}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{P}_{22} & -\underline{P}_{12} \\ -\underline{P}_{21} & \underline{P}_{11} \end{bmatrix}$
P_{\sim}	$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{11} \\ -\underline{Y}_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{21} & -\underline{A}_{11} \\ 1 & \underline{A}_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\underline{B}_{21} & -1 \\ \underline{B}_{12} & -\underline{B}_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{H}_{22} & -\underline{H}_{12} \\ -\underline{H}_{21} & \underline{H}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{P}_{11} & \underline{P}_{12} \\ \underline{P}_{21} & \underline{P}_{22} \end{bmatrix}$

Tab. Z.1 Zusammenhänge der Zweitormatrizen. Die Determinanten werden mit den entsprechenden Kernbuchstaben zwischen senkrechten Strichen bezeichnet, also $|\underline{Y}| = \det(Y_{\sim})$, $|\underline{Z}| = \det(Z_{\sim})$, usw.

	\tilde{Y}	\tilde{Z}	\tilde{A}
1	 \underline{Y} $\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{matrix}$
2	 \underline{Z}	 \underline{Z} $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{matrix}$
3			$\begin{matrix} -1, & -(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \\ 0 & -1 \end{matrix}$
4	 $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2$	$\begin{matrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2, & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 & \underline{Z}_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_2, & \underline{Z}_1 \\ \underline{Y}_2 & 1 \end{matrix}$
5	 $\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2, \underline{Y}_2$	$\begin{matrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_1 \\ \underline{Z}_1, & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & \underline{Z}_2 \\ \underline{Y}_1, & 1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}_2 \end{matrix}$
6	 $\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$	$\begin{matrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3, & \underline{Z}_3 \\ \underline{Z}_3, & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_3, \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_3 \\ \underline{Y}_3, & 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_3 \end{matrix}$
7	 $\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3, \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$	$\begin{matrix} \underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3), & \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_1 \underline{Z}_2, & \underline{Z}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_3, & \underline{Z}_3 \\ \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_3, & 1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}_3 \end{matrix}$

Tab. Z.2 Ausgewählte Matrizen einiger einfacher Zweitore, sofern sie existieren. Die verwendeten Admittanzen sind die Reziprokwerte der jeweils gleich indizierten Impedanzen, z.B. $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$, $\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1$. Symmetrische Bezugssinne im Verbraucherbezugsystem.

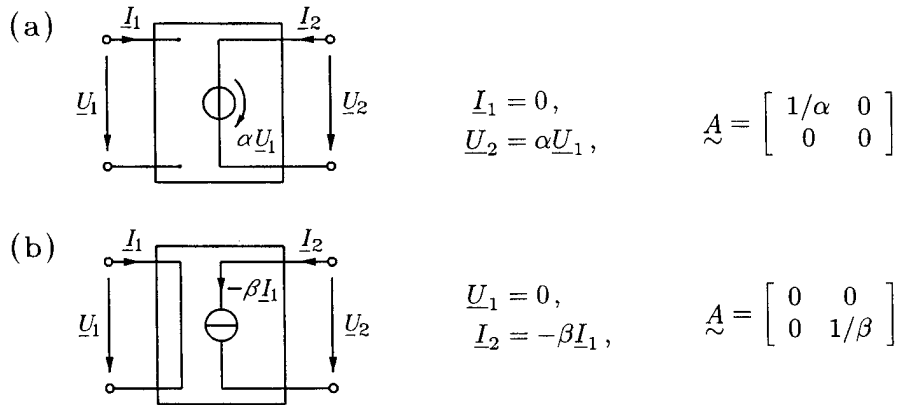


Abb.Z.3 (a) Idealer Spannungsverstärker und (b) idealer Stromverstärker, dargestellt durch linear gesteuerte Quellen. Angegeben sind auch die Elementgleichungen und die Kettenmatrizen.

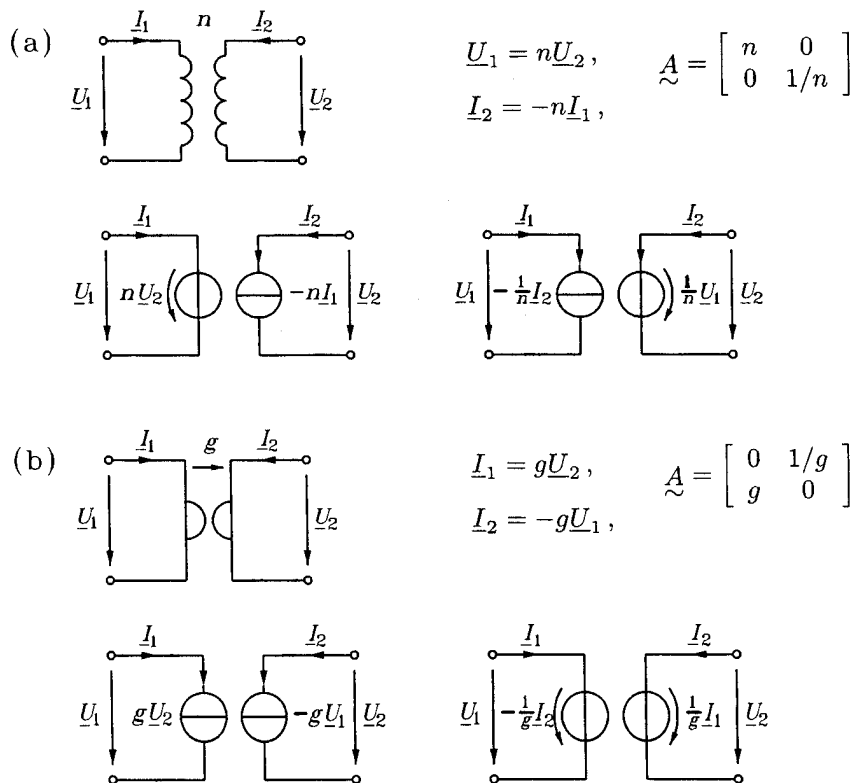


Abb.Z.4 (a) Idealer Transformator und (b) idealer Gyrator. Schaltzeichen, Elementgleichungen, Kettenmatrizen und mögliche Darstellungen durch linear gesteuerte Quellen.

In den Abbildungen Z.3 und Z.4 sehen Sie, symbolisch dargestellt, vier elementare Zweitore zusammen mit ihren Kettenmatrizen. Die anderen Zweitormatrizen - falls sie existieren - können entweder aus den ebenfalls angegebenen Elementgleichungen abgelesen oder aus \underline{A} mit Hilfe von Tab.Z.1 berechnet werden. Weitere einfache Zweitore und die zugehörigen Zweitormatrizen sind in Tab.Z.2 zusammengestellt.

Z.3 Symmetrien

Zwischen den vier im allgemeinen unabhängigen Elementen einer Zweitormatrix bestehen immer dann Bindungen, wenn das Zweitor Symmetrien besitzt bezüglich seines Aufbaus (Aufbausymmetrie, Struktursymmetrie) oder bezüglich seines Betriebsverhaltens (funktionale Symmetrie). Hinsichtlich des Aufbaus unterscheiden wir zwischen der **Aufbau-Längssymmetrie** - die Schaltung ist spiegelsymmetrisch bezüglich einer vertikalen Achse, z.B. in Tab.Z.2 die Zweitore 1, 2 und, mit $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$, auch die Zweitore 3, 6 und 7 - und der **Aufbau-Quersymmetrie** - die Schaltung ist spiegelsymmetrisch bezüglich einer horizontalen Achse, z.B. in Tab.Z.2 das Zweitor 2 und, mit $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$, auch das Zweitor 3.

Die Aufbausymmetrie schlägt sich natürlich in der für das Betriebsverhalten wichtigeren funktionalen Symmetrie nieder. Ein Zweitor heißt **kopplungssymmetrisch** (reziprok), wenn der Umkehrungssatz (das Reziprozitätstheorem) in der Form der Gl.(S.2) gilt. Daraus folgen die jeweils gleichwertigen Beziehungen

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{12} &= \underline{Y}_{21}, & \underline{Z}_{12} &= \underline{Z}_{21}, \\ \det(\underline{A}) &= \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1. \end{aligned} \quad (\text{Z.20})$$

Die Admittanzmatrix und die Impedanzmatrix eines kopplungssymmetrischen Zweitores sind also symmetrisch, die Determinante seiner Kettenmatrix besitzt den Wert 1. Äquivalente Bedingungen für die anderen Matrizen können Sie mit Tab.Z.1 ableiten. Von den in Abb.Z.3 und in Abb.Z.4 angegebenen elementaren Zweitoren ist nur der ideale Transformator kopplungssymmetrisch. In Tab.Z.2 finden Sie dagegen nur kopplungssymmetrische Zweitore.

Wir nennen ein Zweitor dann **impedanzsymmetrisch**, wenn die jeweilige Eingangsimpedanz bei beliebiger Abschlussimpedanz unabhängig von der Betriebsrichtung ist. Diese Eigenschaft bedeutet für die Koeffizienten das Bestehen der gleichwertigen Beziehungen

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}, \quad \underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}, \quad \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} \quad (\text{Z.21})$$

und weiterer gleichwertiger Bindungen zwischen den Elementen der anderen Zweitormatrizen, die aus Tab.Z.1 ablesbar sind. Beispiele für impedanzsymmetrische Zweitore finden Sie in Tab.Z.2 in den Zeilen 1, 2, 3 und, mit $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$, auch in den Zeilen 6 und 7. Aufbau-Längssymmetrie ist hinreichend für Impedanzsymmetrie, aber nicht unbedingt notwendig.

Ist ein Zweitor sowohl kopplungssymmetrisch als auch impedanzsymmetrisch, werden wir es schlicht **symmetrisch** nennen. Es gelten dann gleichzeitig die Beziehungen (Z.20) und (Z.21), und dies bedeutet die Unabhängigkeit aller Betriebseigenschaften von der Betriebsrichtung: Das Vertauschen der beiden Tore ist ohne Einfluss auf die angeschlossenen Stromkreise.

Von den vier Parametern eines Zweitores sind im kopplungssymmetrischen oder im impedanzsymmetrischen Fall nur drei voneinander unabhängig. Symmetrische Zweitore lassen sich schon mit zwei Parametern vollständig beschreiben, z.B. mit \underline{Y}_{11} und \underline{Y}_{12} .

Z.4 Ersatzschaltungen

Unabhängig von der konkreten schaltungstechnischen Realisierung können wir zu jedem Zweitor mindestens eine einfache Ersatzschaltung angeben. Die in der Regel frequenzabhängigen Ersatz-Stromkreiselemente sind dabei so zu wählen, dass sich im betrachteten Betriebsbereich und Rahmen der zugrundeliegenden Fehlergrenzen von den beiden Toren her gesehen keine Unterschiede zur ursprünglichen Schaltung ergeben.

Das Auffinden einer Ersatzschaltung gestaltet sich besonders einfach, wenn wir neben allgemeinen Impedanzen auch linear gesteuerte Quellen verwenden. Die Admittanzform, die Impedanzform, die Reihenparallelform und die Parallelreihenform der Zweitorgleichungen lassen sich damit direkt abbilden (Abb.Z.5).

