

Kapitel T

Topologie elektrischer Schaltungen

Elektrische Stromkreise mit einer kleinen Anzahl von Elementen lassen sich durch direktes Anwenden der Kirchhoff-Regeln in Verbindung mit den Elementgleichungen meist problemlos analysieren. In den Anwendungen, beispielsweise in der elektronischen Signalverarbeitung oder in der elektrischen Energieverteilung, treffen wir jedoch häufig auf Schaltungen mit einer größeren Anzahl von Stromkreiselementen. In solchen Fällen müssen wir das Aufstellen der beschreibenden Gleichungen besser als bisher organisieren, insbesondere dann, wenn die Behandlung rechnerunterstützt erfolgen soll. Den Ausgangspunkt dafür bildet die Erfassung der **Topologie einer Schaltung**, d.h. die Beschreibung ihrer abstrakten Struktur durch einen orientierten Graphen und die daraus folgende Darstellung von Spannungen und Strömen, unabhängig von der Art der Stromkreiselemente.

T.1 Orientierte Graphen

Zunächst einige begriffliche Festlegungen: Wenn wir hier von **elektrischen Schaltungen** sprechen, so sind damit funktionsgerichtete, als Gesamtheit betrachtete Zusammenschaltungen konzentrierter Stromkreiselemente über widerstandslos gedachte Schaltverbindungen gemeint. Es handelt sich in der Regel um vereinfachte Modelle realer Schaltungen mit angepassten Idealisierungen realer Stromkreiselemente (Ersatzschaltungen). Als **Zweig** bezeichnen wir jeden Teil solch einer Schaltung, der als Zweipol (oder als Tor eines Mehrpols) aufgefasst werden kann und der aus einem idealen Stromkreiselement oder aus einer Kombination solcher Elemente mit insgesamt zwei Anschlüssen besteht. Ein **Knoten** ist ein Anschlusspunkt (Pol) eines Zweiges oder der Verbindungspunkt mehrerer Zweige. Im abstrakten Sinn besteht eine elektrische Schaltung also aus Zweigen und Knoten.

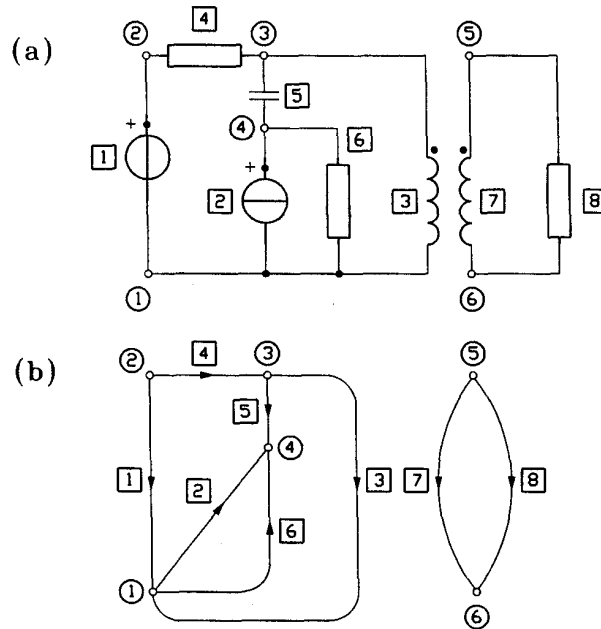


Abb.T.1 Eine einfache Schaltung (a) und zugehöriger orientierter Graph (b). Die im Prinzip willkürliche Nummerierung ist für die Knoten in Kreise und für die Zweige in Quadrate gesetzt.

Als **Graph einer Schaltung** wollen wir hier anschaulich die grafische Darstellung der Struktur der Schaltung verstehen, wobei Zweige durch Kurvenstücke und Knoten durch die Randpunkte der Kurvenstücke wiedergegeben werden¹. Es kommt somit nur auf die Art der Zusammenschaltung der durch die Zweige repräsentierten Zweipole an; mit welchen Stromkreiselementen die Zweige aufgebaut sind, spielt vorerst keine Rolle. In Abb.T.1 sehen Sie ein einfaches Beispiel. Sind die Zweige eines Graphen mit einer Orientierung (einem Durchlaufsinne) versehen, so spricht man von einem **orientierten Graphen**. Wir werden immer orientierte Graphen verwenden und die Orientierungen später als Bezugssinne für Ströme und Spannungen benutzen. Ein Zweig ist mit einem Knoten **inzipient**, wenn der Zweig in dem Knoten beginnt oder endet.

Beachten Sie: Orientierte Graphen können **Parallelzweige** enthalten - zwei oder mehrere Zweige besitzen die selben Knoten als Randpunkte (unabhängig von der Orientierung) - oder auch **Schlingen** - ein Zweig beginnt und endet im selben Knoten. Wir werden im folgenden ohne ausdrückliche Erwähnung stets Schlingenfreiheit voraussetzen, Parallelzweige aber zulassen. Möglich ist auch der Zerfall eines Graphen in mehrere Teile, die entweder überhaupt nicht, oder

¹Etwas allgemeiner kann man von einer Trägermenge \mathcal{K} - einer endlichen, nichtleeren Menge - und von einer auf \mathcal{K} definierten, zweistelligen Relation \mathcal{Z} - einer Teilmenge $\mathcal{Z} \subset \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ - ausgehen. Die Elemente von \mathcal{K} heißen Knoten, die Elemente von \mathcal{Z} heißen Zweige. Ein Graph \mathcal{G} ist definiert als das geordnete Paar $\mathcal{G} = (\mathcal{K}, \mathcal{Z})$. Unser bildlicher Begriff „Graph“ entspricht dann der Einbettung von \mathcal{G} in einen Ortsraum, wobei Knoten auf Punkte und Zweige auf Kurvenstücke abgebildet werden.

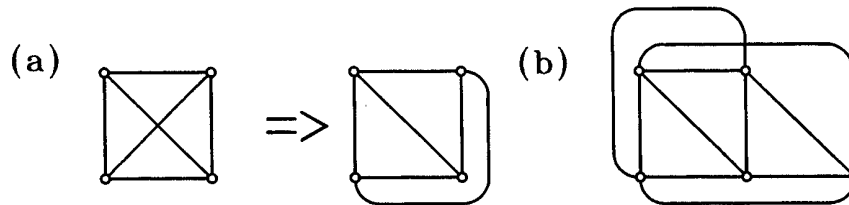


Abb. T.2 Beispiel für einen planaren (a) und für einen nichtplanaren Graphen (b). Der nichtplanare Graph lässt sich in der Ebene nicht kreuzungsfrei zeichnen.

nur über einen einzigen Knoten zusammenhängen. Dies schließt jedoch nicht aus, dass die beiden Schaltungsteile einander beeinflussen, wie das Beispiel der induktiven Kopplung aus Abb. T.1 zeigt.

Ein Graph \mathcal{G} heißt **zusammenhängend**, wenn jeder Knoten von einem beliebigen anderen Knoten aus über eine Folge aneinander anschließender Zweige erreichbar ist. Ein nicht zusammenhängender Graph besteht aus **Komponenten**, von denen jede für sich wieder einen zusammenhängenden Graphen bildet. Beispielsweise zerfällt unser Graph aus Abb. T.1b in zwei Komponenten, er ist nicht zusammenhängend. Gäbe es einen weiteren Zweig, der, sagen wir, die Knoten 1 und 6 verbindet, oder fielen diese Knoten überhaupt zusammen, etwa durch einen gemeinsamen Masseanschluss, so wäre der Graph zwar zusammenhängend, trotzdem aber etwas Besonderes: Die beiden Teile wären über ein **Gelenk** verbunden.

Lässt sich ein Graph in einer Ebene oder, äquivalent dazu, auf einer Kugel ohne Kreuzung von Zweigen zeichnen, so sprechen wir von einem **planaren** oder **ebenen Graphen**² (Abb. T.2). Eine zusammenhängende Folge von Zweigen, die einen geschlossenen Umlauf bilden, wobei jeder beteiligte Knoten nur einmal durchlaufen wird, heißt (zusammen mit den getroffenen Knoten) eine **Schleife** (Abb. T.3). Es handelt sich bei den Schleifen also um spezielle Teilgraphen, die einem gegebenen Graphen zugeordnet werden können. Weitere spezielle Teilgraphen³ eines **zusammenhängenden** Graphen \mathcal{G} sind seine **Bäume**: Ein zusammenhängender Teilgraph von \mathcal{G} , der zwar alle Knoten aus \mathcal{G} aber keine Schleifen enthält, heißt **Baum**. Die Zweige eines Baumes, **Baumzweige** genannt, verbinden demnach alle Knoten eines zusammenhängenden Graphen

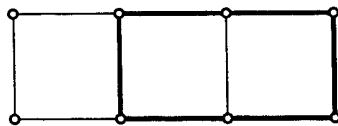


Abb. T.3 Beispiel für eine Schleife. Jeder beteiligte Knoten wird nur einmal durchlaufen.

²Bei einem komplizierten Graphen ist es häufig nicht leicht zu entscheiden, ob er planar ist oder nicht. Hier kann die hinreichende Bedingung helfen: Ein Graph mit $k \geq 5$ Knoten und z Zweigen ist nicht planar, wenn $z \geq 3k - 5$. Parallelzweige und Schlingen sind dabei nicht mitzuzählen.

³Allgemein besteht ein Teilgraph $\mathcal{G}_T = (\mathcal{K}_T, \mathcal{Z}_T)$ eines Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{K}, \mathcal{Z})$ aus einer Teilmenge $\mathcal{K}_T \subset \mathcal{K}$ der ursprünglichen Knotenmenge und aus einer Teilmenge $\mathcal{Z}_T \subset \mathcal{Z}$ der ursprünglichen Zweigmengen. \mathcal{K}_T muss dabei alle Knoten enthalten, mit denen die Zweige aus \mathcal{Z}_T inzident sind.

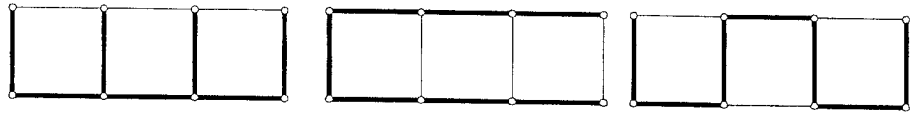


Abb.T.4 Beispiele für Bäume eines zusammenhängenden Graphen. Alle Knoten sind schleifenfrei zusammengeschlossen. Die dünn gezeichneten Zweige gehören nicht zum Baum. Sie heißen Verbindungszweige (Sehnen).

ohne Schleifenbildung (Abb.T.4). Aus den bisherigen Festlegungen folgt: Jeder zusammenhängende Graph enthält wenigstens einen Baum. Und: **Ein Baum mit k Knoten besteht aus $k - 1$ Baumzweigen.**

Ist in einem zusammenhängenden Graphen \mathcal{G} ein Baum festgelegt, so nennen wir einen Zweig aus \mathcal{G} , der nicht im Baum enthalten ist, **Verbindungszweig** oder **Sehne**. Alle Verbindungszweige und die damit inzidenten Knoten bilden zusammen den **komplementären Baum**, kurz, den **Co-Baum** zu dem vorgegebenen Baum (Abb.T.5a).

Mit Hilfe des Baumkonzeptes lassen sich spezielle, für die Schaltungsanalyse besonders gut geeignete Systeme von Schleifen konstruieren. Eine Schleife, die genau einen Verbindungszweig und einen oder mehrere Baumzweige enthält, heißt **Elementarschleife** oder **Masche**. In einem zusammenhängenden Graphen mit k Knoten und z Zweigen gibt es, unabhängig von der speziellen Baumwahl, immer **genau $m = z - k + 1$ Maschen**⁴. Sie bilden zusammen eine **Schleifenbasis** (Abb.T.5b), und es lässt sich zeigen, dass jede Schleife des Graphen als ganzzahlige Linearkombination der Maschen einer Schleifenbasis darstellbar ist.

Durch Herausnehmen von Zweigen kann ein ursprünglich zusammenhängender Graph in Komponenten zerfallen. Eine **Schnittmenge** (ein Trennbündel) ist

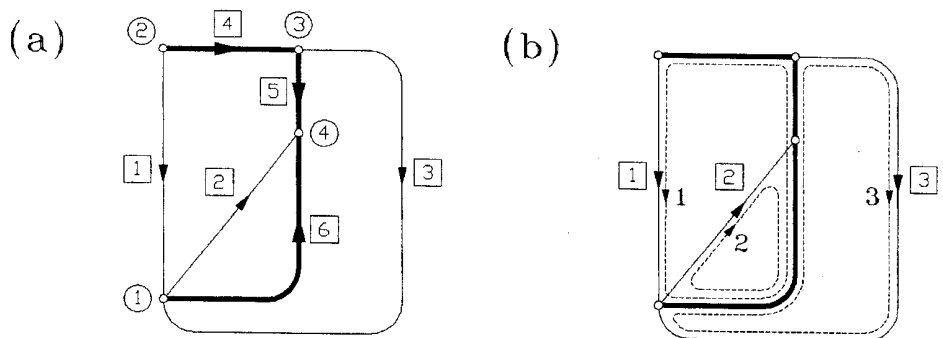


Abb.T.5 Der Graph aus Abb.T.1b links und ein möglicher Baum (a). Die dick ausgezogenen Zweige 4, 5 und 6 sind die Baumzweige. Die dünn ausgezogenen Zweige 1, 2 und 3 sind die Verbindungszweige (Sehnen). Sie bilden zusammen mit den Knoten 1 bis 4 den Co-Baum. Aus dem festgelegten Baum lässt sich die Schleifenbasis (b) ableiten. Die drei Elementarschleifen (Maschen) sind strichliert gezeichnet.

⁴Die Zahl m wird auch der Co-Rang oder die erste Betti-Zahl des zusammenhängenden Graphen genannt. Für Graphen mit p Komponenten ist die erste Betti-Zahl durch $m = z - k + p$ erklärt.

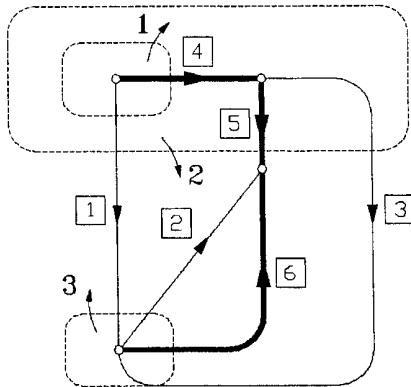


Abb.T.6 Die Zweigmengen (1,4), (1,3,5) und (1,2,3,6) bilden jeweils eine elementare Schnittmenge (einen Schnitt) des Graphen in Bezug auf den gewählten Baum (dick ausgezogen). Jede enthält genau einen Baumzweig. Die Spuren der die Schnitte erzeugenden Flächen sind strichliert gezeichnet. Zusammen bilden die drei Schnitte eine Schnittmengenbasis.

eine Teilmenge von Zweigen eines zusammenhängenden Graphen, deren gleichzeitiges Eliminieren notwendig und hinreichend für den Zerfall eines Graphen in zwei Komponenten ist. Werden also alle Zweige einer Schnittmenge aus dem Graphen entfernt („durchgeschnitten“), so geht der Zusammenhang verloren. Wird auch nur ein einziger Zweig der Schnittmenge wieder eingefügt, entsteht erneut ein zusammenhängender Graph. Stellen Sie sich am besten vor, das Durchschneiden wird durch eine geschlossene Fläche mit Durchtrittssinn bewirkt. Alle Zweige, die zur Schnittmenge gehören, durchsetzen diese Hülle. Eine der beiden entstehenden Komponenten liegt dann ganz auf der einen, die andere Komponente ganz auf der anderen Seite der Fläche.

Nehmen wir nun an, in unserem zusammenhängenden Graphen ist bereits ein Baum festgelegt. Wir können dann spezielle, für die Schaltungsanalyse besonders gut geeignete Systeme von Schnittmengen konstruieren. Eine Schnittmenge, die genau einen Baumzweig enthält, nennen wir **elementare Schnittmenge** oder **Schnitt**. In einem zusammenhängenden Graphen mit k Knoten gibt es, unabhängig von der speziellen Baumwahl, immer **genau $s = k - 1$ Schnitte**⁵ (einen zu jedem Baumzweig). Sie bilden zusammen eine **Schnittmengenbasis** (Abb.T.6), und es läßt sich zeigen, dass jede Schnittmenge eines Graphen als ganzzahlige Linearkombination der Schnitte einer Schnittmengenbasis darstellbar ist.

Wir werden im folgenden stets **orientierte, zusammenhängende, schlingenfreie Graphen** voraussetzen, die jedoch **nicht notwendig planar** sein müssen. Die Ergebnisse gelten dann sinngemäß auch für jede Komponente eines

⁵Die Zahl s wird auch der Rang oder die zweite Betti-Zahl des zusammenhängenden Graphen genannt. Für Graphen mit p Komponenten ist die zweite Betti-Zahl durch $s = k - p$ erklärt. Es gilt $m + s = z$.

nicht zusammenhängenden Graphen. Für einen Graphen mit

- k = Anzahl der Knoten
- z = Anzahl der Zweige
- s = Anzahl der Baumzweige
= Anzahl der elementaren Schnittmengen (Schnitte) einer Schnittmengenbasis
- m = Anzahl der Verbindungszweige (Sehnen)
= Anzahl der Elementarschleifen (Maschen) einer Schleifenbasis

haben wir die einfachen Beziehungen

$$\boxed{s = k - 1} \quad , \quad \boxed{m = z - s} \quad . \quad (\text{T.1})$$

Außerdem ist es günstig, bei der Konstruktion einer Schleifenbasis und einer Schnittmengenbasis folgende **Konventionen** zu beachten:

Nach dem Festlegen eines Baums⁶ im orientierten Graphen werden

1. zuerst die Verbindungszweige mit den Zahlen von 1 bis m und dann die Baumzweige mit den Zahlen von $m + 1$ bis z nummeriert.
2. Jede Masche (Elementarschleife) bekommt die innere Orientierung (Umlaufsinn) und die Nummer ihres Verbindungszweiges (Jede Masche enthält genau einen Verbindungszweig. Abb.T.5b).
3. Jedem Schnitt (elementare Schnittmenge) ist eine Hülle zugeordnet, deren transversale Orientierung (Durchtrittssinn) von der inneren Orientierung ihres Baumzweiges übernommen wird (Jeder Schnitt enthält genau einen Baumzweig). Die Nummerierung 1, 2, ..., s der elementaren Schnittmengen erfolgt entsprechend der Nummerierung $m + 1, m + 2, \dots, m + s$ ihrer Baumzweige (Abb.T.6).

T.2 Inzidenzmatrizen

Graphen lassen sich auf gewisse Matrizen abbilden, durch die sie vollständig oder in bestimmten Eigenschaften charakterisiert werden und die eine kompakte Formulierung der Gleichungen für die Ströme und Spannungen ermöglichen. Wie diese Matrizen aufzustellen sind, soll im folgenden vorgestellt werden.

Ein orientierter, zusammenhängender, schlingenfreier⁷ Graph \mathcal{G} besitzt eine Matrixdarstellung in Form der **vollständigen Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix** \underline{A}_v , kürzer auch **vollständige Inzidenzmatrix** oder **erweiterte Inzidenzmatrix** genannt. Es handelt sich dabei um eine $k \times z$ - Matrix, in der jeder der k Knoten durch eine Zeile und jeder der z Zweige durch eine Spalte

⁶Bei komplizierten Graphen mit vielen Knoten kann die Baumsuche recht aufwendig sein.

⁷Graphen mit Schlingen lassen sich durch Knoten-Knoten-Inzidenzmatrizen darstellen.

vertreten ist. Ihre Elemente $A_{i\zeta}$, $i = 1, 2, \dots, k$ und $\zeta = 1, 2, \dots, z$ sind definiert durch

$$A_{i\zeta} = \begin{cases} +1, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ vom Knoten } i \text{ wegführt,} \\ -1, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ zum Knoten } i \text{ hinführt,} \\ 0, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ mit dem Knoten } i \text{ nicht inzident} \\ & \text{ist.} \end{cases} \quad (\text{T.2})$$

Für unseren Graphen aus Abb.T.5a mit $k = 4$ Knoten und $z = 6$ Zweigen haben wir beispielsweise

$$\tilde{A}_v = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{T.3})$$

Hier ist etwa $A_{24} = 1$, weil der Zweig 4 vom Knoten 2 wegführt.

Jede Spalte einer vollständigen Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix enthält genau zwei von Null verschiedene Elemente, nämlich einmal $+1$ und einmal -1 ⁸. Damit verschwindet aber die Summe aller Zeilen, und der Rang der Matrix \tilde{A}_v ist höchstens $s = k - 1$. Es lässt sich zeigen, dass dies auch der kleinstmögliche Rang ist, dass also die Matrix \tilde{A}_v immer den **Rang** $s = k - 1$ besitzt⁹. Beim Entfernen einer der k Zeilen geht nichts an Information über den Graphen verloren.

Wir wählen einen beliebigen der k Knoten des Graphen aus, nennen ihn **Referenzknoten** und streichen die zugehörige Zeile in der vollständigen Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix \tilde{A}_v . Die so entstehende $s \times z$ - Matrix \tilde{A} nennen wir **reduzierte Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix**, oder kürzer **reduzierte Inzidenzmatrix**. In ihr ist jeder Knoten - ausgenommen der Referenzknoten - durch eine Zeile und jeder Zweig durch eine Spalte vertreten. Wenn wir in unserem Beispiel aus Abb.T.5a den Knoten 1 als Referenzknoten wählen, dann gilt

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{T.4})$$

Es ist lediglich in der Matrix (T.3) die erste Zeile zu streichen.

Als nächstes betrachten wir eine Schleifenbasis - jede der m Maschen (Elementarschleifen) ist für sich einheitlich orientiert - zusammen mit den z Zweigen des Graphen und definieren die zugehörige **Masche-Zweig-Inzidenzmatrix** \tilde{M} , kurz, die **Maschenmatrix** als $m \times z$ - Matrix mit den Elementen $M_{i\zeta}$,

⁸Durch parallele Zweige mit gleicher Orientierung bekommt \tilde{A}_v außerdem gleiche Spalten.

⁹Bei nicht zusammenhängenden Graphen mit p Komponenten besitzt \tilde{A}_v den Rang $s = k - p$.

$i = 1, \dots, m$ und $\zeta = 1, \dots, z$, definiert durch

$$M_{i\zeta} = \begin{cases} +1, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ in der Masche } i \text{ mit gleicher Ori-} \\ & \text{entierung enthalten ist,} \\ -1, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ in der Masche } i \text{ mit entgegenge-} \\ & \text{setzter Orientierung enthalten ist,} \\ 0, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ in der Masche } i \text{ nicht enthalten ist.} \end{cases} \quad (\text{T.5})$$

Diese Bildungsvorschrift führt bei unserem Graphen aus Abb.T.5 mit $m = 3$ Maschen und $z = 6$ Zweigen auf

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{T.6})$$

mit beispielsweise $M_{35} = -1$, weil der Zweig 5 in der Masche 3 mit entgegengesetzter Orientierung enthalten ist. Beachten Sie: Jede Masche übernimmt die Orientierung ihres Verbindungszweiges.

In der Matrix (T.6) steht vorne die $m \times m$ - Einismatrix. Dies ist eine allgemeine Eigenschaft von Maschenmatrizen, sofern den im Anschluss an Gl.(T.1) aufgelisteten Konventionen gefolgt wird. \tilde{M} besitzt damit immer den **Rang** m und erscheint dann in der Form

$$\tilde{M} = \left[\tilde{E}, \tilde{M}_B \right], \quad (\text{T.7})$$

wobei die $m \times n$ - Matrix \tilde{M}_B als Masche-Baumzweig-Inzidenzmatrix anzusprechen ist¹⁰.

Schließlich läßt sich auch der Zusammenhang von Schnittmengen und Zweigen auf ähnliche Art erfassen. Wir betrachten dazu eine Schnittmengenbasis - jeder der s Schnitte (elementare Schnittmengen) ist für sich einheitlich über die zugeordnete Schnittfläche orientiert - zusammen mit den z Zweigen des Graphen. Die zugehörige **Schnitt-Zweig-Inzidenzmatrix** \tilde{S} , kurz, die **Schnittmatrix**, ist eine $s \times z$ - Matrix mit den Elementen $S_{i\zeta}$, $i = 1, \dots, s$ und $\zeta = 1, \dots, z$, definiert durch

$$S_{i\zeta} = \begin{cases} +1, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ im Schnitt } i \text{ mit gleicher Ori-} \\ & \text{entierung enthalten ist,} \\ -1, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ im Schnitt } i \text{ mit entgegengesetz-} \\ & \text{ter Orientierung enthalten ist,} \\ 0, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ im Schnitt } i \text{ nicht enthalten ist.} \end{cases} \quad (\text{T.8})$$

¹⁰Dass in der Darstellung (T.7) vorne die $m \times m$ - Einismatrix steht, ist klar: Jede der m Maschen enthält genau einen Verbindungszweig, und Konvention 2 stellt die richtige Reihenfolge und die übereinstimmende Orientierung her. Die restlichen $z - m = s$ Spalten beziehen sich daher auf die Baumzweige.

Für unseren Graphen aus Abb.T.5 und Abb.T.6 mit $s = 3$ Schnitten und $z = 6$ Zweigen haben wir

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{T.9})$$

wobei z. B. $S_{23} = 1$, weil der Zweig 3 mit übereinstimmender Orientierung durch die den Schnitt erzeugende Hülle 2 tritt. Beachten Sie: Der Baumzweig liefert die Orientierung für den Schnitt und für die erzeugende Hülle.

In der Matrix (T.9) steht hinten die $s \times s$ -Einsmatrix. Mit den getroffenen Konventionen gilt das für jede Schnittmatrix, die damit immer den **Rang** s besitzt und in der speziellen Form

$$\tilde{S} = [\tilde{S}_V, E] \quad (\text{T.10})$$

erscheint. Die vorne stehende $s \times m$ -Matrix \tilde{S}_V können wir Schnitt-Verbindungs-zweig-Inzidenzmatrix nennen¹¹.

Bei einem genaueren Blick auf die Matrizen (T.6) und (T.9) entdecken wir eine interessante Eigenschaft: Wird die in \tilde{S} vorne stehende Matrix \tilde{S}_V transponiert und negativ genommen, so stimmt sie mit der in \tilde{M} hinten stehenden Matrix \tilde{M}_B überein:

$$\tilde{M}_B = -\tilde{S}_V^T, \quad M_{i,m+j} = -S_{ji} \quad (\text{T.11})$$

mit $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, s$, also z. B. $M_{35} = -S_{23}$. Dies ist nicht etwa eine Spezialität unseres Beispiels, sondern die Formulierung einer allgemeinen Eigenschaft:

Enthält die Masche i den Baumzweig $m+j$ mit gleicher Orientierung (mit entgegengesetzter Orientierung) [nicht], so ist der Verbindungszweig i im Schnitt j mit entgegengesetzter Orientierung (mit gleicher Orientierung) [nicht] enthalten.

Sie können sich anhand von Abb.T.7 klarmachen, dass diese Aussage eine Folge der Definition von Maschen und Schnitten und unserer Konventionen ist. Die

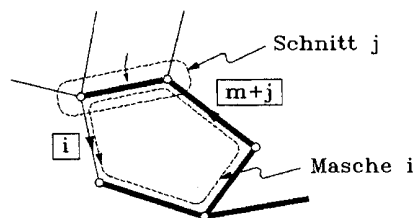


Abb.T.7 Ausschnitt aus einem Graphen. Die Baumzweige sind dick, die Verbindungszweige sind dünn ausgezogen.