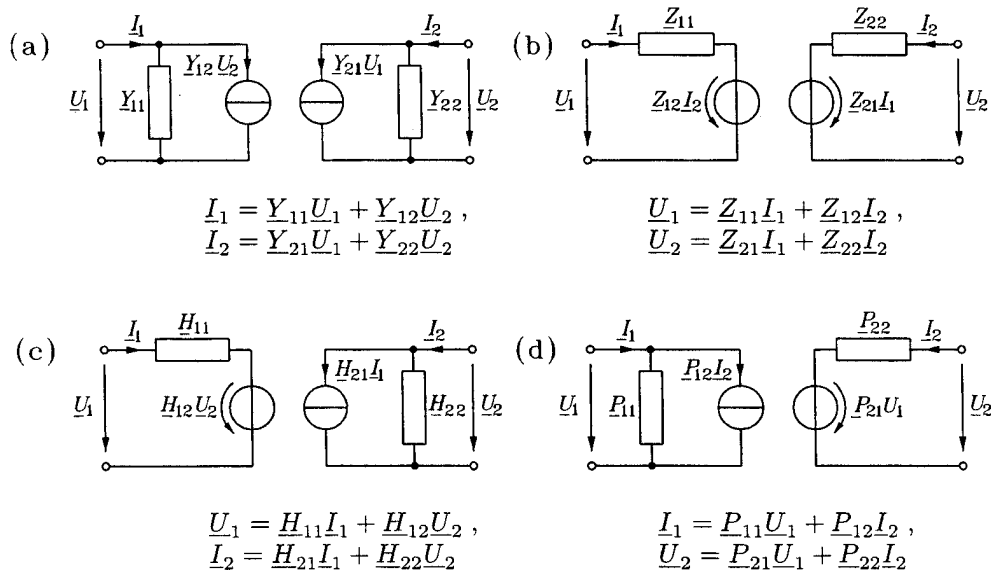


Abb.Z.5 Ersatzschaltungen allgemeiner linearer Zweitore mit Impedanzen und gesteuerten Quellen. Die Admittanzform (a), die Impedanzform (b), die Reihenparallelform (c) und die Parallelreihenform (d) lassen sich damit direkt abbilden.

MEIN SKRIPT ↓

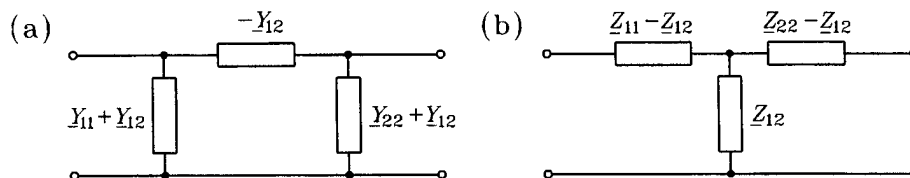
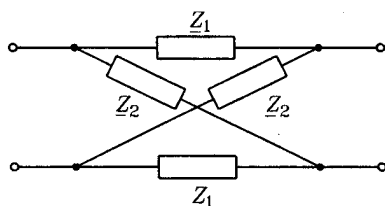


Abb. Z.6 (a) Π -Ersatzschaltung und (b) T-Ersatzschaltung für kopplungssymmetrische (reziproke) Zweitore ($Y_{12} = Y_{21}$, $Z_{12} = Z_{21}$). Für symmetrische Zweitore gilt zusätzlich $Y_{11} = Y_{22}$ bzw. $Z_{11} = Z_{22}$.

Für kopplungssymmetrische Zweitore können wegen der Bedingungen (Z.20) immer zwei einfache Ersatzschaltungen angegeben werden, die Π -Schaltung und die T-Schaltung, die jeweils nur drei Impedanzen enthalten (Abb.Z.6). Ist das Zweitor zusätzlich impedanzsymmetrisch, insgesamt also symmetrisch, so sind zwei der drei Impedanzen gleich. In diesem Fall ist als Ersatz z.B. auch die symmetrische Kreuzschaltung aus Abb.Z.7 möglich.

Die Tatsache, dass sich zu jedem Zweitor mindestens eine einfache Ersatzschaltung aus Zweipolen angeben lässt, bedeutet allerdings nicht, dass sich diese Elemente auch auf einfache Weise realisieren lassen. Die Impedanzen bzw. Admittanzen der Ersatzschaltungen haben im allgemeinen nur eine rechnerische Bedeutung.



$$\begin{aligned} Z_{11} = Z_{22} &= \frac{1}{2}(Z_2 + Z_1), \\ Z_{12} = Z_{21} &= \frac{1}{2}(Z_2 - Z_1) \end{aligned}$$

Abb.Z.7 Symmetrische Kreuzschaltung als mögliche Ersatzschaltung für symmetrische Zweitore.

Z.5 Zusammenschalten von Zweitoren

Durch eine passende Kombination von Zweitoren können neue Zweitore gebildet werden. Abb.Z.8 zeigt vier mögliche Fälle, wobei sich die für die jeweilige Schaltung maßgebende Matrix des neuen Zweitores als Summe der entsprechenden Matrizen der ursprünglichen Zweitore ergibt. Dies folgt unmittelbar aus der Addition der Grundgleichungen (Z.13), (Z.14), (Z.17) und (Z.18) für die zu kombinierenden Zweitore. Beim Zusammenschalten von Zweitoren müssen Sie folgendes beachten: Damit die Grundgleichungen für die zu kombinierenden Zweitore in ihrer ursprünglichen Form gültig bleiben, muss jeweils die **Torbedingung** erfüllt sein, d.h. an jedem Tor muss der eintretende Strom gleich dem austretenden sein. Bei den angegebenen Kombinationen lässt sich dies ohne zusätzliche Maßnahmen i.a. nicht sicherstellen, weil durch die erzwun-

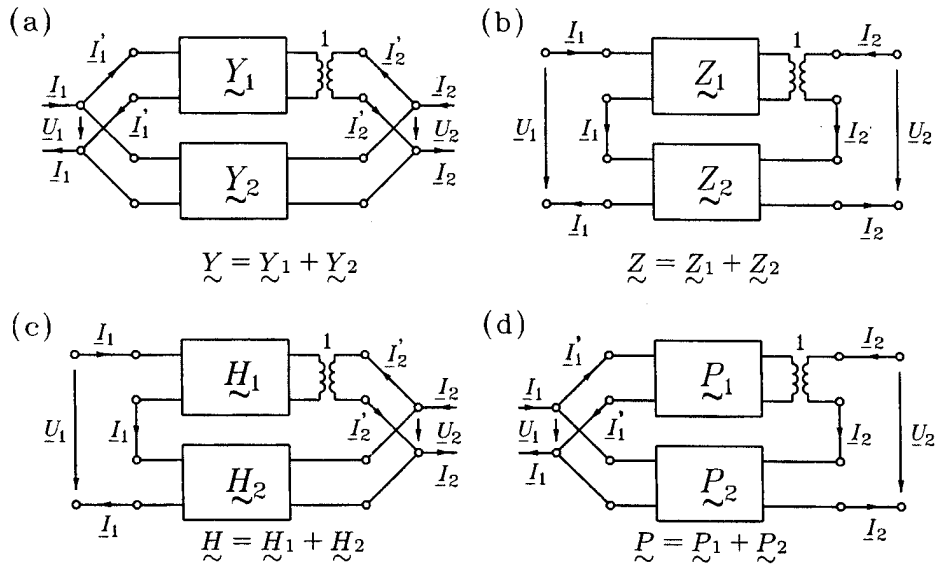


Abb.Z.8 (a) Parallelschaltung, (b) Reihenschaltung, (c) Reihenparallelschaltung und (d) Parallelreihenschaltung von Zweitoren. Für die sichere Einhaltung der Torbedingungen wurde je ein Zweitor mit einem idealen Transformator mit der Übersetzung 1 kombiniert. Die entstehenden Zweitore werden beschrieben durch die für den Schaltungsfall jeweils zuständige Zweitormatrix als Summe der entsprechenden Matrizen der Teilzweitore.

genen Spannungsgleichheiten an den Längszweigen Ausgleichsströme entstehen. Abhilfe bringt z.B. die Beschaltung des Eingangs oder des Ausgangs eines der beiden Zweitore mit einem idealen Transformator des Übersetzungsverhältnisses $n = 1$. Entfallen kann der zusätzliche Transformator dann, wenn die beiden Zweitore durchgehende Kurzschlussverbindungen besitzen und diese beim Zusammenschalten aneinandergelagt werden. Einfache Beispiele dafür sehen Sie in Abb.Z.9.

Die für die Anwendungen wichtigste Kombination von Zweitoren ist die **Kettenschaltung**: Die Ausgangsklemmen des einen Zweitors werden direkt mit den Eingangsklemmen des anderen Zweitors verbunden (Abb.Z.10). In diesem Fall ist die Kettenmatrix zuständig, die sich für das entstehende Zweitor als das **Produkt** der Kettenmatrizen der Teilzweitore ergibt. Dies folgt unmittelbar aus der Kettenform (Z.15) der Zweitorgleichungen. Beachten Sie, dass es bei der Kettenschaltung von Zweitoren auf deren **Reihenfolge** ankommt, weil das Matrixprodukt i.a. nicht kommutativ ist.

Die Kettenschaltung von zwei Zweitoren lässt sich sofort auf den allgemeineren Fall der Kettenschaltung von n Zweitoren erweitern. Wir erhalten für die resultierende Kettenmatrix

$$\tilde{A} = \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \dots \tilde{A}_n = \prod_{k=1}^n \tilde{A}_k \quad (Z.22)$$

Abb.Z.11 zeigt ein einfaches Beispiel. Manchmal ist das Arbeiten mit der um-

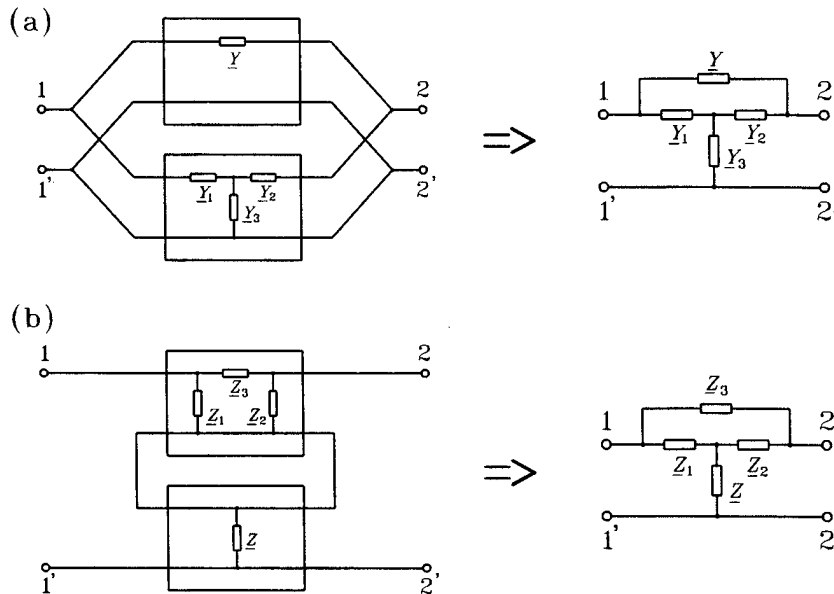


Abb.Z.9 Darstellung eines überbrückten T-Glieds als Parallelschaltung (a) eines T-Glieds und einer Längsimpedanz und als Reihenschaltung (b) eines Π -Glieds und einer Querimpedanz. Da die Teilzweitere jeweils durchgehende Kurzschlußverbindungen besitzen, die beim Zusammenschalten aneinandergelegt werden, kann die Zusatzbeschriftung mit einem idealen Übertrager entfallen. Die Matrizen der Teilzweitere sind in Tab.Z.2 angegeben.

gekehrten Kettenform (Z.16) von Vorteil. Für eine n -gliedrige Kette gilt dann

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}_n \underline{\underline{B}}_{n-1} \cdots \underline{\underline{B}}_1 = \prod_{k=0}^{n-1} \underline{\underline{B}}_{n-k} \quad (\text{Z.23})$$

die Reihenfolge der Faktoren ist also gegenüber der in Gl.(Z.22) umgekehrt¹. Die Kettenschaltung kopplungssymmetrischer (reziproker) Zweitore - Kennzeichen: $\det(\underline{\underline{A}}) = 1$ - ist übrigens wieder kopplungssymmetrisch².