¹¹Auch die Darstellung (T.10) ist leicht verständlich: Jeder der s Schnitte enthält genau einen Baumzweig, und Konvention 3 stellt die richtige Reihenfolge und die übereinstimmende Orientierung her. Die vorderen $z - s = m$ Spalten sind daher den Verbindungszweigen zugeordnet.

Masche i enthält nämlich immer den Verbindungsweig i , und nur diesen Verbindungsweig, von dem sie die Orientierung übernimmt. Angenommen, sie enthält auch den Baumweig $m + j$ mit gleicher Orientierung. Dieser definiert den Schnitt j und dessen Orientierung. Weil aber ein Schnitt immer nur einen Baumweig enthält, trifft die zugeordnete Schnitthülle notwendig den Verbindungsweig i , und zwar mit entgegengesetzter Orientierung.

Wir können den Inhalt von Gl.(T.11) auch anders formulieren: Multiplikation der Maschenmatrix mit der transponierten Schnittmatrix liefert wegen der Darstellungen (T.7) und (T.10)

$$\underline{M} \underline{S}^T = \left[\underline{E}, \underline{M}_B \right] \begin{bmatrix} \underline{S}_V^T \\ \underline{E} \end{bmatrix} = \underline{S}_V^T + \underline{M}_B, \quad (\text{T.12})$$

und dies ergibt mit Gl.(T.11) die Nullmatrix. Wir erhalten also die wichtige Beziehung

$$\boxed{\underline{M} \underline{S}^T = \underline{0}}. \quad (\text{T.13})$$

In Worten: Das Produkt der $m \times z$ - Maschenmatrix und der Transponierten der $s \times z$ - Schnittmatrix verschwindet¹².

T.3 Knoten- und Schnittgleichungen

Mit Hilfe der Inzidenzmatrizen lassen sich für eine **zusammenhängende Schaltung** die Beziehungen der Ströme untereinander und der Spannungen untereinander systematisch und auf kompakte Weise formulieren. Diese Beziehungen gelten ganz allgemein - auch für nichtlineare Schaltungen - falls die üblichen Voraussetzungen der Netzwerktheorie gerechtfertigt sind: Elektrische Ströme gibt es außerhalb der konzentrierten Stromkreiselemente nur in den Schaltverbindungen, und es treten in den Stromkreiselementen und auf den Schaltverbindungen keine wesentlichen Überschussladungen auf. Weiters müssen sich die Zweigspannungen eindeutig definieren lassen. Sie sind Kurven zugeordnet, die zwischen den Knoten und außerhalb der Stromkreiselemente verlaufen. Aus solchen Kurven gebildete Schleifen dürfen nicht mit magnetischen Flüssen merkbarer zeitlicher Änderungsrate verkettet sein. Wir betrachten hier also immer Schaltungen, deren Topologie sich durch zusammenhängende, orientierte Graphen mit k Knoten und z Zweigen erfassen lässt. Es gelten dann die Beziehungen (T.1).

Zuerst fassen wir die Ströme in den Zweigen unserer Schaltung in der Reihenfolge der gewählten Zweignummerierung zur $z \times 1$ - **Matrix der Zweigströme** zusammen,

$$\underline{i} = [i_1, i_2, \dots, i_z]^T. \quad (\text{T.14})$$

¹²Die „Zeilenvektoren“ der Maschenmatrix und der Schnittmatrix sind „orthogonal“.

Bezugssinn dafür ist jeweils die angenommene Zweigorientierung. Nun entspricht jedem Knoten - ausgenommen dem Referenzknoten - genau eine Zeile der reduzierten Inzidenzmatrix \tilde{A} . Da \tilde{A} den Rang $s = k - 1$ besitzt, können wir deshalb die s linear unabhängigen **Knotengleichungen** für die z Zweigströme zusammenfassen in der Matrixgleichung

$$\boxed{\tilde{A} \tilde{i} = 0} \quad (\text{T.15})$$

Die spezielle, durch die Knotengleichungen ausgedrückte Formulierung der Ladungserhaltung lässt sich, wie Sie wissen, auf Hüllen erweitern. Wir verwenden dazu die Schnittmatrix \tilde{S} , die ebenfalls den Rang s besitzt und in der jeder Schnitt durch genau eine Zeile vertreten ist. Die s linear unabhängigen **Schnittgleichungen**

$$\boxed{\tilde{S} \tilde{i} = 0} \quad (\text{T.16})$$

für die z Zweigströme sind daher den Knotengleichungen äquivalent. Außerdem können wir mit Bezug auf den festgelegten Baum die z Zweigströme gruppieren in die $m \times 1$ - Matrix \tilde{i}_V der **Verbindungszweigströme**, auch **Maschenströme** genannt, und in die $s \times 1$ - Matrix \tilde{i}_B der **Baumzweigströme** (beachten Sie $z = m + s$),

$$\tilde{i}_V = [i_1, i_2, \dots, i_m]^T, \quad \tilde{i}_B = [i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_z]^T \quad (\text{T.17})$$

Zusammen mit der Darstellung (T.10) der Schnittmatrix lässt sich dann Gl.(T.16) in der Form

$$\tilde{S} \tilde{i} = [\tilde{S}_V, \tilde{E}] \begin{bmatrix} \tilde{i}_V \\ \tilde{i}_B \end{bmatrix} = \tilde{S}_V \tilde{i}_V + \tilde{i}_B = 0$$

schreiben, was mit Gl.(T.11) den Zusammenhang

$$\boxed{\tilde{i}_B = -\tilde{S}_V \tilde{i}_V = \tilde{M}_B^T \tilde{i}_V} \quad (\text{T.18})$$

liefert. Die Baumzweigströme sind demnach aus den Verbindungszweigströmen zu berechnen. Weiters erhalten wir über

$$\tilde{i} = \begin{bmatrix} \tilde{i}_V \\ \tilde{i}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E} \tilde{i}_V \\ \tilde{M}_B^T \tilde{i}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{M}_B^T \end{bmatrix} \tilde{i}_V = [\tilde{E}, \tilde{M}_B]^T \tilde{i}_V$$

die Beziehung

$$\boxed{\tilde{i} = \tilde{M}^T \tilde{i}_V} \quad (\text{T.19})$$

Sie vermittelt die Berechnung aller Zweigströme allein aus den Verbindungszweigströmen.

T.4 Maschengleichungen

Ähnliche Zusammenhänge stellen wir nun auch für die Spannungen her. Wir wählen als Bezugssinn für die Spannung entlang eines Zweiges die jeweilige Zweigorientierung und fassen alle diese **Zweigspannungen** in der Reihenfolge der Zweignummerierung zusammen in der $z \times 1$ - Matrix

$$\underline{u} = [u_1, u_2, \dots, u_z]^T . \quad (\text{T.20})$$

Jede der mit Bezug auf einen festgelegten Baum über die m Verbindungs Zweige erklärten Maschen (Elementarschleifen) ist in der Maschenmatrix (T.5) durch eine Zeile vertreten, jeder Zweig durch eine Spalte. Da jede Masche für sich einheitlich orientiert ist, stellt die Matrixgleichung

$$\boxed{\underline{M} \underline{u} = \underline{0}} \quad (\text{T.21})$$

ein System von $m = z - k + 1$ (entsprechend dem Rang m von \underline{M}) linear unabhängigen **Maschengleichungen** dar. In einer zusammenhängenden Schaltung mit k Knoten und z Zweigen gibt es demnach - unabhängig von der speziellen Baumwahl - genau $m = z - k + 1$ linear unabhängige Maschengleichungen.

Wiederum mit Bezug auf den festgelegten Baum bilden in der Zweigspannungsmatrix (T.20) die ersten m Elemente die $m \times 1$ - Matrix \underline{u}_V der **Verbindungszweigspannungen** und die restlichen s Elemente die $s \times 1$ - Matrix \underline{u}_B der **Baumzweigspannungen**,

$$\underline{u}_V = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T , \quad \underline{u}_B = [u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_z]^T . \quad (\text{T.22})$$

Mit der Darstellung (T.7) der Maschenmatrix schreiben wir nun die Maschengleichungen (T.21) in der Form

$$\underline{M} \underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{E} & \underline{M}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_V \\ \underline{u}_B \end{bmatrix} = \underline{u}_V + \underline{M}_B \underline{u}_B = \underline{0} ,$$

oder, zusammen mit Gl.(T.11),

$$\boxed{\underline{u}_V = -\underline{M}_B \underline{u}_B = \underline{S}_V^T \underline{u}_B} . \quad (\text{T.23})$$

Die Verbindungszweigspannungen lassen sich demnach aus den Baumzweigspannungen vollständig berechnen. Außerdem gilt wegen

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{u}_V \\ \underline{u}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_V^T \underline{u}_B \\ \underline{E} \underline{u}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_V^T \\ \underline{E} \end{bmatrix} \underline{u}_B = \begin{bmatrix} \underline{S}_V & \underline{E} \end{bmatrix}^T \underline{u}_B$$

die Beziehung

$$\boxed{\underline{u} = \underline{S}^T \underline{u}_B} , \quad (\text{T.24})$$

d. h., alle Zweigspannungen sind allein aus den Baumzweigspannungen berechenbar.

Halten wir fest: Die Bedingungen, die den Zweigströmen und Zweigspannungen einer Schaltung von deren Topologie auferlegt werden, sind vollständig in den Schnittgleichungen (T.16) und in den Maschengleichungen (T.21) erfasst. Die formalen Lösungen dieser Gleichungen sind, wie Sie mit Gl. (T.13) sehen, die Darstellungen (T.19) bzw. (T.24). Allerdings reichen diese $m + s = z$ Gleichungen nicht aus, die Strom- und Spannungsverteilung in der Schaltung vollständig zu bestimmen, weil dazu insgesamt $2z$ Unbekannte (z Zweigströme und z Zweigspannungen) berechnet werden müssen. Es sind zusätzlich z Zweigggleichungen erforderlich, die eine Verknüpfung zwischen den Zweigströmen und den Zweigspannungen über die physikalischen Eigenschaften der Stromkreiselemente herstellen. Wir kommen darauf im nächsten Kapitel zurück.

Neben den Verbindungszweigspannungen und den Baumzweigspannungen möchte ich noch die in der Schaltungsanalyse ebenfalls häufig gebrauchte $s \times 1$ -Matrix \underline{u}_K der **Knotenspannungen**

$$\underline{u}_K = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T, \quad (\text{T.25})$$

auch **Knotenpotentiale** genannt, erwähnen. Um sie festzulegen, haben wir in unserer Schaltung einen Referenzknoten zu wählen. Die Knotenspannungen sind dann als die Spannungen der restlichen $s = k - 1$ Knoten gegen den Referenzknoten erklärt. Mit der reduzierten Inzidenzmatrix \underline{A} können wir über die Matrixgleichung

$$\underline{u} = \underline{A}^T \underline{u}_K \quad (\text{T.26})$$

schließlich die Beziehung zu den Zweigspannungen herstellen. Ein Baum ist dazu nicht nötig.

T.5 Satz von Tellegen

Die Betrachtung allein der Topologie einer Schaltung - unabhängig von der Natur der Stromkreiselemente - führt zu einer interessanten Aussage, die wir jetzt herleiten wollen. Angenommen, eine Schaltung \mathcal{S} werde durch einen orientierten Graphen \mathcal{G} repräsentiert. Als Bezugssinne für die Zweigspannungen und Zweigströme wählen wir wie bisher die Zweigorientierungen, so dass einheitlich das Verbraucherbezugssystem gilt. Sei nun \underline{u} irgendein **vollständiges System von Zweigspannungen**, das zwar die **Maschengleichungen (T.21) erfüllt**, sonst aber keinen Einschränkungen unterliegt. Weiters sei \underline{i}' irgendein **vollständiges System von Zweigströmen**, das den **Schnittgleichungen (T.16) genügt**, sonst aber ebenfalls ganz beliebig angenommen werden kann. Der Strich an der Zweigstrommatrix soll darauf hinweisen, dass die Systeme der Spannungen und Ströme nicht notwendig die tatsächliche Strom- und Spannungsverteilung in unserer Schaltung zu einem bestimmten Zeitpunkt

beschreiben müssen, sondern lediglich für sich den Maschengleichungen bzw. den Schnittgleichungen unterworfen sind. Unter Verwendung der Darstellungen (T.19) und (T.24) folgt dann

$$\underline{u}^T \underline{i}' = (\underline{S}^T \underline{u}_B)^T (\underline{M}^T \underline{i}'_V) = \underline{u}_B^T (\underline{S} \underline{M}^T) \underline{i}'_V ,$$

und dieser Ausdruck verschwindet wegen der universellen Eigenschaft (T.13) der Maschenmatrix und der Schnittmatrix. Dies ist der **Satz von Tellegen**

$$\boxed{\underline{u}^T \underline{i}' = 0} , \quad \boxed{\sum_{\zeta=1}^z u_{\zeta} i'_{\zeta} = 0} . \quad (\text{T.27})$$

„Erfüllt ein System von Zweigspannungen für sich die Maschengleichungen und ein System von Zweigströmen für sich die Schnittgleichungen oder die Knotengleichungen und gilt einheitlich das Verbraucher- oder das Erzeugerbezugssystem, so ist das Produkt der Zweigströme mit den Zweigspannungen, summiert über alle Zweige, gleich Null.“

Die Bedeutung des Satzes von Tellegen liegt in der Allgemeinheit seiner Aussage und der Vielfalt der daraus zu ziehenden Schlüsse. Über die Art der konzentrierten Stromkreiselemente werden überhaupt keine Annahmen getroffen, sie können durchaus nichtlinear, gekoppelt oder gesteuert sein. Die Spannungs- und Stromverteilungen müssen auch gar nicht zur selben Schaltung gehören. Wenn wir beispielsweise zwei Schaltungen \mathcal{S} und \mathcal{S}' betrachten, die lediglich den gleichen orientierten Graphen \mathcal{G} gemeinsam haben, dazu irgendein vollständiges System \underline{u} von Zweigspannungen in \mathcal{S} , das den Maschengleichungen genügt, irgendein vollständiges System \underline{i} von Zweigströmen in \mathcal{S} , das die Schnittgleichungen erfüllt, und entsprechende Größen \underline{u}' und \underline{i}' in \mathcal{S}' , dann gilt

$$\underline{u}^T \underline{i}' = \underline{u}'^T \underline{i} . \quad (\text{T.28})$$

Auch diese Ausdrücke verschwinden, weil z.B. $\underline{u}' = \underline{0}$ oder $\underline{i} = \underline{0}$ zulässige Systeme darstellen (erfüllen die Maschen- und Schnittgleichungen).