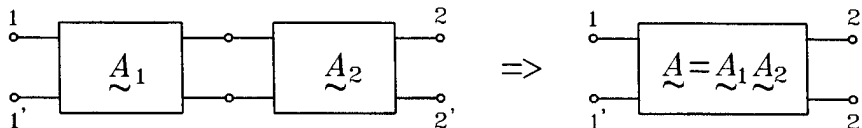
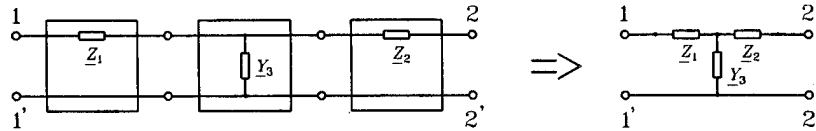


Abb.Z.10 Kettenschaltung von Zweitoren. Die Kettenmatrix des entstehenden Zweitores ist das Produkt der Kettenmatrizen der Teilzweitere in der Reihenfolge der Kettenglieder.

¹Für reguläre Matrizen $\underline{\underline{A}}_1$ und $\underline{\underline{A}}_2$ gilt $(\underline{\underline{A}}_1 \underline{\underline{A}}_2)^{-1} = \underline{\underline{A}}_2^{-1} \underline{\underline{A}}_1^{-1}$.

² $\det(\underline{\underline{A}}_1 \underline{\underline{A}}_2) = \det(\underline{\underline{A}}_1) \det(\underline{\underline{A}}_2)$



$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Z_1 Y_3 & Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_3 \\ Y_3 & 1 + Z_2 Y_3 \end{bmatrix}$$

Abb.Z.11 Mögliche Darstellung eines T-Glieds als Kettenschaltung von drei Zweitoren. Die Kettenmatrizen sind in den Zeilen 1, 2, und 6 der Tab.Z.2 angegeben.

Z.6 Charakteristische Impedanzen

Wir stellen nun folgende Fragen: Welche Impedanz $\underline{Z}_{B1} = \underline{U}_1 / \underline{I}_1$ erscheint am Eingang eines Zweitores, wenn der Ausgang mit der Impedanz \underline{Z}_2 abgeschlossen ist? Und umgekehrt: Welche Impedanz $\underline{Z}_{B2} = \underline{U}_2 / \underline{I}_2$ ergibt sich vom Ausgang her gesehen, wenn am Eingang die Impedanz \underline{Z}_1 liegt (Abb.Z.12)? Mit Hilfe der Kettengleichungen (Z.15) lassen sich diese Fragen leicht beantworten. Wir erhalten die **Betriebsimpedanzfunktionen**

$$\underline{Z}_{B1}(\underline{Z}_2) = \frac{A_{11}\underline{Z}_2 + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_2 + A_{22}}, \quad \underline{Z}_{B2}(\underline{Z}_1) = \frac{A_{22}\underline{Z}_1 + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_1 + A_{11}} \quad (Z.24)$$

und aus diesen ergeben sich vier **charakteristische Impedanzen** als spezielle Werte für Leerlauf und Kurzschluss, nämlich die **Leerlauf- und Kurzschlussimpedanzen**

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{B1}(0) &= \frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{1}{Y_{11}}, & \underline{Z}_{B1}(\infty) &= \frac{A_{11}}{A_{21}} = \underline{Z}_{11}, \\ \underline{Z}_{B2}(0) &= \frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{1}{Y_{22}}, & \underline{Z}_{B2}(\infty) &= \frac{A_{22}}{A_{21}} = \underline{Z}_{22}. \end{aligned} \quad (Z.25)$$

Darin bedeuten $\underline{Z}_{B1}(0) = \underline{Z}_{K1}$ und $\underline{Z}_{B1}(\infty) = \underline{Z}_{L1}$ die primär zu messenden Impedanzen bei sekundärem Kurzschluss bzw. Leerlauf, analog $\underline{Z}_{B2}(0) = \underline{Z}_{K2}$ und $\underline{Z}_{B2}(\infty) = \underline{Z}_{L2}$. Diese Werte sind charakteristisch für das betrachtete Zweitor.

Zwei weitere häufig gebrauchte charakteristische Impedanzen von Zweitoren

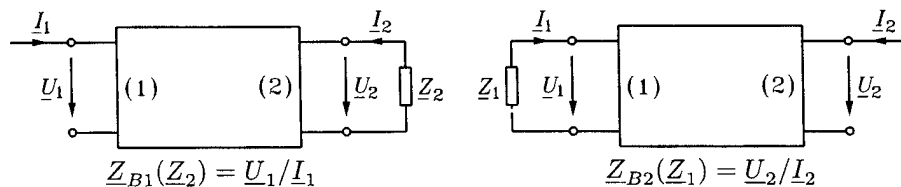


Abb.Z.12 Zur Definition der Betriebsimpedanzen \underline{Z}_{B1} und \underline{Z}_{B2} . Sie hängen im allgemeinen von den jeweiligen Abschlussimpedanzen \underline{Z}_2 bzw. \underline{Z}_1 der anderen Seite ab.

sind die **Wellenimpedanzen**³ \underline{Z}_{W1} und \underline{Z}_{W2} . Sie sind dadurch definiert, dass die Eingangsimpedanz am Tor 1 gleich \underline{Z}_{W1} ist, wenn wir das Tor 2 mit $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{W2}$ abschließen, und umgekehrt, die Eingangsimpedanz am Tor 2 gleich \underline{Z}_{W2} wird, wenn das Tor 1 mit $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{W1}$ abgeschlossen ist, also

$$\underline{Z}_{W1} = \underline{Z}_{B1}(\underline{Z}_{W2}) \quad \text{und} \quad \underline{Z}_{W2} = \underline{Z}_{B2}(\underline{Z}_{W1}). \quad (\text{Z.26})$$

Mit den Gln.(Z.24) lassen sich daraus die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{W1} &= \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}} = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Y_{11}}} = \sqrt{\underline{Z}_{B1}(0)\underline{Z}_{B1}(\infty)}, \\ \underline{Z}_{W2} &= \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}} = \sqrt{\frac{Z_{22}}{Y_{22}}} = \sqrt{\underline{Z}_{B2}(0)\underline{Z}_{B2}(\infty)} \end{aligned} \quad (\text{Z.27})$$

berechnen. Wegen der Wurzeln sind die Vorzeichen zwar nicht eindeutig, aber einheitlich zu wählen. In der Regel werden positive Realteile hergestellt.

Bei **impedanzsymmetrischen Zweitoren** fallen wegen der Bedingungen (Z.21) die beiden Betriebsimpedanzfunktionen (Z.24) zusammen. Es gibt deshalb jeweils nur eine Leerlaufimpedanz, eine Kurzschlussimpedanz und eine Wellenimpedanz,

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{B1}(0) &= \underline{Z}_{B2}(0) = \underline{Z}_B(0) = \frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{1}{Y_{11}}, \\ \underline{Z}_{B1}(\infty) &= \underline{Z}_{B2}(\infty) = \underline{Z}_B(\infty) = \frac{A_{11}}{A_{21}} = \underline{Z}_{11}, \\ \underline{Z}_{W1} &= \underline{Z}_{W2} = \underline{Z}_W = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Y_{11}}} = \sqrt{\underline{Z}_B(0)\underline{Z}_B(\infty)}. \end{aligned} \quad (\text{Z.28})$$

Ist solch ein Zweitor mit seiner Wellenimpedanz abgeschlossen, so erscheint am Eingang wieder die Wellenimpedanz. Insbesondere besitzt eine unendliche Kette gleicher, impedanzsymmetrischer Zweitore als Eingangsimpedanz ebenfalls ihre Wellenimpedanz.

Z.7 Fragen

1. Wann nennen wir eine elektrische Schaltung ein n -Tor? Was bedeutet in diesem Zusammenhang „Tor“?
2. Wodurch kann sich beispielsweise ein Zweitor von einem Vierpol unterscheiden?
3. In welcher Form lässt sich der Überlagerungssatz zur Beschreibung von Mehrtoeren verwenden? Welche Bedingungen müssen dafür erfüllt sein?
4. Welche Voraussetzungen sind für die Anwendbarkeit der üblichen Zweitorthorie zu treffen?

³Der Begriff „Wellenimpedanz“ stammt ursprünglich aus der Leitungstheorie, die sich mit geführter Wellenausbreitung befasst.

5. Wie sehen die Zweitorgleichungen in der Admittanzform, in der Impedanzform und in der Kettenform aus?
6. Wie lassen sich z.B. die Impedanzparameter eines Zweitores durch Herstellen passender Leerläufe und Kurzschlüsse interpretieren?
7. Wie hängen die Admittanzmatrix und die Impedanzmatrix eines Zweitores zusammen? Gibt es dabei Einschränkungen?
8. Durch welche Eigenschaften sind der ideale Spannungsverstärker und der ideale Stromverstärker definiert? Wie bestimmen Sie daraus die Kettenparameter?
9. Welche Eigenschaften definieren den idealen Transformator und den idealen Gyator? Wie finden Sie die zugehörigen Kettenmatrizen?
10. Wie definieren Sie die Aufbau-Längssymmetrie, wie die Aufbau-Quersymmetrie von Zweitoren?
11. Worauf bezieht sich die funktionale Symmetrie?
12. Wann nennen wir ein Zweitor kopplungssymmetrisch? Wie wirkt sich die Kopplungssymmetrie auf die Zweitorparameter aus?
13. Was genau bedeutet „Impedanzsymmetrie“ bei Zweitoren? Welche Bindungen bestehen dann zwischen den Parametern?
14. Wie wird ein Zweitor genannt, das sowohl kopplungssymmetrisch als auch impedanzsymmetrisch ist? Wie viele unabhängige Parameter gibt es dann?
15. In welcher Ersatzschaltung eines allgemeinen Zweitores treten die Impedanzparameter direkt als Parameter der Stromkreiselemente auf?
16. Wie sieht eine Parallelschaltung, eine Reihenschaltung, eine Reihenparallelschaltung und eine Parallelreihenschaltung von Zweitoren aus? Wie bestimmen Sie die resultierenden Zweitormatrizen?
17. Warum muss bei Kombinationen an jedem Teilzweitor die Torbedingung erfüllt sein? Wie stellen Sie dies sicher?
18. Welche Kombination von Zweitoren wird Kettenschaltung genannt? Die neuen Zweitorparameter sind dann wie zu berechnen?
19. Wie sind die beiden Betriebsimpedanzfunktionen eines Zweitores definiert und wie legen Sie damit die charakteristischen Leerlauf- und Kurzschlussimpedanzen fest?
20. Aus welchen Forderungen ergeben sich die beiden Wellenimpedanzen eines Zweitores? Wie hängen sie mit den Leerlauf- und Kurzschlussimpedanzen zusammen?