Diese Ergebnisse können direkt in die **komplexe Wechselstromrechnung** übernommen werden, weil die Maschen- und Schnittgleichungen jeweils lineare algebraische Gleichungen mit konstanten Koeffizienten sind. Gelten sie für die reellen Momentanwerte der Zweigspannungen und Zweigströme, so sind sie auch für die zugehörigen komplexen Amplituden, die komplexen Effektivwerte, deren konjugiert komplexe Größen, die Real- und Imaginärteile usw., nicht aber für die Beträge gültig.

Stellen \underline{u} und $\underline{i}' = \underline{i}$ in Gl.(T.27) die in einer Schaltung zu einem bestimmten Zeitpunkt tatsächlich vorhandenen Zweigspannungen bzw. Zweigströme dar, so reduziert sich die Aussage des Satzes von Tellegen auf die **Leistungsbilanz** in einem abgeschlossenen physikalischen System: Die Summe aller Zweigleistungen ist gleich Null. Beachten Sie, dass einheitlich das Verbraucherbezugssystem angenommen wurde und dass über **alle Zweige** der Schaltung zu summieren

ist - einschließlich der Tore (Anschlusspaare), über die unsere Schaltung gegebenfalls mit anderen Schaltungen verbunden ist.

Angenommen, die Schaltung enthält t Tore, über die sie mit ihrer Umgebung elektrisch in Verbindung steht. Wir nummerieren diese Zweige von 1 bis t und die restlichen von $t + 1$ bis z . Der Satz von Tellegen besagt dann, dass die über die Tore zugeführte Momentanleistung

$$p = - \sum_{\zeta=1}^t u_{\zeta} i_{\zeta}$$

gleichzeitig von den restlichen Zweigen aufgenommen wird,

$$p = \sum_{\zeta=t+1}^z u_{\zeta} i_{\zeta} . \quad (\text{T.29})$$

Diese Aussage erscheint nicht mehr ganz so selbstverständlich, wenn wir beachten, dass sie entsprechend auch für Zeiger der komplexen Wechselstromrechnung übernommen werden kann. Insbesondere ist in einer Schaltung, die aus einem Sinusnetz gespeist wird, die gesamte komplexe Scheinleistung als Summe der komplexen Zweigscheinleistungen berechenbar,

$$\underline{S} = \sum_{\zeta=t+1}^z \underline{U}_{\zeta} \underline{I}_{\zeta}^* . \quad (\text{T.30})$$

Daraus folgt, dass sich auch die gesamte Wirkleistung und die gesamte Blindleistung zweigeweise berechnen lässt. Weitere Anwendungen des Satzes von Tellegen werden Sie im Kapitel S kennen lernen.

T.6 Fragen

1. Wie erklären Sie den Begriff „elektrische Schaltung“?
2. Was verstehen Sie in diesem Zusammenhang unter „Zweig“ und „Knoten“? Welche Objekte werden damit dargestellt?
3. Was meinen wir, wenn wir vom „orientierten Graphen“ einer Schaltung sprechen? Welche Eigenschaften der Schaltung lassen sich damit erfassen?
4. Wann nennen wir einen Graphen „zusammenhängend“? Wie sind die „Komponenten“ eines Graphen erklärt?
5. Spezielle Teilgraphen eines orientierten Graphen sind dessen Schleifen. Wie sind sie definiert? Was bedeutet „Schlinge“?
6. Andere spezielle Teilgraphen eines orientierten Graphen sind dessen Bäume. Wie sind diese für zusammenhängende Graphen erklärt? Was verstehen Sie unter einem „Verbindungszweig“?
7. Wie konstruieren Sie eine Schleifenbasis für einen orientierten Graphen? Was genau bedeutet der Begriff „Masche“?
8. Aus welchen Elementen besteht eine Schnittmenge eines Graphen?
9. Wie gehen Sie vor, wenn Sie für einen orientierten Graphen eine Schnittmengenbasis festlegen wollen? Was genau bedeutet der Begriff „Schnitt“?

10. Welche Zusammenhänge bestehen in einem orientierten, zusammenhängenden, schlingenfreien Graphen zwischen den Anzahlen der Knoten, Zweige, Baumzweige, Verbindungszweige, Schnitte und Maschen?
11. Wenn Sie einen Baum festgelegt haben, welcher Konvention folgen Sie dann günstiger Weise bei der Nummerierung der Zweige? Wie nummerieren und orientieren Sie die Maschen und die Schnitte?
12. Wie ist die vollständige, wie die reduzierte Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix eines orientierten, zusammenhängenden, schlingenfreien Graphen erklärt? Wie groß sind die Ränge dieser beiden Matrizen?
13. Wie lautet der vollständige Name der Maschenmatrix? Wie ist sie definiert und wie groß ist ihr Rang?
14. Wie lautet der vollständige Name der Schnittmatrix? Wie ist diese definiert und wie groß ist deren Rang?
15. Wenn Sie eine Maschenmatrix kennen, wie finden Sie dann die zugehörige Schnittmatrix, und umgekehrt? Welche kompakte Beziehung besteht zwischen der Maschenmatrix und der Schnittmatrix?
16. Wie formulieren Sie die Knotengleichungen und die Schnittgleichungen mit Hilfe der Graphentheorie? Wie sind die dabei verwendeten Matrizen erklärt?
17. Wie viele unabhängige Schnittgleichungen gibt es für eine zusammenhängende Schaltung? Lässt sich für die Schnittgleichungen eine formale Lösung angeben?
18. Wie formulieren Sie die Maschengleichungen und welche Matrizen brauchen Sie dazu?
19. Wie viele unabhängige Maschengleichungen lassen sich für eine zusammenhängende Schaltung aufstellen? Gibt es auch für die Maschengleichungen eine formale Lösung?
20. Warum reichen die Schnittgleichungen und die Maschengleichungen zur Bestimmung aller Zweigströme und Zweigspannungen einer Schaltung i.a. nicht aus? Wodurch wird die fehlende Information geliefert?
21. Anstelle der Zweigspannungen werden häufig die Knotenpotentiale verwendet. Wie sind diese definiert? Wie hängen sie formal mit den Zweigspannungen zusammen?
22. Wie lautet der Satz von Tellegen in Worten und als Formel?
23. Mit welchen Eigenschaften einer Schaltung lässt sich der Satz von Tellegen begründen? Welche speziellen Annahmen sind dazu erforderlich?
24. Warum gilt der Satz von Tellegen beispielsweise für die komplexen Effektivwerte von Zweigströmen und Zweigspannungen, nicht aber für deren Beträge?
25. Auf welche Aussage reduziert sich der Satz von Tellegen, wenn die darin vorkommenden Größen die Augenblickswerte der Zweigspannungen und Zweigströme bedeuten?

T.7 Aufgaben

AT.1 Orientierter Graph einer Schaltung: Die Schaltung in Abb.AT.1a soll mit Hilfe der Graphentheorie analysiert werden.

- (i) Zeichnen Sie dafür einen orientierten Graphen.
- (ii) Geben Sie die zugehörige Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix in der vollständigen und in einer reduzierten Form an.
- (iii) Wählen Sie mindestens drei unterschiedliche Bäume und zeigen Sie für jeden der Fälle die Festlegung der Schnittmengenbasis. Wie sehen die zugehörigen Schnittmatrizen aus?

- (iv) Zeigen Sie für jeden der unter (iii) gewählten Bäume die Festlegung der Schleifenbasis. Wie sehen die zugehörigen Maschenmatrizen aus?

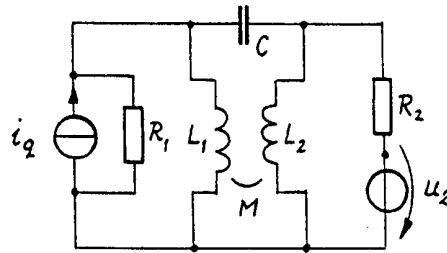


Abb.AT.1a

AT.2 Eigenschaften der Maschen- und Schnittmatrizen: Prüfen Sie direkt für die in AT.1 gefundenen Maschen- und Schnittmatrizen die Beziehungen

$$\underline{M}_B = -\underline{S}_V^T, \quad \underline{M}_B \underline{S}_V^T = \underline{0}.$$

AT.3 Planarer Graph: Abb.AT.3a zeigt einen planaren Graphen.

- (i) Konstruieren Sie die vollständige Inzidenzmatrix.
- (ii) Geben Sie die reduzierte Inzidenzmatrix mit Knoten ④ als Referenzknoten an.
- (iii) Die dick ausgezogenen Zweige in Abb.AT.3a sind Baumzweige. Schreiben Sie die Maschenmatrix an.
- (iv) Wie sieht die zugehörige Schnittmatrix aus?

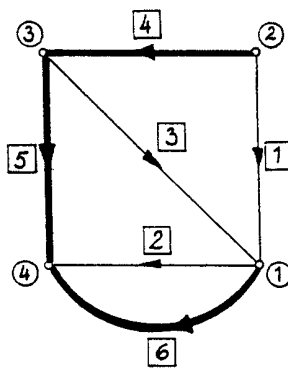


Abb.AT.3a

AT.4 Nicht planarer Graph: Bestimmen Sie für den nicht planaren Graphen aus Abb.AT.4a

- (i) zuerst die vollständige Inzidenzmatrix. Legen Sie dann einen Baum fest und ermitteln Sie
- (ii) die Schleifenbasis und die Maschenmatrix,
- (iii) die Schnittmengenbasis und die Schnittmatrix.

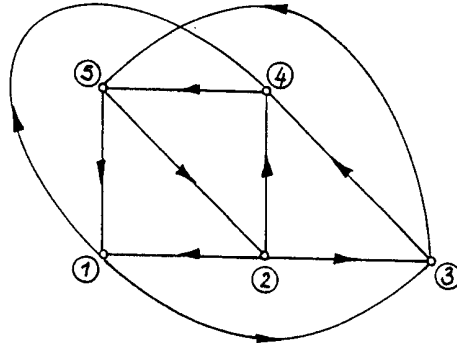


Abb.AT.4a

AT.5 Baumsuche: In der reduzierten Inzidenzmatrix eines zusammenhängenden, orientierten Graphen mit k Knoten gehört jede reguläre $(k-1) \times (k-1)$ -Teilmatrix zu einem Baum. Diese Eigenschaft lässt sich zur systematischen Baumsuche verwenden. Zeichnen Sie den Graphen und alle möglichen Bäume zur reduzierten Inzidenzmatrix

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{T.31})$$

AT.6 Rekonstruktion eines Graphen: Von einem zusammenhängenden Graphen ist die Maschenmatrix

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{T.32})$$

bekannt.

- (i) Wie sieht die zugehörige Schnittmatrix aus?
- (ii) Zeichnen Sie den orientierten Graphen.

AT.7 Zweigspannungen und Zweigströme: In Abb.AT.7a ist eine Schaltung, in Abb.AT.7b der zugehörige Graph dargestellt. Ein Baum (dick ausgezogen) ist bereits festgelegt.

- (i) Geben Sie die Schnittmatrix \underline{S} und die Maschenmatrix \underline{M} an.
- (ii) Zeigen Sie direkt, dass die Zweigspannungen \underline{u} mit den Baumzweigspannungen \underline{u}_B über $\underline{u} = \underline{S}^T \underline{u}_B$ verknüpft sind.
- (iii) Zeigen Sie direkt und interpretieren Sie die Gleichung $\underline{S} \underline{i} = \underline{0}$.

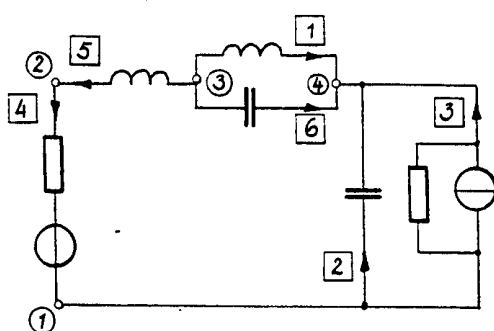


Abb.AT.7a

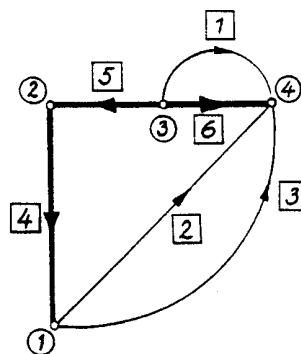


Abb.AT.7b

AT.8 Satz von Tellegen: Wählen Sie für die Schaltung in Abb.AT.8 irgendwelche konkreten, nicht trivialen Werte für die Spannungen und Ströme, die den Kirchhoff-Gleichungen genügen. Zeigen Sie, dass damit der Satz von Tellegen erfüllt ist.

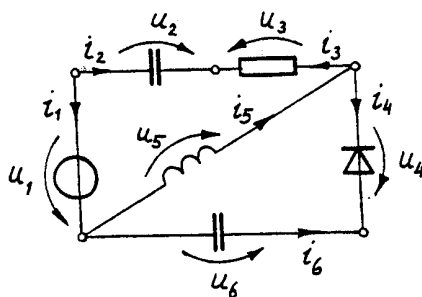


Abb.AT.8

AT.9 Erweiterter Tellegen-Satz: Angenommen, die Topologie zweier unterschiedlicher Schaltungen S und S' wird durch den gleichen Graphen aus Abb.AT.9 beschrieben.

- (i) In S ist der Zweig $\boxed{4}$ eine Gleichspannungsquelle mit 10V, alle anderen Zweige sind 1Ω - Widerstände. Berechnen Sie die Zweigströme \underline{i} und die Zweigspannungen \underline{u} .

- (ii) In S' ist der Zweig $\boxed{4}$ eine Sinusspannungsquelle mit dem Effektivwert 15V, die anderen Zweige stellen die Impedanzen

$$\begin{aligned} Z_5 &= (1 + j2)\Omega, & Z_6 &= (2 - j3)\Omega, \\ Z_1 &= 4\Omega, & Z_2 &= Z_6, & Z_3 &= Z_5 \end{aligned}$$

dar. Berechnen Sie auch dafür die Zweigströme \tilde{i}' und die Zweigspannungen \tilde{u}' .

- (iii) Überprüfen Sie direkt die Gültigkeit des Satzes von Tellegen in der Form

$$\tilde{u}^T \tilde{i}' = \tilde{u}'^T \tilde{i}.$$

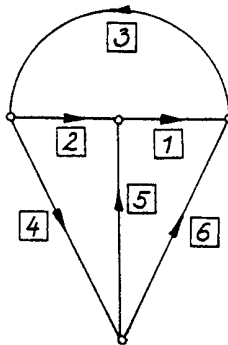


Abb.AT.9

AT.10 Energiesatz für eine RLC -Schaltung: Eine lineare Wechselstromschaltung besteht aus einem Tor (Abb.AT.10a, komplexe Effektivwerte $\underline{U}_E, \underline{I}_E$), aus n_R Widerständen, n_L ungekoppelten Spulen und n_C Kondensatoren. Leiten Sie aus dem Satz von Tellegen einen „Energiesatz“ in der Form

$$\underline{U}_E \underline{I}_E^* = P + j\omega 2 (\overline{W}_m - \overline{W}_e)$$

ab, wobei links die zugeführte komplexe Scheinleistung steht und P den Mittelwert der in den Widerständen insgesamt verbrauchten Leistung (Wirkleistung) bedeutet. \overline{W}_m und \overline{W}_e geben die zeitlichen Mittelwerte der insgesamt in den Spulen bzw. in den Kondensatoren gespeicherten Energie an.

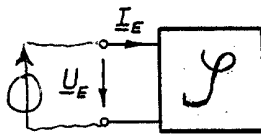


Abb.AT.10a

Kapitel A

Analyseverfahren für lineare Schaltungen

Für die vollständige Analyse einer Schaltung muss neben der Schaltungstopologie auch bekannt sein, wie die Zweigströme mit den Zweigspannungen zusammenhängen. Erst hier kommen die Natur der Stromkreiselemente, die gegenseitigen Kopplungen der Zweige, die Arten und Steuerungen der Quellen und ähnliches ins Spiel. Die Formulierung erfolgt über die Zweiggleichungen und -daraus abgeleitet - bei linearen Schaltungen über Quellen- und Immittanzmatrizen.

A.1 Zweiggleichungen

Das grundsätzliche Vorgehen soll anhand eines einfachen Beispiels erläutert werden. Wir nehmen dazu die Schaltung aus Abb.A.1. Bei der Auswahl der Zweige ist übrigens darauf zu achten, dass jeder Zweig mit idealer Spannungsquelle noch

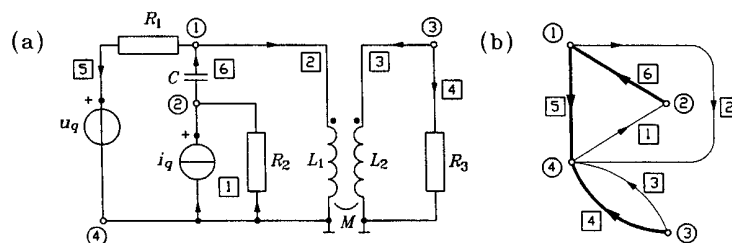


Abb.A.1 Lineare Schaltung (a) und zugehöriger orientierter Graph (b) mit $k = 4$ Knoten und $z = 6$ Zweigen. Die Knotennummern sind in Kreise, die Zweignummern in Quadrate gesetzt. Der Zweig 1 besteht aus der Parallelschaltung der idealen Stromquelle und des Widerstands R_2 . Die Zweige 2 und 3 sind induktiv gekoppelt. Die Masseverbindung bildet den Knoten 4.

ein weiteres Element wie Widerstand, Spule oder Kondensator in Reihe und jeder Zweig mit idealer Stromquelle noch ein weiteres solches Element parallel dazu enthält, was bei Berücksichtigung der Innenwiderstände realer Quellen ohnehin der Fall ist. Ich komme darauf zurück.

Mit den angegebenen Zweigorientierungen als gemeinsamen Bezugssinn für die Zweigspannungen und die Zweigströme (Verbraucherbezugssystem) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \text{Zweig 1: } i_1 &= i_q + \frac{u_1}{R_2}, & \text{Zweig 4: } u_4 &= R_3 i_4, \\
 \text{Zweig 2: } u_2 &= L_1 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_3}{dt}, & \text{Zweig 5: } u_5 &= u_q + R_1 i_5, \\
 \text{Zweig 3: } u_3 &= L_2 \frac{di_3}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, & \text{Zweig 6: } i_6 &= C \frac{du_6}{dt}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Wie Sie sehen, handelt es sich bei den Zweiggleichungen i.a. um Differentialgleichungen. Ist die Schaltung jedoch wie im vorliegenden Fall linear, so können wir mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung sofort zu algebraischen Gleichungen übergehen.

Angenommen, die beiden Quellen in unserer Schaltung liefern Sinusströme und Sinusspannungen einer einheitlichen Kreisfrequenz ω . Unter Verwendung zugehöriger Großbuchstaben für die komplexen Effektivwerte folgt dann im eingeschwungenen Zustand

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_1 &= R_2 \underline{I}_1 - R_2 \underline{I}_q, & \underline{U}_4 &= R_3 \underline{I}_4, \\
 \underline{U}_2 &= j\omega L_1 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_3, & \underline{U}_5 &= R_1 \underline{I}_5 + \underline{U}_q, \\
 \underline{U}_3 &= j\omega L_2 \underline{I}_3 + j\omega M \underline{I}_2, & \underline{U}_6 &= \underline{I}_6 / (j\omega C).
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Sie können diese Gleichungen nach den Regeln der komplexen Wechselstromrechnung natürlich sofort aus der Schaltung Abb. A.1 ablesen.

Für die systematische Verarbeitung insbesondere einer größeren Anzahl von Zweiggleichungen bietet sich außerdem die Matrixschreibweise an. Wir definieren dazu die $z \times 1$ -Matrizen der Zweigspannungen, Zweigströme, Quellenspannungen und Quellenströme, in unserem Beispiel

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{U}} &= [\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3, \underline{U}_4, \underline{U}_5, \underline{U}_6]^T, & \underline{\underline{U}}_q &= [0, 0, 0, 0, \underline{U}_q, 0]^T, \\
 \underline{\underline{I}} &= [\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3, \underline{I}_4, \underline{I}_5, \underline{I}_6]^T, & \underline{\underline{I}}_q &= [\underline{I}_q, 0, 0, 0, 0, 0]^T,
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

und dazu die $z \times z$ -**Zweigimpedanzmatrix**

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_{66} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= R_2, & \underline{Z}_{22} &= j\omega L_1, \\ \underline{Z}_{23} &= \underline{Z}_{32} = j\omega M, & & \\ \underline{Z}_{33} &= j\omega L_2, & \underline{Z}_{44} &= R_3, \\ \underline{Z}_{55} &= R_1, & \underline{Z}_{66} &= 1/(j\omega C), \end{aligned} \tag{A.4}$$

oder ihre Inverse, die $z \times z$ - **Zweigadmittanzmatrix**

$$\tilde{Y} = \tilde{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{22} & Y_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{32} & Y_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{66} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} Y_{11} &= \frac{1}{R_2}, & Y_{22} &= \frac{L_2}{j\omega(L_1L_2 - M^2)}, \\ Y_{23} &= Y_{32} & &= -\frac{M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)}, \\ Y_{33} &= \frac{L_1}{j\omega(L_1L_2 - M^2)}, & Y_{44} &= \frac{1}{R_3}, \\ Y_{55} &= \frac{1}{R_1}, & Y_{66} &= j\omega C. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Sind die Zweige in einer Schaltung nicht gekoppelt, so ist in der Zweigimpedanzmatrix bzw. in der Zweigadmittanzmatrix nur die Hauptdiagonale besetzt. Gibt es dagegen Kopplungen zwischen den einzelnen Zweigen - z.B. induktiv oder über gesteuerte Quellen - so treten in diesen Matrizen Elemente ungleich Null auch außerhalb der Hauptdiagonalen auf. Wenn in einem Zweig nur eine ideale Spannungs- oder Stromquelle liegt, dann ist die Zweigimpedanzmatrix bzw. die Zweigadmittanzmatrix singular. Deshalb haben wir diese Fälle ausgeschlossen. Unter Verwendung der so definierten Matrizen nehmen die Zweiggleichungen die kompakte Form

$$\tilde{U} = \tilde{Z}(\tilde{I} - \tilde{I}_q) + \tilde{U}_q \quad \text{oder} \quad \tilde{I} = \tilde{Y}(\tilde{U} - \tilde{U}_q) + \tilde{I}_q \quad (\text{A.6})$$

an. Sie können das an unserem Beispiel leicht nachprüfen.

Das Ziel der Schaltungsanalyse ist die Berechnung der Zweigspannungen und der Zweigströme, eine Aufgabe, die sich für große Schaltungen nur rechnerunterstützt sinnvoll bewältigen lässt. Notwendig dafür ist eine möglichst weitgehende Systematisierung: Erfassung der Schaltungstopologie in Inzidenzmatrizen, Darstellung der Zweiggleichungen in einer maschinell bearbeitbaren Form. Aus der Reihe der verfügbaren Analyseverfahren werden wir in den folgenden

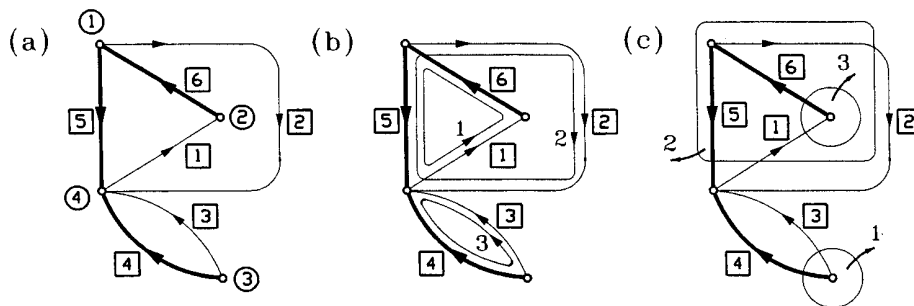


Abb.A.2 Orientierter Graph der Schaltung aus Abb.A.1 mit $k = 4$ Knoten, $z = 6$ Zweigen, $s = k - 1 = 3$ Baumzweigen und Schnitten und $m = z - k + 1 = 3$ Verbindungs Zweigen und Maschen. (a) Nach dem Festlegen eines Baumes (dick ausgezogen) werden die Verbindungs Zweige von 1 bis $m = 3$ und die Baumzweige von $m + 1 = 4$ bis $z = 6$ nummeriert. (b) Jeder Verbindungs Zweig definiert genau eine Masche und legt deren Nummer und Orientierung fest. (c) Jeder Baumzweig definiert genau einen Schnitt und dessen Orientierung. Die Schnittnummer ist gleich der zugehörigen Baumzweignummer minus m .

Abschnitten drei herausgreifen und in ihrer Anwendung auf lineare Schaltungen besprechen, nämlich das Maschenverfahren, das Schnittverfahren und das Knotenspannungsverfahren.

Als Beispiel soll weiterhin die Schaltung aus Abb.A.1 dienen. Abb.A.2 zeigt nochmals den zugehörigen orientierten Graphen mit dem gewählten Baum, den Maschen und den Schnitten. Ausgehend davon erhalten wir die vollständige Inzidenzmatrix \underline{A}_v und daraus, wenn der Knoten 4 entsprechend der Masseverbindung als Referenzknoten gewählt wird, nach dem Streichen der vierten Zeile die reduzierte Inzidenzmatrix \underline{A} ,

$$\underline{A}_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Die Maschenmatrix lässt sich aus Abb.A.2b und die Schnittmatrix aus Abb.A.2c ablesen:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Beachten Sie das Auftreten der Formen (T.7) und (T.10).