Z.8 Aufgaben

AZ.1 Impedanzmatrix: In dem Zweitor aus Abb.AZ.1a kann der Transformator als ideal vorausgesetzt werden.

- (i) Bestimmen Sie die Zweitor-Impedanzmatrix.
- (ii) Wie ist das Zweitor hinsichtlich seiner funktionalen Symmetrie zu charakterisieren?

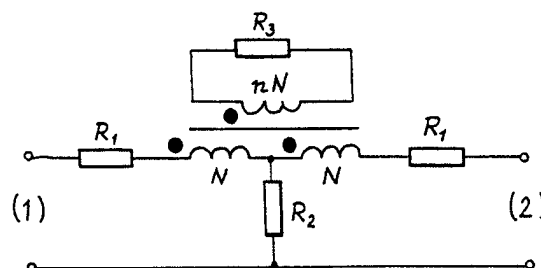


Abb.AZ.1a

AZ.2 Admittanzmatrix: Das Zweitor aus Abb.AZ.2a enthält eine gesteuerte Stromquelle.

- (i) Bestimmen Sie die Zweitor-Admittanzmatrix.
- (ii) Welche funktionale Symmetrie liegt vor?

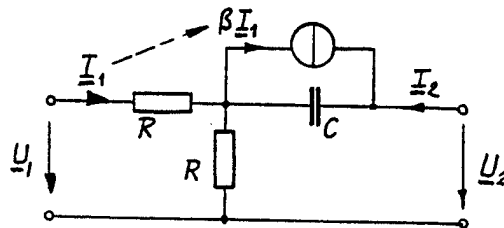


Abb.AZ.2a

AZ.3 Kettenmatrix: Berechnen Sie die Kettenmatrix des Zweitores aus Abb.AZ.3a. Welche Art funktionaler Symmetrie liegt vor?

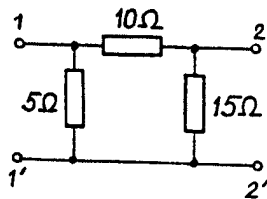


Abb.AZ.3a

AZ.4 Umgekehrte Kettenmatrix: Abb.AZ.4a zeigt ein Reaktanzzweitor. Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix \tilde{B} für die umgekehrte Kettenform der Zweitorgleichungen. Geben Sie auch die funktionale Symmetrie des Zweitores an.

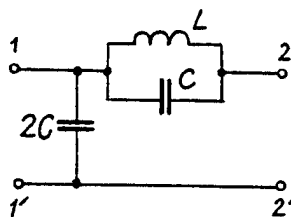
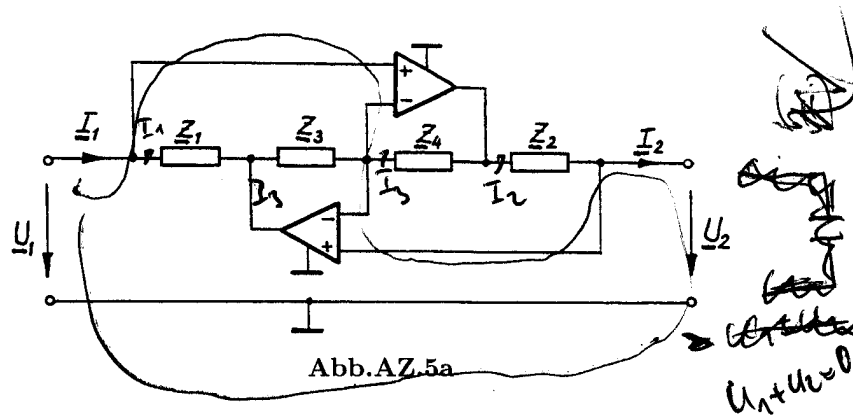


Abb.AZ.4a

AZ.5 Impedanzwandler: Die Schaltung aus Abb.AZ.5a lässt sich als Impedanzwandler verwenden. Schreiben Sie die zugehörigen Zweitorgleichungen in der Kettenform (Bezugssinn von I_2 beachten!) und geben Sie die Kettenmatrix an.



AZ.6 Gyrator: Das Zweitort in Abb. AZ.6a enthält mehrere Widerstände und zwei Operationsverstärker.

- (i) Stellen Sie die Zweitorgleichungen in der Kettenform auf, bestimmen Sie die Kettenmatrix und zeigen Sie, dass mit dem Zweitort ein Gyrator realisiert wird.
- (ii) Wählen Sie speziell $R = 100\Omega$ und beschalten Sie den Ausgang mit einem Kondensator $C = 1\mu F$. Durch welches Ersatzelement ist die ganze Schaltung, vom Eingangsklemmenpaar aus gesehen, darstellbar?

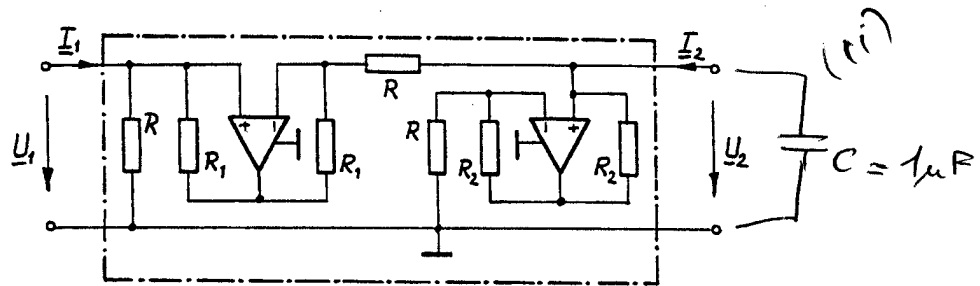


Abb.AZ.6a

AZ.7 Hybridparameter: In einem mittleren Frequenzbereich lässt sich das Zweitor Abb.AZ.7a als Transistor-Ersatzschaltung zur Erfassung des Kleinsignalverhaltens verwenden. Bestimmen Sie die Elemente der zugehörigen Hybridmatrix $\underline{\tilde{H}}$.

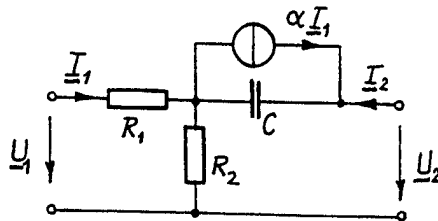


Abb.AZ.7a

AZ.8 Beschalteter Spannungsverstärker: Ein idealer Spannungsverstärker ist gemäß Abb.AZ.8a mit zwei Impedanzen beschaltet. Welche der sechs möglichen Zweitormatrizen existieren? Geben Sie diese an.

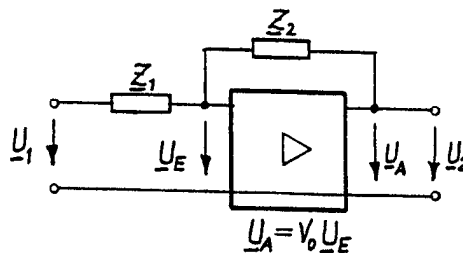


Abb.AZ.8a

AZ.9 Leerlauf- und Kurzschlussmessungen: An einem kopplungssymmetrischen (reziproken) Zweitor werden bei einer bestimmten Frequenz folgende Impedanzen gemessen:

$$\text{Im Leerlauf:} \quad \underline{U}_1 / \underline{I}_1 = (0,6 + j 1,0) \text{ k}\Omega$$

$$\underline{U}_2 / \underline{I}_2 = (0,1 - j 1,0) \text{ k}\Omega$$

$$\text{Im Kurzschluss:} \quad \underline{U}_1 / \underline{I}_1 = (896 + j 1960) \Omega$$

Bestimmen Sie daraus die Impedanzmatrix des Zweitores für diese Frequenz.

AZ.10 Ersatzstromquelle: Am Eingang eines Zweitores, dessen Kettenmatrix bekannt ist, liegt eine Spannungsquelle (Abb.AZ.10a). Bestimmen Sie die Parameter einer äquivalenten Stromquelle (Abb.AZ.10b).

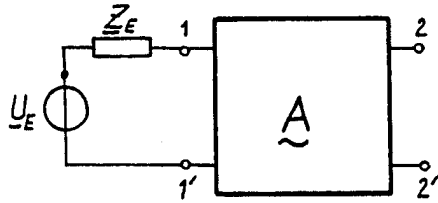


Abb.AZ.10a

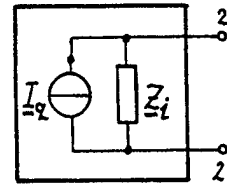


Abb.AZ.10b

AZ.11 Ersatzspannungsquelle: Am Eingang eines Zweitors, dessen Impedanzmatrix bekannt ist, liegt eine Stromquelle (Abb.AZ.11a). Geben Sie die Parameter einer äquivalenten Spannungsquelle (Abb.AZ.11b) an.

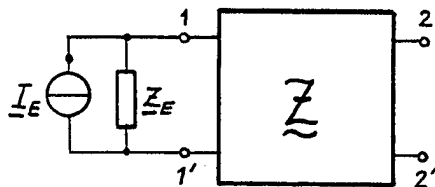


Abb.AZ.11a

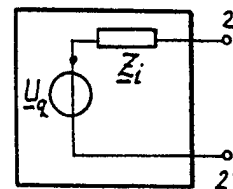


Abb.AZ.11b

AZ.12 Betriebsimpedanzen: Das Zweitor aus Abb.AZ.12a dient als einfache Transistor-Ersatzschaltung. Bestimmen Sie die zugehörige Hybridmatrix \underline{H} und die Betriebsimpedanzen $\underline{Z}_{B1}(R_2)$ und $\underline{Z}_{B2}(R_1)$.

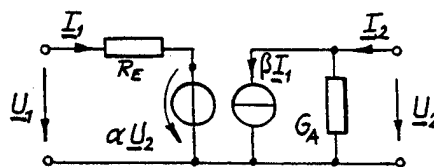


Abb.AZ.12a

AZ.13 Iterierte Impedanzen: Bedeuten $\underline{Z}_{B1}(\cdot)$ und $\underline{Z}_{B2}(\cdot)$ die beiden Betriebsimpedanzfunktionen eines Zweitors, so sind dessen iterierte Impedanzen \underline{Z}_{it1} und \underline{Z}_{it2} durch

$$\underline{Z}_{it1} = \underline{Z}_{B1}(\underline{Z}_{it1}), \quad \underline{Z}_{it2} = \underline{Z}_{B2}(\underline{Z}_{it2})$$

definiert. Berechnen Sie diese Impedanzen direkt für das aufbaulängssymmetrische Zweitor aus Abb. AZ.13a.

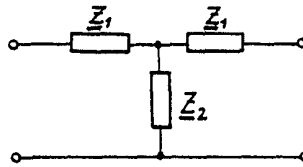


Abb.AZ.13a

AZ.14 Wellenimpedanzen: Berechnen Sie die Wellenimpedanzen eines näherungsweise widerstandslosen Transformators (Abb.AZ.14a), als Zweitor betrachtet.

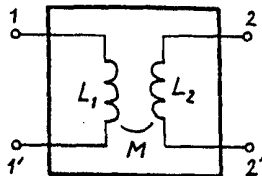


Abb.AZ.14a

AZ.15 Wellendämpfungsmaß: Die Kettenmatrix eines symmetrischen Zweitores lässt sich immer in der Form

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} \cosh(g) & \sinh(g)Z_W \\ \sinh(g)/Z_W & \cosh(g) \end{bmatrix}$$

mit der Wellenimpedanz Z_W und dem komplexen Wellendämpfungsmaß g darstellen.

- (i) Berechnen Sie die Kettenmatrix \tilde{A}_2 der Kettenschaltung von zwei gleichen Zweitoren mit der Kettenmatrix \tilde{A}_1 .
- (ii) Wie sieht die Kettenmatrix \tilde{A}_n der Kettenschaltung von n gleichen Zweitoren mit der Kettenmatrix \tilde{A}_1 aus?

AZ.16 Angepasster Abschwächer: Das symmetrische Zweitor aus Abb.AZ.16a mit einstellbaren Widerständen R_1 und R_2 (z.B. HF-Ersatzwiderstände von PIN-Dioden) dient als steuerbarer Abschwächer in einem 50Ω -System. Welche Werte von R_1 und R_2 sind in Abhängigkeit vom gewünschten Spannungsverhältnis $K = U_1/U_2$ einzustellen, damit die Wellenimpedanz des Zweitores unabhängig von K stets 50Ω beträgt?

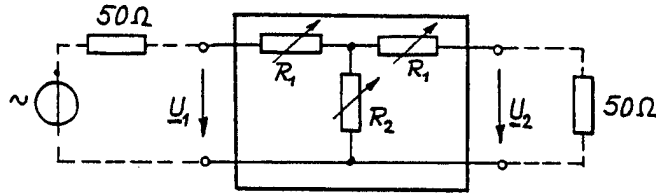


Abb.AZ.16a

AZ.17 Leistungsverstärkung: Für die Beschreibung des Kleinsignal-Betriebsverhaltens eines Transistor-Verstärkers seien die reellen H-Parameter des Ersatz-Zweiters für den gewählten Arbeitspunkt und der Lastwiderstand R_L bekannt (Abb.AZ.17). Berechnen Sie daraus allgemein die Leistungsverstärkung

$$V_P = -\frac{U_2 I_2}{U_1 I_1}$$

Für welchen Wert von R_L ist V_P maximal?

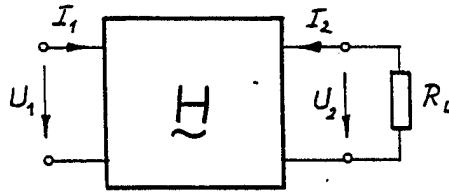
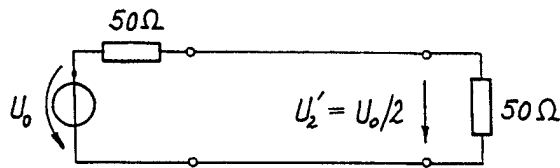


Abb.AZ.17

AZ.18 Einfügungsdämpfung: Abb.AZ.18a zeigt die Definition des Einfügungsdämpfungsmaßes a_{50} für ein Zweitor in einem 50Ω -System. Wie groß ist dieses Maß für das Zweitor in Abb.AZ.18b?



$$a_{50} = 20 \lg |U_2' / U_2| \text{ dB}$$

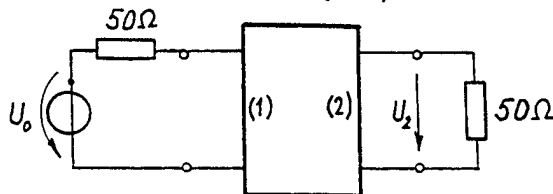


Abb.AZ.18a

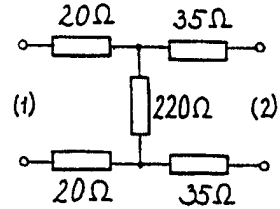


Abb.AZ.18b

zu berechnen, und es ist das lineare Gleichungssystem $\underline{Y}_B \underline{U}_B = \underline{I}_{qB}$ zu lösen.

Dies liefert $\underline{U}_B = \begin{bmatrix} 0,118 & - & j 0,401 \\ 0,090 & + & j 0,347 \\ 9,792 & + & j 0,054 \end{bmatrix}$ und damit

$$\underline{U} = \underline{S}^T \underline{U}_B = \begin{bmatrix} -9,764 & - & j 0,802 \\ -9,882 & - & j 0,401 \\ 0,118 & - & j 0,401 \\ 0,090 & + & j 0,347 \\ 9,792 & + & j 0,054 \end{bmatrix} \text{ V,}$$

$$\underline{I} = \underline{Y}(\underline{U} - \underline{U}_q) + \underline{I}_q = \begin{bmatrix} 0,401 & + & j 0,118 \\ -0,470 & - & j 0,100 \\ -0,401 & - & j 0,118 \\ -0,069 & + & j 0,018 \\ -0,069 & + & j 0,018 \end{bmatrix} \text{ A.}$$

AS.1 Überlagerungssatz:

Die Schaltung ist linear, der Überlagerungssatz somit anwendbar.

1) $\underline{U}_{q2} = 0$: Rechnung mit komplexen Effektivwerten,

$$\underline{I}_{1,\omega} = \frac{\underline{U}_{q1}}{R_1}, \quad \frac{\underline{I}_{3,\omega}}{\beta \underline{I}_{1,\omega}} = \frac{R_2}{R} \quad \text{mit } R = R_2 + R_3 + R_4 = 267,5 \Omega,$$

also

$$\underline{I}_{3,\omega} = \frac{R_2}{R} \cdot \frac{\beta}{R_1} \underline{U}_{q1} = 37,01 \text{ mA, Kreisfrequenz } \omega.$$

2) $\underline{U}_{q1} = 0$:

$$\underline{I}_{1,0} = 0, \quad \underline{I}_{3,0} = -\underline{U}_{q2}/R = -37,38 \text{ mA, Gleichstrom.}$$

Die Überlagerung der beiden Zustände liefert

$$i_3(t) = \text{Re}(\underline{I}_{3,\omega} \sqrt{2} e^{j\omega t}) + \underline{I}_{3,0} = [52,3 \cos(\omega t) - 37,4] \text{ mA.}$$

Der Widerstand R_3 muss dabei die Wirkleistung

$$P_3 = R_3 (|\underline{I}_{3,\omega}|^2 + |\underline{I}_{3,0}|^2) = 130 \text{ mW}$$

aufnehmen. ■

AS.2 Auswirkung einer Spannungsänderung:

Deaktivierung der Schaltung mit Ausnahme von $\underline{U}_1 \rightarrow \Delta \underline{U}_1$ führt auf die Schaltung Abb.AS.2b, aus der sich der gesuchte Zusammenhang ohne weiteres ablesen lässt,

$$\Delta \underline{I}_1 = \frac{R_2 \parallel \underline{Z}}{\underline{Z}_C + R_2 \parallel \underline{Z}} \cdot \frac{\Delta \underline{U}_1}{\underline{Z}} \quad \text{mit } \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}, \quad \underline{Z} = R_3 + R_L + j\omega L,$$

oder, ausgeschrieben (falls nötig),

$$\Delta \underline{I}_L = - \frac{j\omega R_2 C}{R_2 + R_3 + R_L - \omega^2 R_2 L C + j\omega [L + R_2(R_3 + R_L)C]} \Delta \underline{U}_1.$$

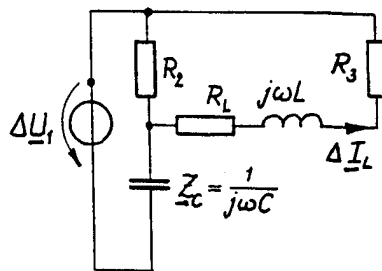


Abb.AS.2b

AS.3 Umkehrungssatz:

Aus dem Umkehrungssatz

$$\underline{U}_1 I'_1 + \underline{U}_2 I'_2 = \underline{U}'_1 I_1 + \underline{U}'_2 I_2$$

folgt, wenn wir die ungestrichenen Größen mit denen der Kurzschlussmessung identifizieren, der gesuchte Strom zu

$$\underline{I}'_1 = (\underline{U}'_1 I_1 + \underline{U}'_2 I_2) / \underline{U}_1 = 1,00 \text{ A} \cdot e^{-j116,8^\circ}.$$

AS.4 Ersatzstromquelle:

Die Impedanz \underline{Z}_r lässt sich direkt der zugeordneten Thévenin-Schaltung Abb.AS.4c berechnen,

$$\frac{1}{\underline{Z}_T} = j\omega C + \frac{1}{2R + j\omega L} = \left(j1,382 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{940 + j502,7} \right) \text{ S},$$

$$\underline{Z}_r = 798,6 e^{-j0,849} \Omega.$$

Der Quellenstrom ergibt sich als Kurzschlussstrom in der Schaltung Abb.AS.4d

$$\underline{I}_q = \frac{j\omega L}{2R + j\omega L} \underline{I}_0 = 0,943 e^{j1,080} \text{ mA.}$$

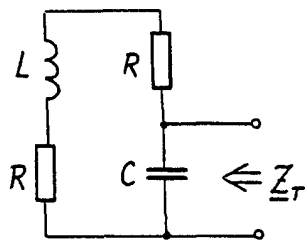


Abb.AS.4c

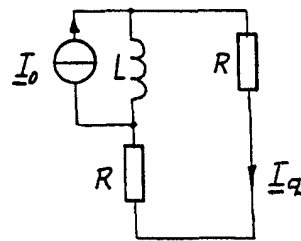


Abb.AS.4d

AS.5 Ersatzspannungsquelle:

Mit der zugeordneten Thévenin-Schaltung Abb.AS.5b lässt sich die Ersatzimpedanz $\underline{Z}_T = \underline{U}/\underline{I}$ über

$$\underline{U} = \frac{\underline{I} + \beta \underline{I}_0}{j\omega C} - R_1 \underline{I}_0$$

zu

$$\underline{Z}_T = R_0 + \frac{1 - \beta R_0/R_1}{j\omega C} \quad \text{mit} \quad R_0 = R_1 \parallel R_2$$

bestimmen. Die Ersatz-Quellenspannung \underline{U}_q ergibt sich als Leerlaufspannung, Abb.AS.5c, über

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{R_1 + R_2}, \quad \underline{U}_q = \frac{\beta \underline{I}_0}{j\omega C} + R_2 \underline{I}_0$$

zu

$$\underline{U}_q = \left(1 + \frac{\beta}{j\omega R_2 C} \right) \frac{R_0}{R_1} \underline{U}_0.$$

Damit ist die Ersatzquelle Abb.AS.5d festgelegt.