A.2 Maschenverfahren (Verbindungszweigstromanalyse)

Das Maschenverfahren geht von den Maschengleichungen (T.21), von der Lösung (T.19) der Schnittgleichungen (T.16) und von den Zweigggleichungen in der Form (A.6)₁ aus,

$$\begin{array}{l} \underline{M}\underline{U} = \underline{0}, \\ \underline{I} = \underline{M}^T \underline{I}_V, \\ \underline{U} = \underline{Z}\underline{I} + \underline{U}_q - \underline{Z}\underline{I}_q. \end{array} \quad (\text{A.9})$$

Die Matrizen \underline{M} , \underline{Z} , \underline{U}_q und \underline{I}_q werden als bekannt vorausgesetzt, die $m \times 1$ -Matrix \underline{I}_V der Verbindungszweigströme ist zu berechnen. Wir multiplizieren die Zweigggleichungen (A.9)₃ von links mit der Maschenmatrix, erhalten dann wegen Gl.(A.9)₁ auf der linken Seite die Nullmatrix und drücken im ersten Term auf der rechten Seite mit Gl.(A.9)₂ die Zweigströme durch die Verbindungszweigströme aus,

$$\begin{array}{l} \underline{M}\underline{U} = \underline{M}\underline{Z}\underline{I} - \underline{M}(\underline{Z}\underline{I}_q - \underline{U}_q), \\ \underline{0} = \underline{M}\underline{Z}\underline{M}^T \underline{I}_V - \underline{M}(\underline{Z}\underline{I}_q - \underline{U}_q). \end{array}$$

Eine Zusammenfassung zur **Maschenimpedanzmatrix**

$$\underline{\underline{Z}}_V = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{Z}} \underline{\underline{M}}^T \quad (\text{A.10})$$

und zur **Maschenquellenmatrix**

$$\underline{\underline{U}}_{qV} = \underline{\underline{M}} \left(\underline{\underline{Z}} \underline{\underline{I}}_q - \underline{\underline{U}}_q \right) \quad (\text{A.11})$$

führt schließlich auf das lineare Gleichungssystem

$$\underline{\underline{Z}}_V \underline{\underline{I}}_V = \underline{\underline{U}}_{qV} \quad (\text{A.12})$$

dessen Auflösung die gesuchten Verbindungszweigströme liefert. Die restlichen Zweigströme und alle Zweigspannungen folgen dann aus den Gln.(A.9)₂ und (A.9)₃.

In unserem Beispiel ergeben sich die Maschenimpedanzmatrix (A.10) aus der Maschenmatrix (A.8)₁ und der Impedanzmatrix (A.4) und die Maschenquellenmatrix (A.11) für die Quellenmatrizen in der Form (A.3) zu

$$\underline{\underline{Z}}_V = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{55} + \underline{Z}_{66}, & -\underline{Z}_{55}, & 0 \\ -\underline{Z}_{55}, & \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{55}, & \underline{Z}_{23} \\ 0, & \underline{Z}_{32}, & \underline{Z}_{33} + \underline{Z}_{44} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{U}}_{qV} = [\underline{Z}_{11} \underline{I}_q - \underline{U}_q, \underline{U}_q, 0]^T.$$

Das Gleichungssystem (A.12) ist damit

$$\begin{aligned} (\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{55} + \underline{Z}_{66}) \underline{I}_1 - \underline{Z}_{55} \underline{I}_2 &= \underline{Z}_{11} \underline{I}_q - \underline{U}_q, \\ -\underline{Z}_{55} \underline{I}_1 + (\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{55}) \underline{I}_2 + \underline{Z}_{23} \underline{I}_3 &= \underline{U}_q, \\ \underline{Z}_{32} \underline{I}_2 + (\underline{Z}_{33} + \underline{Z}_{44}) \underline{I}_3 &= 0. \end{aligned}$$

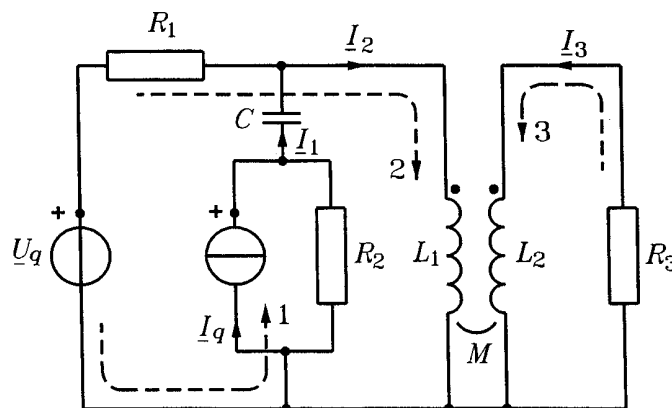


Abb.A.3 Schaltung aus Abb.A.1. Das Maschenverfahren liefert die drei linear unabhängigen Gleichungen (A.13) für die drei Verbindungszweigströme.

Um zu sehen, was es bedeutet, setzen wir die Impedanzen aus (A.4) ein und ordnen die Terme etwas anders an:

$$\begin{aligned} R_1(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) + \underline{U}_q + R_2(\underline{I}_1 - \underline{I}_q) + \underline{I}_1/(j\omega C) &= 0, \\ -R_1(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) + j\omega L_1 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_3 - \underline{U}_q &= 0, \\ j\omega M \underline{I}_2 + (R_3 + j\omega L_2) \underline{I}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Es werden also genau die Maschengleichungen unserer in Abb.A.2b festgelegten Elementarschleifen wiedergegeben (Abb.A.3).

A.3 Schnittverfahren (Baumzweigspannungsanalyse)

Ausgehend von den Schnittgleichungen (T.16), von der Lösung (T.24) der Maschengleichungen (T.21) und von den Zweigggleichungen in der Form (A.6)₂,

$$\begin{aligned} \underline{S} \underline{I} &= \underline{0}, \\ \underline{U} &= \underline{S}^T \underline{U}_B, \\ \underline{I} &= \underline{Y} \underline{U} + \underline{I}_q - \underline{Y} \underline{U}_q, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

wird aus den als bekannt vorausgesetzten Matrizen \underline{S} , \underline{Y} , \underline{I}_q und \underline{U}_q die Matrix \underline{U}_B der s linear unabhängigen Baumzweigspannungen ermittelt. Wir multiplizieren dazu die Zweigggleichungen (A.14)₃ von links mit der Schnittmatrix, erhalten wegen Gl.(A.14)₁ auf der linken Seite wieder die Nullmatrix und drücken im ersten Term auf der rechten Seite die Zweigspannungen über Gl.(A.14)₂ durch die Baumzweigspannungen aus,

$$\begin{aligned} \underline{S} \underline{I} &= \underline{S} \underline{Y} \underline{U} - \underline{S} (\underline{Y} \underline{U}_q - \underline{I}_q), \\ \underline{0} &= \underline{S} \underline{Y} \underline{S}^T \underline{U}_B - \underline{S} (\underline{Y} \underline{U}_q - \underline{I}_q). \end{aligned}$$

Wir definieren die **Schnittadmittanzmatrix**

$$\underline{Y}_B = \underline{S} \underline{Y} \underline{S}^T, \quad (\text{A.15})$$

und die **Schnittquellenmatrix**

$$\underline{I}_{qB} = \underline{S} (\underline{Y} \underline{U}_q - \underline{I}_q), \quad (\text{A.16})$$

und schreiben das resultierende lineare Gleichungssystem in der Form

$$\underline{Y}_B \underline{U}_B = \underline{I}_{qB}. \quad (\text{A.17})$$

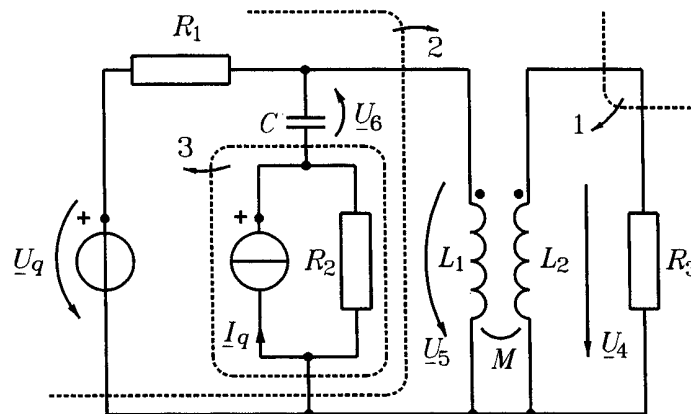


Abb.A.4 Schaltung aus Abb.A.1. Das Schnittverfahren liefert die drei linear unabhängigen Schnittgleichungen (A.18) für die drei Baumzweigspannungen.

Seine Auflösung liefert die gesuchten Baumzweigspannungen. Die restlichen Zweigspannungen und alle Zweigströme lassen sich anschließend direkt aus den Gln.(A.14)₂ bzw. (A.14)₃ berechnen.

Die Schnittadmittanzmatrix und die Schnittquellenmatrix ergeben sich in unserem Beispiel über die Darstellungen (A.8)₂ und (A.5) im Fall der Quellenmatrizen (A.3) zu

$$\underline{Y}_B = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{33} + \underline{Y}_{44}, & \underline{Y}_{32}, & 0 \\ \underline{Y}_{23}, & \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{55}, & \underline{Y}_{11} \\ 0, & \underline{Y}_{11}, & \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{66} \end{bmatrix},$$

$$\underline{I}_{qB} = [0, \underline{Y}_{55}\underline{U}_q + \underline{I}_q, \underline{I}_q]^T,$$

führen also auf das lineare Gleichungssystem (A.17)

$$\begin{aligned} (\underline{Y}_{33} + \underline{Y}_{44})\underline{U}_4 + \underline{Y}_{32}\underline{U}_5 &= 0, \\ \underline{Y}_{23}\underline{U}_4 + (\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{55})\underline{U}_5 + \underline{Y}_{11}\underline{U}_6 &= \underline{Y}_{55}\underline{U}_q + \underline{I}_q, \\ \underline{Y}_{11}\underline{U}_5 + (\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{66})\underline{U}_6 &= \underline{I}_q, \end{aligned}$$

oder, etwas umgeordnet und die Admittanzen aus (A.5) eingesetzt,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_3}\underline{U}_4 + \frac{L_1\underline{U}_4 - M\underline{U}_5}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} &= 0, \\ \frac{L_2\underline{U}_5 - M\underline{U}_4}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} + \frac{1}{R_2}(\underline{U}_5 + \underline{U}_6) - \underline{I}_q + \frac{1}{R_1}(\underline{U}_5 - \underline{U}_q) &= 0, \\ \frac{1}{R_2}(\underline{U}_5 + \underline{U}_6) - \underline{I}_q + j\omega C\underline{U}_6 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Zusammen mit Abb.A.4 ist ersichtlich, dass dies genau die Schnittgleichungen für die in Abb.A.2c angegebenen Schnitte darstellt.

A.4 Knotenspannungsverfahren

Grundlage für das Knotenspannungsverfahren sind die Knotengleichungen (T.15), die Darstellung (T.26) der Zweigspannungen durch die Knotenspannungen und die Zweiggleichungen in der Form (A.6)₂:

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}}\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{0}}, \\ \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{U}}_K, \\ \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{Y}}\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{I}}_q - \underline{\underline{Y}}\underline{\underline{U}}_q. \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Die Matrizen $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{Y}}$, $\underline{\underline{I}}_q$ und $\underline{\underline{U}}_q$ sind gegeben, die Matrix $\underline{\underline{U}}_K$ der $s = k - 1$ Knotenspannungen (die Spannungen der Knoten gegen den Referenzknoten) ist zu bestimmen. Es wird dazu Gl.(A.19) von links mit $\underline{\underline{A}}$ multipliziert,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}}\underline{\underline{I}} &= \underline{\underline{A}}\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{U}}_q - \underline{\underline{I}}_q), \\ \underline{\underline{0}} &= \underline{\underline{A}}\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{U}}_K - \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{U}}_q - \underline{\underline{I}}_q). \end{aligned}$$

Daraus folgt nach Definition der **Knotenadmittanzmatrix**

$$\underline{\underline{Y}}_K = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{A}}^T \quad (\text{A.20})$$

und der **Knotenquellenmatrix**

$$\underline{\underline{I}}_{qK} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{U}}_q - \underline{\underline{I}}_q) \quad (\text{A.21})$$

das lineare Gleichungssystem

$$\underline{\underline{Y}}_K \underline{\underline{U}}_K = \underline{\underline{I}}_{qK} \quad (\text{A.22})$$

zur Berechnung der gesuchten Knotenspannungen. Die Zweigspannungen und die Zweigströme sind dann über die Gln.(A.19)₂ und (A.19)₃ direkt anzugeben.

Mit den Matrizen (A.7)₂ und (A.5) sowie den Quellenmatrizen aus (A.3) erhalten wir beispielsweise für unsere Schaltung

$$\underline{\underline{Y}}_K = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{55} + \underline{Y}_{66}, & -\underline{Y}_{66}, & \underline{Y}_{23} \\ -\underline{Y}_{66}, & \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{66}, & 0 \\ \underline{Y}_{32}, & 0, & \underline{Y}_{33} + \underline{Y}_{44} \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{I}}_{qK} = [\underline{Y}_{55}\underline{U}_q, \underline{I}_q, 0]^T.$$

Wir haben dann als System (A.22) die Gleichungen

$$\begin{aligned} (\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{55} + \underline{Y}_{66})\underline{V}_1 - \underline{Y}_{66}\underline{V}_2 + \underline{Y}_{23}\underline{V}_3 &= \underline{Y}_{55}\underline{U}_q, \\ -\underline{Y}_{66}\underline{V}_1 + (\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{66})\underline{V}_2 &= \underline{I}_q, \\ \underline{Y}_{32}\underline{V}_1 + (\underline{Y}_{33} + \underline{Y}_{44})\underline{V}_3 &= 0 \end{aligned}$$

($\underline{V}_i, i = 1, 2, 3$, ist der komplexe Effektivwert der Spannung des Knotens i gegen den Referenzknoten 4), oder, die Admittanzen aus (A.5) eingesetzt und die Terme umgeordnet,

$$\frac{1}{R_1}(\underline{V}_1 - \underline{U}_q) + j\omega C(\underline{V}_1 - \underline{V}_2) + \frac{L_2 \underline{V}_1 - M \underline{V}_3}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} = 0,$$

$$j\omega C(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + \frac{1}{R_2} \underline{V}_2 - \underline{I}_q = 0,$$

$$\frac{L_1 \underline{V}_3 - M \underline{V}_1}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)} + \frac{1}{R_3} \underline{V}_3 = 0.$$

Dies sind, wie ein Blick auf Abb.A.1a bestätigt, genau die Knotengleichungen für die Knoten 1, 2 und 3.