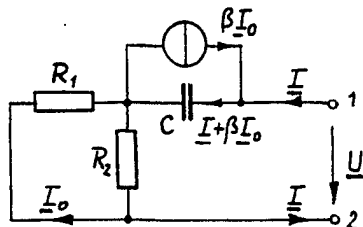


Abb.AS.5b

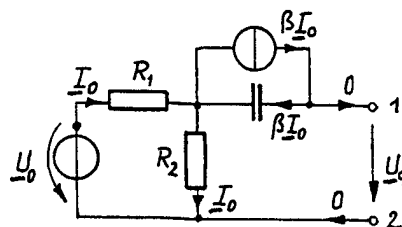


Abb.AS.5c

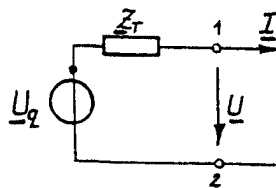


Abb.AS.5d

AZ.1 Impedanzmatrix:

(i) Mit den Bezeichnungen aus Abb.AZ.1b gilt für den idealen Transformator

$$N\underline{I}_1 - N\underline{I}_2 - nN\underline{I}_3 = 0 \quad (\text{Durchflutungsausgleich}),$$

$$\underline{U}'_1 = \underline{U}'_2 = \underline{U}'_3/n \quad (\text{Streuungsfreiheit}),$$

wegen $\underline{U}'_3 = R_3\underline{I}_3$ also

$$\underline{U}'_1 = \underline{U}'_2 = R_3\underline{I}_3/n = R_3(\underline{I}_1 - \underline{I}_2)/n^2.$$

Wir stellen nun die Impedanzform der Zweitorgleichungen her, d.h. wir drücken \underline{U}_1 und \underline{U}_2 durch \underline{I}_1 und \underline{I}_2 aus,

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1\underline{I}_2 = R_2(\underline{I}_1 = \underline{I}_2) + \underline{U}'_1 = R_1\underline{I}_1 + R_2(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + R_3(\underline{I}_1 - \underline{I}_2)/n^2 \\ &= (R_1 + R_2 + R_3/n^2)\underline{I}_1 + (R_2 - R_3/n^2)\underline{I}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= R_2\underline{I}_2 + R_2(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) - \underline{U}'_2 = R_1\underline{I}_2 + R_2(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) - R_3(\underline{I}_1 - \underline{I}_2)/n^2 \\ &= (R_2 - R_3/n^2)\underline{I}_1 + (R_1 + R_2 + R_3/n^2)\underline{I}_2. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind die Elemente der Impedanzmatrix

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3/n^2, & R_2 - R_3/n^2 \\ R_2 - R_3/n^2, & R_1 + R_2 + R_3/n^2 \end{bmatrix}.$$

(ii) Das Zweitort ist kopplungssymmetrisch ($\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$) und impedanzsymmetrisch ($\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}$), insgesamt also (längs)symmetrisch.

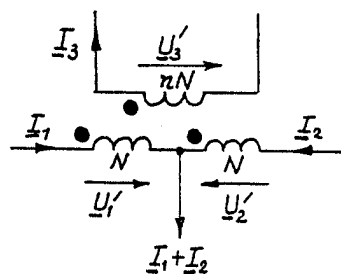


Abb.AZ.1b

AZ.2 Admittanzmatrix:

(i) Unter Verwendung von Abb.AZ.2b erhalten wir

$$\underline{U}_1 = R\underline{I}_1 + R(\underline{I}_1 + \underline{I}_2), \quad \underline{U}_2 = \frac{1}{j\omega C}(\beta\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + R(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)$$

oder, umgekehrt, mit den Abkürzungen

$$\underline{s} = j\nu = j\omega RC, \quad G = 1/R,$$

die Ströme durch die Spannungen ausgedrückt,

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{s} + 1}{\underline{s} + 2 - \beta} G\underline{U}_1 - \frac{\underline{s}}{\underline{s} + 2 - \beta} G\underline{U}_2,$$

$$\underline{I}_2 = -\frac{\underline{s} + \beta}{\underline{s} + 2 - \beta} G\underline{U}_1 + \frac{\underline{s}}{\underline{s} + 2 - \beta} G\underline{U}_2.$$

Dies sind die Zweitorgleichungen in Admittanzform, aus der sich die Admittanzmatrix ablesen lässt,

$$\underline{Y} = \frac{G}{\underline{s} + 2 - \beta} \begin{bmatrix} \underline{s} + 1, & -\underline{s} \\ -(\underline{s} + \beta), & 2\underline{s} \end{bmatrix}; \quad G = 1/R, \quad \underline{s} = j\omega RC.$$

(ii) Das Zweitor ist weder kopplungssymmetrisch (wegen der gesteuerten Quelle) noch impedanzsymmetrisch.

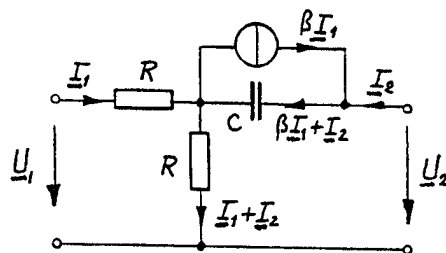


Abb.AZ.2b

AZ.3 Kettenmatrix:

Wird auf der Primärseite das Verbraucher Bezugssystem, auf der Sekundärseite das Erzeuger Bezugssystem gewählt, so sind die Kettengleichungen

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= A_{11}\underline{U}_2 + A_{12}\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= A_{21}\underline{U}_2 + A_{22}\underline{I}_2. \end{aligned} \right\}$$

Nach einer Dreieck-Stern-Umwandlung (Abb.AZ.3b) erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 = 0: \quad \underline{U}_1 &= \frac{R_1 + R_3}{R_3} \underline{U}_2 & \Rightarrow \quad A_{11} &= 5/3, \\ \underline{I}_1 &= \frac{1}{R_3} \underline{U}_2 & \Rightarrow \quad A_{21} &= 0,4 \text{ S}, \end{aligned}$$

und, einfacher aus der ursprünglichen Schaltung,

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 = 0: \quad \underline{U}_1 &= 10\Omega \cdot \underline{I}_2 & \Rightarrow \quad A_{12} &= 10\Omega, \\ \underline{I}_1 &= \frac{5\Omega + 10\Omega}{5\Omega} \underline{I}_2 & \Rightarrow \quad A_{22} &= 3, \end{aligned}$$

also

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 5/3; & 10\Omega \\ 0,4 \text{ S}; & 3 \end{bmatrix}$$

Das Zweitor ist zwar kopplungssymmetrisch ($\det(\underline{\underline{A}}) = 1$), aber nicht impedanzsymmetrisch.

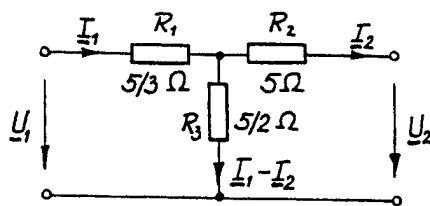


Abb.AZ.3b

AZ.4 Umgekehrte Kettenmatrix:

Mit den Beziehungen aus Abb. AZ.4b lautet die umgekehrte Kettenform

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_2 &= B_{11}\underline{U}_1 + B_{12}\underline{I}_1, \\ \underline{I}_2 &= B_{21}\underline{U}_1 + B_{22}\underline{I}_1. \end{aligned} \right\}$$

Wir erhalten daraus

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 = 0: \quad \underline{U}_2 &= (1 + j\omega 2CZ)\underline{U}_1 & \Rightarrow \underline{B}_{11} &= \frac{1 - 3\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC}, \\ \underline{I}_2 &= j\omega 2C\underline{U}_1 & \Rightarrow \underline{B}_{21} &= -j\omega 2C, \\ \underline{U}_1 = 0: \quad \underline{I}_1 &= -\underline{I}_2 = -\underline{U}_2/Z & \Rightarrow \underline{B}_{12} &= -\frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}, \\ & & \underline{B}_{22} &= 1; \end{aligned}$$

unter Verwendung der Abkürzungen

$$\nu = \omega\sqrt{LC}, \quad R = \sqrt{L/C}$$

also

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1 - 3\nu^2}{1 - \nu^2}, & -\frac{j\nu}{1 - \nu^2}R \\ -j\nu 2/R, & 1 \end{bmatrix}$$

Das Zweitor ist kopplungssymmetrisch ($\det(\underline{B}) = 1$), nicht aber impedanzsymmetrisch.

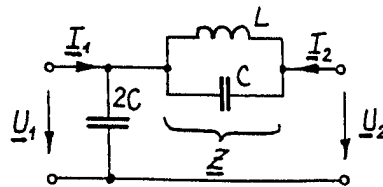


Abb. AZ.4b

AZ.5 Impedanzwandler:

Mit den Eigenschaften der Operationsverstärker (Abb. AZ.5b) haben wir

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 &= 0, \\ \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_4 \underline{I}_4 &= 0, \\ \underline{U}_1 - \underline{U}_2 &= 0, \\ \underline{I}_3 - \underline{I}_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_4} \underline{I}_2. \end{cases}$$

Dies sind bereits die gesuchten Zweitorgleichungen. Die Kettenmatrix ist

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\underline{Z}_2 \underline{Z}_3) / (\underline{Z}_1 \underline{Z}_4) \end{bmatrix}$$

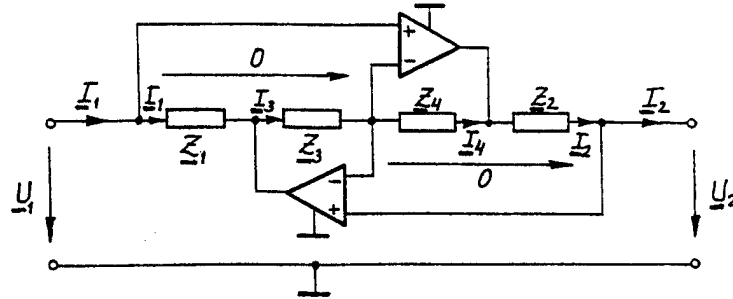


Abb.AZ.5b

AZ.6 Gyrator:

(i) Mit den Bezeichnungen aus Abb.AZ.6b gilt

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= U_4/R_2 - I_1 \\ U_2/R + U_4/R_2 &= 0, \\ U_1 &= RI_1 + U_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_1 = -RI_2,$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= U_1/R + U_3/R_1, \\ U_3 &= -R_1 I_1 = (U_2 - U_1)R_1/R \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_1 = U_2/R.$$

Dies sind die Zweitorgleichungen in der gesuchten Form. Ihr ist die Kettenmatrix

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ 1/R & 0 \end{bmatrix}$$

zugeordnet, die einem idealen Gyrator mit dem Parameter $g = 1/R$ entspricht.

(ii) Bei der Beschaltung des Ausgangs mit einem Kondensator der Kapazität C haben wir (Bezugssystem beachten!) $I_2 = -j\omega C U_2$. Die Eingangsimpedanz ist dann

$$\frac{U_1}{I_1} = -R^2 \frac{I_2}{U_2} = j\omega R^2 C,$$

d.h. die ganze Schaltung ist durch die Induktivität $L = R^2 C = 10\text{mH}$ darstellbar (spulenfreie Realisierung von Induktivitäten).

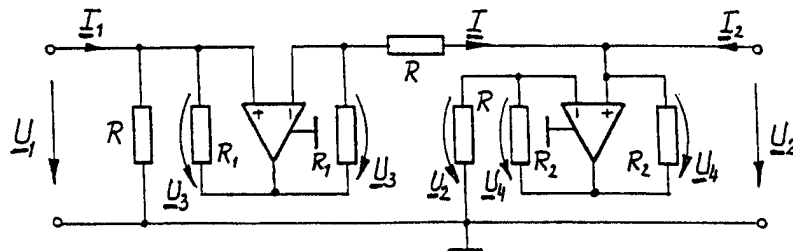


Abb.AZ.6b

AZ.7 Hybridparameter:

Die Zweitorgleichungen in Hybridform drücken $\underline{U}_1, \underline{I}_2$ durch $\underline{I}_1, \underline{U}_2$ aus. Aus Abb.AZ.7b lesen wir

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= R_1 \underline{I}_1 + R_2 (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) = (R_1 + R_2) \underline{I}_1 + R_2 \underline{I}_2, \\ \underline{U}_2 &= \left(\alpha \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \right) \frac{1}{j\omega C} + R_2 (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) = \left(R_2 + \frac{\alpha}{j\omega C} \right) \underline{I}_1 + \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{I}_2\end{aligned}$$

ab. Mit der Abkürzung $\underline{s} = j\omega R_2 C$ folgt daraus

$$\begin{aligned}\underline{I}_2 &= -\frac{\underline{s} + \alpha}{\underline{s} + 1} \underline{I}_1 + \frac{1}{R_2} \frac{\underline{s}}{\underline{s} + 1} \underline{U}_2, \\ \underline{U}_1 &= \left(R_1 + R_2 \frac{1 - \alpha}{\underline{s} + 1} \right) \underline{I}_1 + \frac{\underline{s}}{\underline{s} + 1} \underline{U}_2,\end{aligned}$$

und daher die Hybridparameter

$$\begin{aligned}\underline{H}_{11} &= R_1 + R_2 \frac{1 - \alpha}{\underline{s} + 1}, & \underline{H}_{12} &= \frac{\underline{s}}{\underline{s} + 1}, \\ \underline{H}_{21} &= -\frac{\underline{s} + \alpha}{\underline{s} + 1}, & \underline{H}_{22} &= \frac{1}{R_2} \frac{\underline{s}}{\underline{s} + 1}.\end{aligned}$$

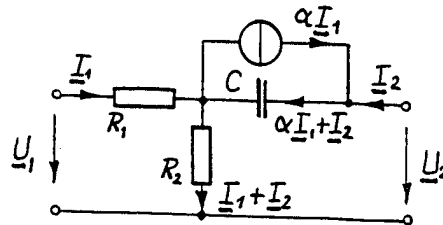


Abb.AZ.7b

AZ.8 Beschalteter Spannungsverstärker:

Neben der angegebenen Beziehung zwischen der Eingangs- und der Ausgangsspannung ist der ideale Spannungsverstärker durch $\underline{I}_E = 0$ gekennzeichnet (Abb.AZ.8b). Wir erhalten sofort die beiden Beziehungen

$$\underline{U}_1 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I}_1 + \underline{U}_2, \quad \underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_2 / V_0$$

und daraus die
Impedanzform

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= [\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 / (1 - V_0)] \underline{I}_1, \\ \underline{U}_2 &= [\underline{Z}_2 + V_0 / (1 - V_0)] \underline{I}_1,\end{aligned} \quad \underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 / (1 - V_0), & 0 \\ \underline{Z}_2 V_0 / (1 - V_0), & 0 \end{bmatrix};$$

Kettenform

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \frac{1}{V_0} [1 + (1 - V_0) \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2] \underline{U}_2, \\ \underline{I}_1 &= [(1 - V_0) / (\underline{Z}_2 V_0)] \underline{U}_2, \end{aligned} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{V_0} [1 + (1 - V_0) \underline{Z}_1 / \underline{Z}_2], & 0 \\ (1 - V_0) / (V_0 \underline{Z}_2), & 0 \end{bmatrix};$$

Parallelreihenform

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{U}_1 / [\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 / (1 - V_0)], \\ \underline{U}_2 &= \underline{U}_1 V_0 / [1 + (1 - V_0) \underline{Z}_1 / \underline{Z}_2], \end{aligned} \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} 1 / [\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 / (1 - V_0)], & 0 \\ V_0 / [1 + (1 - V_0) \underline{Z}_1 / \underline{Z}_2], & 0 \end{bmatrix}.$$

Die anderen Zweitormatrizen existieren nicht.

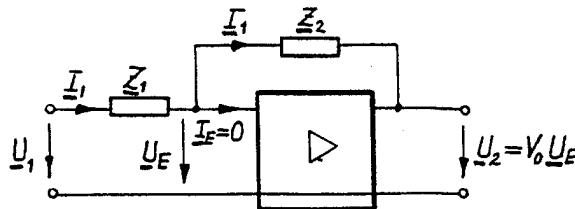


Abb. AZ.8b

AZ.9 Leerlauf- und Kurzschlussmessungen:

Aus der Impedanzform der Zweitorgleichungen,

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2, \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2; \end{cases} \quad \text{mit } \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$$

ist ersichtlich:

Sekundärer Leerlauf, $\underline{I}_2 = 0$, $\underline{U}_1 / \underline{I}_1 = \underline{Z}_{11} = (0,6 + j1,0) \text{ k}\Omega$;

primärer Leerlauf, $\underline{I}_1 = 0$, $\underline{U}_2 / \underline{I}_2 = \underline{Z}_{22} = (0,1 - j1,0) \text{ k}\Omega$;

sekundärer Kurzschluss, $\underline{U}_2 = 0$, $\underline{I}_2 = -(\underline{Z}_{21} / \underline{Z}_{22}) \underline{I}_1$,

$$\underline{U}_1 / \underline{I}_1 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} \underline{Z}_{21} / \underline{Z}_{22} = (896 + j1960) \Omega,$$

$$\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12}^2 = (100 - j1000)[600 + j1000] - (896 + j1960) \Omega^2,$$

$$\underline{Z}_{12} = (0,1 + j1,0) \text{ k}\Omega.$$

Die gesuchte Impedanzmatrix ist somit

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} 0,6 + j1,0; & 0,1 + j1,0 \\ 0,1 + j1,0; & 0,1 - j1,0 \end{bmatrix}.$$

AZ.10 Ersatzstromquelle:

Aus den Kettengleichungen

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}$$

erhalten wir für den Kurzschlussstrom (Abb.AZ.10c)

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_1 = \underline{A}_{12}\underline{I}_K, \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{22}\underline{I}_K \end{array} \right\} \underline{U}_1 = \underline{U}_E - \underline{Z}_E \underline{I}_1 = \underline{U}_E - \underline{Z}_E \underline{A}_{22} \underline{I}_K \stackrel{!}{=} \underline{A}_{12} \underline{I}_K \Rightarrow$$

$$\underline{I}_K = \frac{\underline{U}_E}{\underline{A}_{12} + \underline{A}_{22}\underline{Z}_E},$$

und für die Leerlaufspannung (Abb. AZ.10d)

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_0, \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_0 \end{array} \right\} \underline{U}_1 = \underline{U}_E - \underline{Z}_E \underline{I}_1 = \underline{U}_E - \underline{Z}_E \underline{A}_{21} \underline{U}_0 \stackrel{!}{=} \underline{A}_{11} \underline{U}_0 \Rightarrow$$

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_E}{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{21}\underline{Z}_E}.$$

Die Parameter der Ersatzstromquelle sind daher

$$\underline{I}_q = \underline{I}_K = \frac{\underline{U}_E}{\underline{A}_{12} + \underline{A}_{22}\underline{Z}_E}, \quad \underline{Z}_i = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_K} = \frac{\underline{A}_{12} + \underline{A}_{22}\underline{Z}_E}{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{21}\underline{Z}_E}.$$

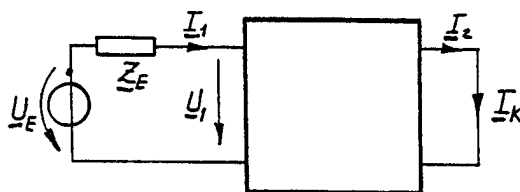


Abb.AZ.10c

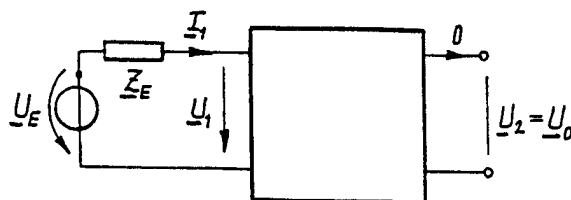


Abb.AZ.10d

AZ.11 Ersatzspannungsquelle:

Wir gehen von den Zweitorgleichungen

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2, \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 \end{cases}$$

aus, bestimmen die Leerlaufspannung ($\underline{I}_2 = 0$, Abb.AZ.11c)

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1, \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 \end{array} \right\} \underline{I}_E = \underline{I}_1 + \underline{U}_1 / \underline{Z}_E = (1 + \underline{Z}_{11} / \underline{Z}_E) \underline{I}_1 = \underline{U}_0 (1 + \underline{Z}_{11} / \underline{Z}_E) / \underline{Z}_{21} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{Z}_{21} \underline{I}_E}{1 + \underline{Z}_{11} / \underline{Z}_E},$$

und den Kurzschlussstrom ($\underline{U}_2 = 0$, Abb.AZ.11d)

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2, \\ 0 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 \end{array} \right\} \underline{I}_E = \underline{I}_1 + \underline{U}_1 / \underline{Z}_E = \left(1 + \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_E}\right) \underline{I}_1 + \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_E} \underline{I}_2$$

$$= \left[(\underline{Z}_E + \underline{Z}_{11}) \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} - \underline{Z}_{12} \right] \frac{\underline{I}_K}{\underline{Z}_E} \Rightarrow$$

$$\underline{I}_K = \frac{\underline{Z}_E \underline{Z}_{21} \underline{I}_E}{(\underline{Z}_E + \underline{Z}_{11}) \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12} \underline{Z}_{21}}.$$

Daraus folgen die Parameter der Ersatzspannungsquelle zu

$$\underline{U}_q = \underline{U}_0 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{I}_E}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_E}, \quad \underline{Z}_i = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_K} = \underline{Z}_{22} - \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_E}.$$

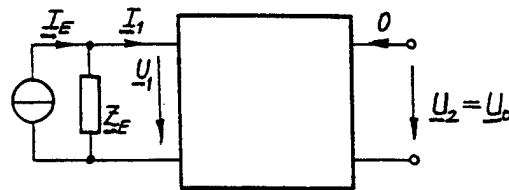


Abb.AZ.11c

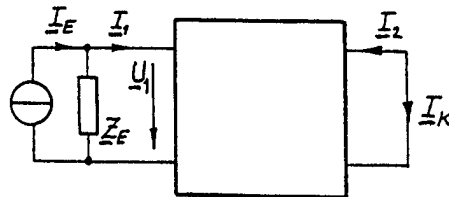


Abb.AZ.11d

AZ.12 Betriebsimpedanzen:

Die aus der gegebenen Schaltung direkt ablesbaren Beziehungen

$$\underline{U}_1 = R_E \underline{I}_1 + \alpha \underline{U}_2, \quad \underline{I}_2 = \beta \underline{I}_1 + G_A \underline{U}_2$$

stellen bereits die Hybridform der Zweitorgleichungen dar. Somit ist die Hybridmatrix

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} R_E & \alpha \\ \beta & G_A \end{bmatrix}$$