A.5 Fragen

1. Was bedeutet der Begriff „Immittanz“?
2. Welche Sachverhalte werden in den Zweiggleichungen erfasst?
3. Warum sind die Zweiggleichungen im Zeitbereich in der Regel Differentialgleichungen?
4. Unter welchen Voraussetzungen können wir das System der Zweiggleichungen als algebraisches Gleichungssystem darstellen? Spielt dabei die Linearität der Stromkreiselemente eine Rolle? Warum?
5. Sind in den Quellenmatrizen alle Strom- und Spannungsquellen vertreten?
6. Welche Bedeutung haben die in der Hauptdiagonalen der Zweigimpedanzmatrix stehenden Elemente? Wann treten auch Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen auf und was bedeuten diese?
7. Wie sehen die Zweiggleichungen in der Impedanzform, wie in der Admittanzform aus? Welche Annahme über die Bezugssinne wurde dabei getroffen?
8. Worin besteht die allgemeine Aufgabe der Schaltungsanalyse?
9. Mit welchen Matrizen wird die Topologie einer Schaltung erfasst? Wie viele unabhängige Gleichungen für die unbekanntenen Zweigströme und Zweigspannungen sind allein aus der Schaltungstopologie zu gewinnen?
10. Wodurch werden die restlichen Gleichungen geliefert? Wie viele Gleichungen brauchen Sie insgesamt?
11. Von welchen Gleichungen haben Sie beim Maschenverfahren auszugehen?
12. Wie sind die Maschenimpedanzmatrix und die Maschenquellenmatrix definiert?
13. Unter welcher Bedingung ist das resultierende lineare Gleichungssystem beim Maschenverfahren eindeutig lösbar? Wie erreichen Sie, dass diese Voraussetzung sicher zutrifft?
14. Wie viele und welche Unbekannten werden beim Schnittverfahren direkt berechnet?
15. Aus welchen Gleichungen gewinnen Sie beim Schnittverfahren die restlichen Zweigspannungen und die Zweigströme?
16. Wie stellen Sie die Schnittadmittanzmatrix, wie die Schnittquellenmatrix auf?
17. Wie sind die Knotenspannungen definiert und wie viele davon gibt es in einer zusammenhängenden Schaltung?
18. Welche Gleichungen liegen dem Knotenspannungsverfahren zugrunde?

19. Wie erreichen Sie, dass die Knotenadmittanzmatrix sicher regulär ist? Ist das wichtig? Warum?
20. Welche Vorteile bietet unter Umständen das Knotenspannungsverfahren gegenüber dem Maschenverfahren oder dem Schnittverfahren?

A.6 Aufgaben

AA.1 Zweigimpedanzmatrix: Bestimmen Sie für die Schaltung aus Abb.AA.1 die Zweigimpedanzmatrix.

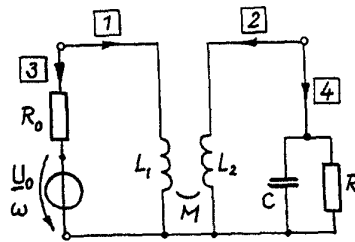


Abb.AA.1

AA.2 Zweigadmittanzmatrix: Die Schaltung aus Abb.AA.2 dient als vereinfachtes Hybridmodell einer Darlington-Schaltung (zwei spannungsgesteuerte Stromquellen). Bestimmen Sie die Zweigadmittanzmatrix.

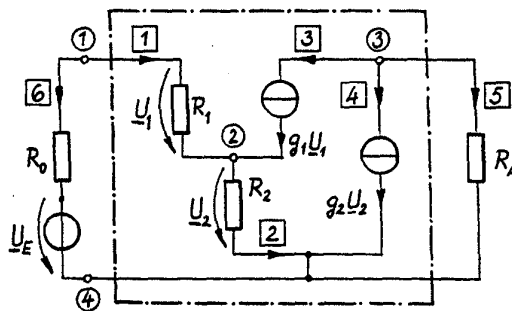


Abb.AA.2

AA.3 Quellenmatrizen: Die Wechselstromschaltung aus Abb.AA.3 enthält im Zweig 3 eine von der Kondensatorspannung linear gesteuerte Spannungsquelle. Bestimmen Sie

- (i) die Quellenmatrizen,
- (ii) die Zweigimpedanzmatrix.

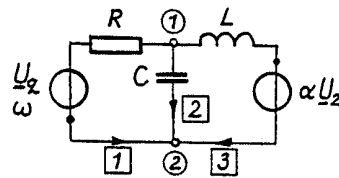


Abb.AA.3

AA.4 Zweiggleichungen: Stellen Sie für die in Abb.AA.4 angegebene Wechselstrom-Ersatzschaltung jene Matrizen auf, die in den Zweiggleichungen

$$\underline{U} = \underline{Z}(\underline{I} - \underline{I}_q) + \underline{U}_q$$

benötigt werden.

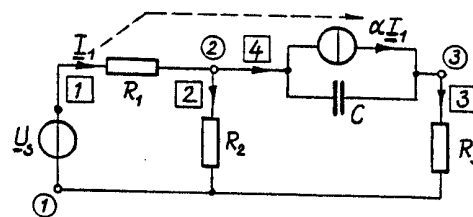


Abb.AA.4

AA.5 Knotenspannungsverfahren: Die Gleichstromschaltung aus Abb.AA.5a soll beispielhaft mit Hilfe des Knotenspannungsverfahrens analysiert werden.

- (i) Legen Sie „zulässige“ Zweige fest und zeichnen Sie dafür einen orientierten Graphen.
- (ii) Geben Sie die vollständige Inzidenzmatrix und, nach Wahl eines Referenzknotens, die reduzierte Inzidenzmatrix an.
- (iii) Stellen Sie die Zweigadmittanzmatrix und die Quellenmatrizen auf.
- (iv) Berechnen Sie die Knotenadmittanzmatrix und die Knotenquellenmatrix und bestimmen Sie daraus die Knotenspannungen.
- (v) Berechnen Sie schließlich alle Zweigspannungen und alle Zweigströme nach dem Knotenspannungsverfahren.
- (vi) Überprüfen Sie das Ergebnis - als notwendige Bedingung - mit dem Satz von Tellegen.

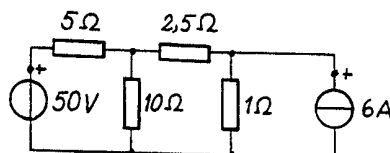


Abb.AA.5a

AA.6 Maschenverfahren: Berechnen Sie alle Zweigspannungen und alle Zweigströme für die Wechselstromschaltung aus Abb.AA.6a mit dem orientierten Graphen aus Abb.AA.6b nach dem Maschenverfahren.

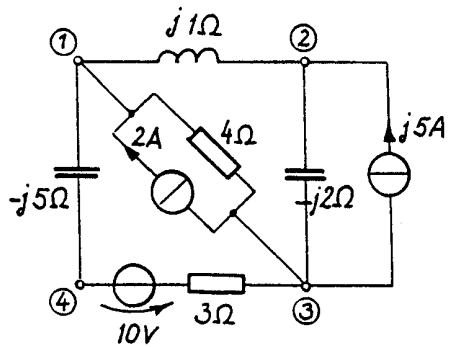


Abb.AA.6a

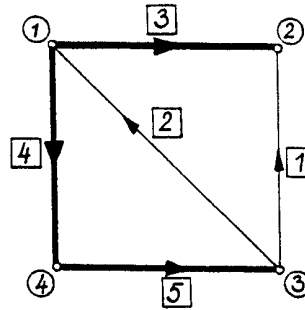


Abb.AA.6b

AA.AA.7 Schnittverfahren: Lösen Sie die Aufgabe AA.6 nach dem Schnittverfahren.

Lösungen der Aufgaben

AT.1 Orientierter Graph einer Schaltung:

- (i) Werden die Innenwiderstände der (realen) Quellen mit den (idealen) Quellen selbst zu jeweils einem Zweig zusammengefasst, entsteht mit den Nummerierungen der Knoten und Zweige und den gewählten Bezugssinnen aus Abb.AT.1b der orientierte Graph aus Abb.AT.1c

- (ii) Gemäß den Definitionen erhalten wir die vollständige Inzidenzmatrix \tilde{A}_v und, z.B. mit ① als Referenzknoten, eine reduzierte Inzidenzmatrix \tilde{A} ,

$$\tilde{A}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (iii) Die Abbildungen AT.1 d,e,f zeigen drei mögliche Bäume und die jeweilige Festlegung der Schnittmengenbasis ($s = k - 1 = 2$ Schnitte). Die Zweignummerierungen sind dabei nach den üblichen Konventionen angepasst. Die zugehörigen Schnittmatrizen ergeben sich zu

$$(d) \tilde{S} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(e) \tilde{S} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(f) \tilde{S} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (iv) Die Festlegung der Schleifenbasis zu den gewählten Bäumen ist in den Abbildungen AT.1 g,h,i gezeigt ($m = z - s = 3$ Maschen). Die Zweignummerierungen sind die der Abbildungen AT.1 d,e,f. Die zugehörigen Maschenmatrizen ergeben sich zu

$$(g) \tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(h) \tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$(i) \tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

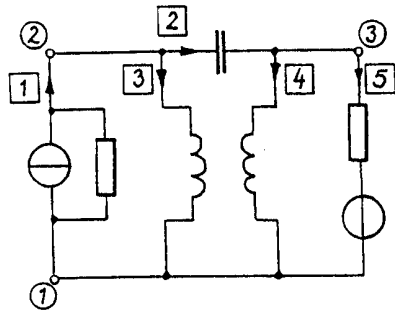


Abb.AT.1b

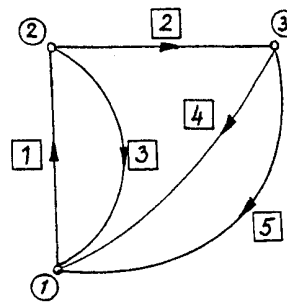


Abb.AT.1c

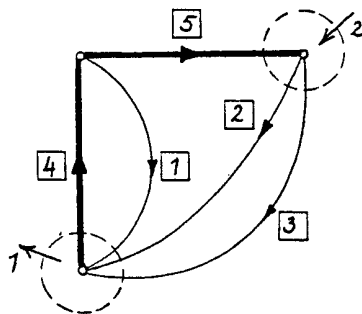


Abb.AT.1d

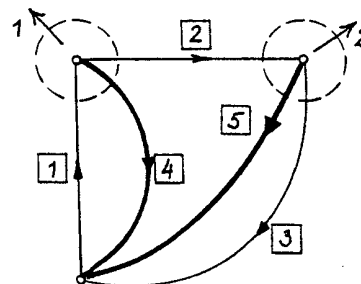


Abb.AT.1e

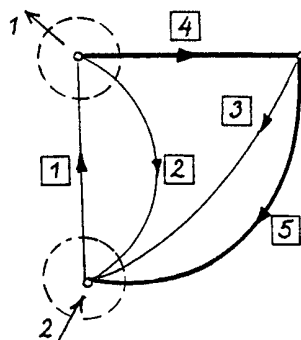


Abb.AT.1f

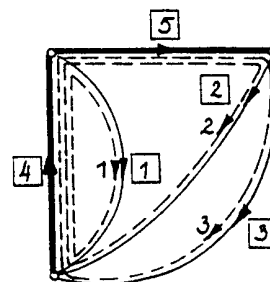


Abb.AT.1g

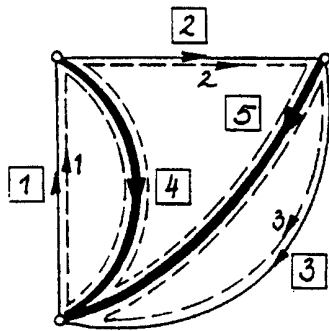


Abb.AT.1h

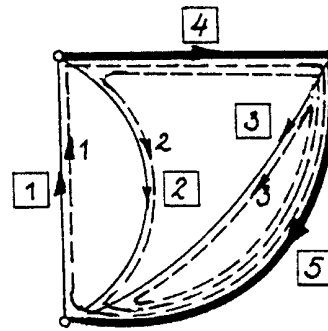


Abb.AT.1i

AT.2 Eigenschaften der Maschen- und Schnittmatrizen:

$$(d,g) \quad \underline{\underline{S}}_V = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{S}}_V^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -\underline{\underline{M}}_B,$$

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{S}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(e,h) \quad \underline{\underline{S}}_V = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{S}}_V^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\underline{\underline{M}}_B,$$

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{S}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(f,i) \quad \underline{\underline{S}}_V = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{S}}_V^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\underline{\underline{M}}_B,$$

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{S}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

AT.3 Planarer Graph:

Der Graph hat $k = 4$ Knoten, $z = 6$ Zweige und ist zusammenhängend. Demnach sind ihm $s = k - 1 = 3$ Schnitte und $m = z - s = 3$ Maschen zugeordnet.