Für die Betriebsimpedanzen erhalten wir mit Abb.AZ.12b

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= -\beta(R_A \parallel R_2) \underline{I}_1, \quad R_A \parallel R_2 = R_2 / (1 + R_2 G_A), \\ \underline{U}_1 &= \left[R_E - \alpha \beta (R_A \parallel R_2) \right] \underline{I}_1 \stackrel{!}{=} \underline{Z}_{B1}(R_2) \underline{I}_1 \Rightarrow \\ \underline{Z}_{B1}(R_2) &= R_E - \frac{\alpha \beta}{G_A + 1/R_2} \end{aligned}$$

und mit Abb.AZ.12c

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= G_A \underline{U}_2 + \beta \underline{I}_1 = G_A \underline{U}_2 - \beta \alpha \underline{U}_2 / (R_E + R_1) \stackrel{!}{=} \underline{U}_2 / \underline{Z}_{B2}(R_1) \Rightarrow \\ \frac{1}{\underline{Z}_{B2}(R_1)} &= G_A - \frac{\alpha \beta}{R_E + R_1} \end{aligned}$$

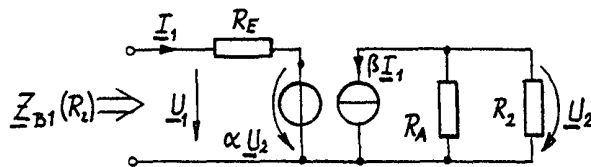


Abb.AZ.12b

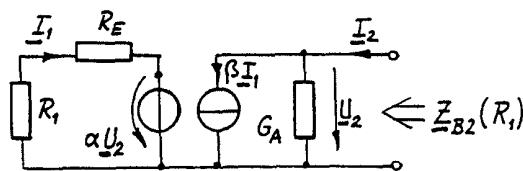


Abb.AZ.12c

AZ.13 Iterierte Impedanzen:

Wegen der Aufbau-Längssymmetrie können wir sofort auf die Gleichheit der beiden iterierten Impedanzen untereinander und mit der Wellenimpedanz schließen,

$$\underline{Z}_{it1} = \underline{Z}_{it2} = \underline{Z}_{it} = \underline{Z}_W.$$

Aus der Definition der Betriebsimpedanzfunktionen folgt dann mit Abb.AZ.13b

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{it} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \parallel (\underline{Z}_1 \underline{Z}_{it}) = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{it})/(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{it}), \\ \underline{Z}_{it}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{it}) &= \underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{it}) + \underline{Z}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{it}) \Rightarrow \\ \underline{Z}_{it}^2 &= \underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + 2\underline{Z}_2), \end{aligned}$$

also

$$\underline{Z}_{it} = \underline{Z}_W = \sqrt{\underline{Z}_1(\underline{Z}_1 + 2\underline{Z}_2)}.$$

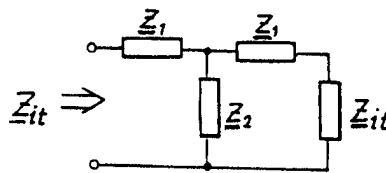


Abb.AZ.13c

AZ.14 Wellenimpedanzen:

Mit den Standard-Bezeichnungen (Abb.AZ.14b) gilt

$$\underline{U}_1 = j\omega(L_1 I_1 + M I_2), \quad \underline{U}_2 = j\omega(M I_1 + L_2 I_2)$$

und daher

$$\underline{Z}_{B1}(\infty) = j\omega L_1, \quad \underline{Z}_{B1}(0) = j\omega(L_1 - M^2/L_2).$$

Wir erhalten daraus die primäre Wellenimpedanz

$$\underline{Z}_{W1} = \sqrt{\underline{Z}_{B1}(0)\underline{Z}_{B1}(\infty)} = j\omega L_1 \sqrt{1 - M^2/(L_1 L_2)}$$

oder, unter Verwendung des Kopplungsgrades $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$ und analog für die Sekundärseite,

$$\underline{Z}_{W1} = j\omega L_1 \sqrt{1 - k^2}, \quad \underline{Z}_{W2} = j\omega L_2 \sqrt{1 - k^2}.$$

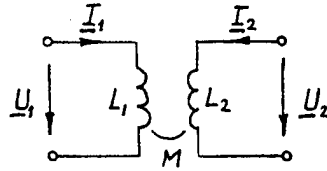


Abb.AZ.14b

AZ.15 Wellendämpfungsmaß:

- (i) Für die Kettenschaltung der beiden Zweitore gilt

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{A}}_2 &= \underline{\underline{A}}_1 \underline{\underline{A}}_1 = \begin{bmatrix} \cos h(\underline{g}), & \sin h(\underline{g}) \underline{Z}_W \\ \sin h(\underline{g}) / \underline{Z}_W, & \cos h(\underline{g}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos h(\underline{g}), & \sin h(\underline{g}) \underline{Z}_W \\ \sin h(\underline{g}) / \underline{Z}_W, & \cos h(\underline{g}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos^2 h(\underline{g}) + \sin^2 h(\underline{g}), & 2 \cos h(\underline{g}) \sin h(\underline{g}) \underline{Z}_W \\ 2 \cos h(\underline{g}) \sin h(\underline{g}) / \underline{Z}_W, & \cos^2 h(\underline{g}) + \sin^2 h(\underline{g}) \end{bmatrix}, \\
 \underline{\underline{A}}_2 &= \begin{bmatrix} \cos h(2\underline{g}), & \sin h(2\underline{g}) \underline{Z}_W \\ \sin h(2\underline{g}) / \underline{Z}_W, & \cos h(2\underline{g}) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

d.h. die Kettenschaltung besitzt die gleiche Wellenimpedanz, aber das doppelte Wellendämpfungsmaß.

- (ii) Wir vermuten (Induktionsannahme)

$$\underline{\underline{A}}_n = \begin{bmatrix} \cos h(n\underline{g}), & \sin h(n\underline{g}) / \underline{Z}_W \\ \sin h(n\underline{g}) / \underline{Z}_W, & \cos h(n\underline{g}) \end{bmatrix}$$

Lässt sich nun zeigen, dass durch Anfügen eines weiteren Gliedes sich die gleiche Kettenmatrix mit $n \rightarrow n+1$ ergibt, so ist die Annahme für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig. Tatsächlich erhalten wir durch Matrizenmultiplikation $\underline{\underline{A}}_n \underline{\underline{A}}_1 = \underline{\underline{A}}_{n+1}$ (Induktionsschritt). ■

AZ.16 Angepasster Abschwächer:

Wir verwenden die Impedanzform der Zweitorgleichungen, wobei wegen der Längssymmetrie (Abb.AZ.16b) der T-Schaltung

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_1 / \underline{I}_1 &= -\underline{U}_2 / \underline{I}_2 = \underline{Z}_W = 50 \Omega \\
 \underline{U}_1 / \underline{U}_2 &= -\underline{I}_1 / \underline{I}_2 = K,
 \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = R_1 + R_2, \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = R_2.$$

Dann ist

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = (Z_{11} - Z_{12}/K)I_1 \Rightarrow \underline{Z}_W = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}/K \\ \underline{U}_2 &= Z_{12}I_1 + Z_{11}I_2 = (-Z_{12}K + Z_{11})I_2 \Rightarrow \underline{Z}_W = \underline{Z}_{12}K - \underline{Z}_{11} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{Z}_{11} = \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} \underline{Z}_W \stackrel{!}{=} R_1 + R_2, \quad \underline{Z}_{12} = \frac{2K}{K^2 - 1} \underline{Z}_W \stackrel{!}{=} R_2,$$

und daraus folgt

$$R_1 = \frac{K - 1}{K + 1} \underline{Z}_W, \quad R_2 = \frac{2K}{K^2 - 1} \underline{Z}_W \quad \text{mit} \quad \underline{Z}_W = 50\Omega.$$

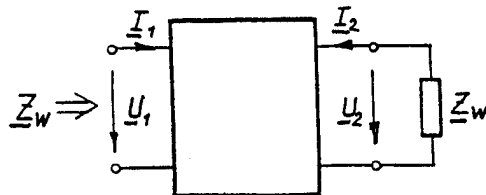


Abb.AZ.16b

AZ.17 Leistungsverstärkung:

Die Hybridparameter sind durch die Form

$$\begin{cases} U_1 = H_{11}I_1 + H_{12}U_2, \\ I_2 = H_{21}I_1 + H_{22}U_2 \end{cases}$$

der Zweitorgleichungen definiert. Mit

$$U_2 = -R_L I_2$$

erhalten wir aus der zweiten Gleichung zunächst

$$I_2 = H_{21}I_1 - H_{22}R_L I_2 \Rightarrow (1 + H_{22}R_L)I_2 = H_{21}I_1.$$

Weiters folgt aus der ersten Gleichung

$$U_1 = \frac{H_{11}}{H_{21}}(1 + H_{22}R_L)I_2 - H_{22}R_L I_2 = [H_{11} + \underbrace{(H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21})}_{|\underline{H}|} R_L] \frac{I_2}{H_{21}}$$

$$|\underline{H}| = \det(\underline{H})$$

$$= (H_{11} + |\underline{H}|R_L) \frac{I_2}{H_{21}}$$

und damit

$$V_P = -\frac{U_2 I_2}{U_1 I_1} = -\frac{I_2 U_2 I_2}{I_1 I_2 U_1} = \frac{H_{21}}{1 + H_{22}R_L} R_L \frac{H_{21}}{H_{11} + |\underline{H}|R_L},$$

also

$$V_P = -\frac{H_{21}^2 R_L}{(1 + H_{22} R_L)(H_{11} + |H| R_L)} \quad \text{mit } |H| = H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21}.$$

$dV_P(R_L)/dR_L = 0$ impliziert $H_{11} - H_{22}|H|R_L^2 \stackrel{!}{=} 0$, d.h. V_P ist maximal (es liegt tatsächlich ein Maximum vor) für

$$R_L = \sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22}|H|}},$$

vorausgesetzt, der Radikand ist positiv. ■

AZ.18 Einfügdämpfung:

Mit Bezug auf Abb.AZ.18c,d erhalten wir

$$U_{20} = \frac{220\Omega}{310\Omega} U_0, \quad R_i = 70\Omega + 220\Omega || 90\Omega,$$

und damit

$$U_2 = \frac{50\Omega}{R_i + 50\Omega} U_{20} = 0,193 U_0.$$

Wegen $U'_2 = U_0/2$ ist also das gesuchte Einfügdämpfungsmaß

$$a_{50} = 20 \lg |U'_2/U_2| \text{ dB} = -20 \lg (2 \cdot 0,193) \text{ dB} = 8,27 \text{ dB}.$$

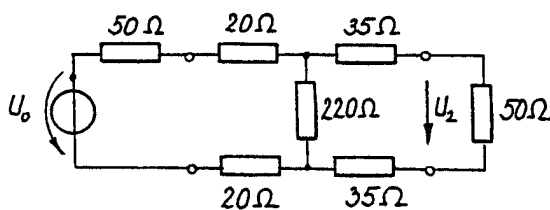


Abb.AZ.18c

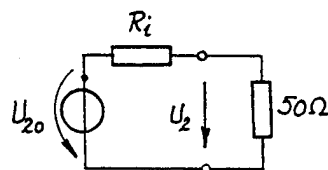


Abb.AZ.18d ■