- (i) Nach Definition der vollständigen Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix erhalten wir

$$\tilde{A}_v = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- (ii) Die reduzierte Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix folgt daraus durch Streichen der vierten Zeile, die dem Referenzknoten $\textcircled{4}$ zugeordnet ist,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (iii) Mit dem festgelegten Baum und der bereits passenden Zweignummerierung ist die Schleifenbasis nach Abb.AT.3b zu konstruieren. Die zugehörige Masche-Zweig-Inzidenzmatrix ist

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\tilde{M}_B}$

- (iv) Die Schnittmengenbasis ist nach Abb.AT.3c festgelegt. Daraus oder über

$$\tilde{S} = [-\tilde{M}_B^T, \tilde{E}]$$

folgt die zugehörige Schnitt-Zweig-Inzidenzmatrix

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\tilde{S}_v}$

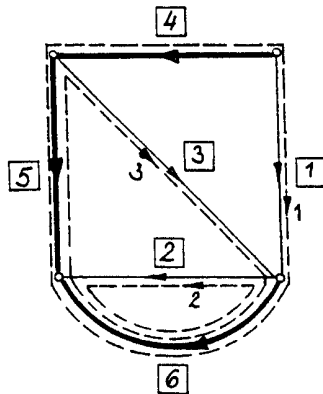


Abb.AT.3b

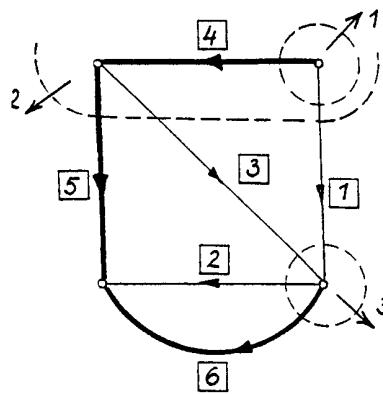


Abb.AT.3c

AT.4 Nichtplanarer Graph:

Der Graph hat $k = 5$ Knoten, $z = 10$ Zweige und ist zusammenhängend. Er besitzt deshalb $s = k - 1 = 4$ Schnitte und $m = z - s = 6$ Maschen.

- (i) Mit den Nummerierungen aus Abb.AT.4b haben wir die vollständige Inzidenzmatrix

$$\tilde{A}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (ii) Zu dem dick ausgezogenen Baum gehören die Schleifenbasis aus Abb.AT.4c und die Maschenmatrix

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\tilde{M}_B}$

- (iii) sowie die Schnittmengenbasis aus Abb.AT.4d und die Schnittmatrix

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\tilde{S}_v}$

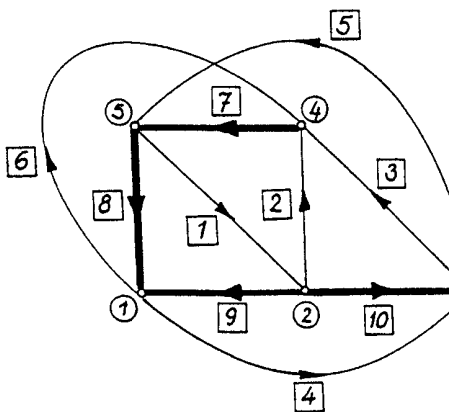


Abb.AT.4b

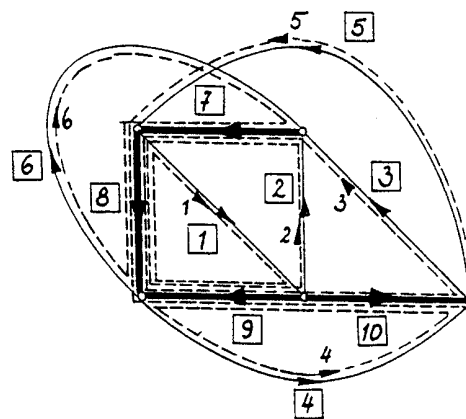


Abb.AT.4c

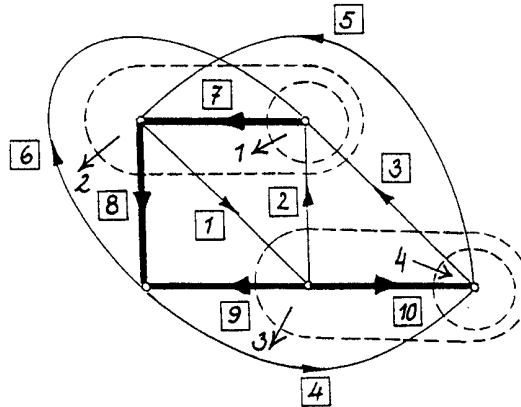


Abb.AT.4d

AT.5 Baumsuche:

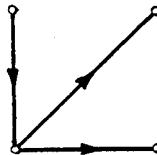
Wir ergänzen zuerst \underline{A} zur vollständigen Inzidenzmatrix \underline{A}_v , wobei ① als Referenzknoten gewählt wird,

$$\underline{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \leftarrow \text{Zweignummer} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Knotennummer} \end{matrix} & \end{matrix}$$

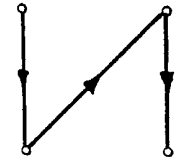
Dann zeichnen wir 4 Knoten in beliebiger Lage und fügen die Zweige gemäß der in \underline{A} erfassten Inzidenzen ein, Abb.AT.5.

Es gibt $s = k - 1 = 3$ Baumzweige. Nach dem angegebenen Verfahren sind alle regulären 3×3 -Teilmatrizen von \underline{A} zu suchen.

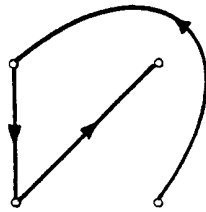
$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$



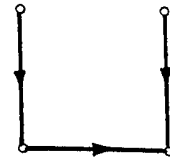
$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$



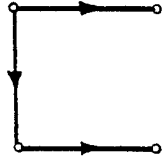
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{array}$$



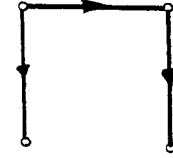
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & \\ \hline 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$



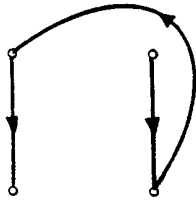
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & \\ \hline 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$



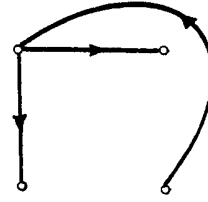
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & \\ \hline 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$



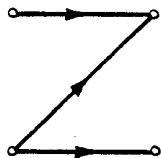
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & \\ \hline 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{array}$$



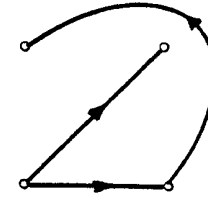
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 6 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}$$



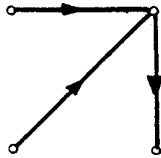
$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & \\ \hline 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$



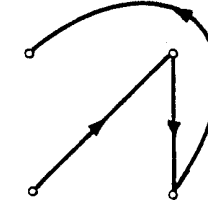
$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 6 & \\ \hline 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}$$



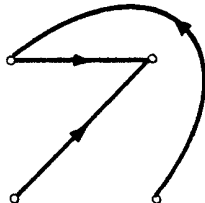
$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & \\ \hline 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$



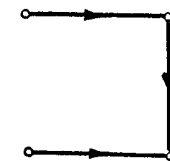
$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & \\ \hline 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}$$



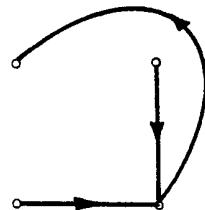
$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 6 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}$$



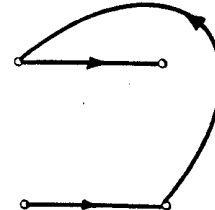
$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & \\ \hline -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 6 & \\ \hline -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & \\ \hline -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}$$



■

AT.6 Rekonstruktion eines Graphen:

Der Graph hat jedenfalls $z = 6$ Zweige, $m = 3$ Maschen, $s = z - m = 3$ Schnitte und $k = n + 1 = 4$ Knoten.

- (i) Im hinteren Teil der gegebenen Maschenmatrix $\tilde{M} = [\tilde{E}, \tilde{M}_B]$ steht die Masche-Baumzweig-Inzidenzmatrix

$$\tilde{M}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt die Schnitt-Verbindungszweig-Inzidenzmatrix

$$\tilde{S}_V = -\tilde{M}_B^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

mit der sich die Schnittmatrix aufbauen lässt,

$$\tilde{S} = [\tilde{S}_V, \tilde{E}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (ii) Zur Rekonstruktion des Graphen können wir beispielsweise die drei Maschen Abb.AT.6a, die direkt aus \tilde{M} ablesbar sind, zusammenfügen, Abb.AT.6b.

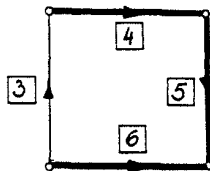
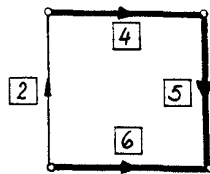
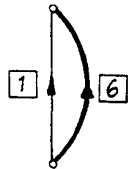


Abb.AT.6a

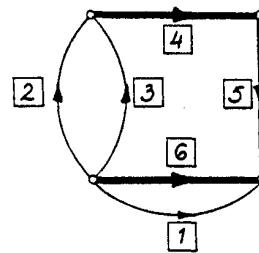


Abb.AT.6b



AT.7 Zweigspannungen und Zweigströme:

Der Graph ist zusammenhängend, besitzt $k = 4$ Knoten, $z = 6$ Zweige und damit $s = k - 1 = 3$ Schritte, $m = z - s = 3$ Maschen.

(i) Für die Schnittmatrix erhalten wir mit Abb.AT.7c

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\tilde{S}_V}$

Daraus folgt die Maschenmatrix

$$\tilde{M} = [\tilde{E}, -\tilde{S}_V^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Die Gleichung

$$\tilde{S}_V^T \tilde{u}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_6 \\ -u_6 & -u_5 & +u_6 \\ -u_4 & -u_5 & +u_6 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \tilde{u}$$

entspricht, abgesehen von drei Identitäten, den drei Beziehungen

$$\begin{aligned} u_1 &= u_6, \\ u_2 &= -u_4 - u_5 - u_6, \\ u_3 &= -u_4 - u_5 - u_6 \end{aligned}$$

die genau drei unabhängige Maschengleichungen bilden und somit erfüllt sind, falls die Kirchhoff-Regeln gelten.

(iii) Die Gleichung

$$\tilde{S} \tilde{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_2 & -i_3 & +i_4 \\ -i_2 & -i_3 & +i_5 \\ i_1 & +i_2 & +i_3 & +i_6 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \tilde{0}$$

ist mit Gültigkeit der (erweiterten) Kirchhoff-Knotenregel erfüllt.

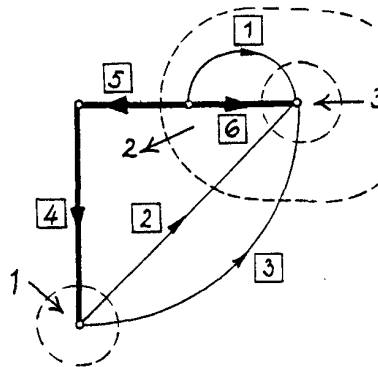


Abb.AT.7c

AT.8 Satz von Tellegen:

Wir wählen beispielsweise

$$u_1 = 1V, \quad u_2 = 2V, \quad u_3 = 3V \Rightarrow u_5 = -2V, \\ u_4 = 4V \Rightarrow u_6 = 2V$$

und

$$i'_1 = 1A \Rightarrow i'_2 = -1A, \quad i'_3 = 1A, \\ i'_6 = 6A \Rightarrow i'_4 = -6A, \quad i'_5 = -5A.$$

Dann gilt

$$\tilde{u}^T \tilde{i}' = \sum_{\zeta=1}^6 u_{\zeta} i'_{\zeta} = [1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-6) + (-2) \cdot (-5) + 2 \cdot 6] \text{ VA} = 0,$$

die Gleichung ist also tatsächlich erfüllt.

AT.9 Erweiterter Tellegen-Satz:

Werden die Zweige $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ und $\boxed{6}$ als Baumzweige gewählt, ergeben sich die

Schnittgleichungen	Maschengleichungen
$i_2 - i_3 + i_4 = 0,$	$u_1 + u_5 - u_6 = 0,$
$-i_1 + i_2 + i_5 = 0,$	$u_2 - u_4 - u_5 = 0,$
$i_1 - i_3 + i_6 = 0,$	$u_3 + u_4 + u_6 = 0.$

(i) Mit $u_4 = 10V$ und $u_{\zeta} = 1\Omega \cdot i_{\zeta}$ für $\zeta = 1, 2, 3, 5, 6$ folgt daraus

$$\tilde{i}^T = [0, \quad 5, \quad -5, \quad -10, \quad -5, \quad -5] \text{ A}, \\ \tilde{u}^T = [0, \quad 5, \quad -5, \quad 10, \quad -5, \quad -5] \text{ V}.$$

- (ii) Ähnlich erhalten wir mit $\underline{U}_4 = 15\text{V}$ (o.B.d.A. reell angenommen) und $\underline{U}_\zeta = \underline{Z}_\zeta \underline{I}_\zeta$ für $\zeta = 1, 2, 3, 5, 6$ nach Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} -0,723 & + & j 2,627 \\ 2,589 & + & j 1,256 \\ -3,312 & + & j 1,371 \\ -5,901 & + & j 0,114 \\ -3,312 & + & j 1,371 \\ -2,589 & - & j 1,256 \end{bmatrix} \text{ A}, \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} -2,893 & + & j 10,508 \\ 8,946 & - & j 5,255 \\ -6,054 & - & j 5,253 \\ 15 & & \\ -6,054 & - & j 5,253 \\ -8,945 & + & j 5,256 \end{bmatrix} \text{ V.}$$

- (ii) Setzen wir nun $\underline{i}' = \underline{I}$, so ergibt sich

$$\underline{u}'^T \underline{i}' = \underline{u}'^T \underline{I} = (0,000 - j0,010)\text{VA} \approx 0$$

und, mit $\underline{u}' = \underline{U}$,

$$\underline{u}'^T \underline{i} = \underline{U}^T \underline{i} = (-0,005 - j0,025)\text{VA} \approx 0$$

Die Ungenauigkeiten (im Prozent-Bereich) sind vermutlich durch Rundungsfehler verursacht. ■

AT.10 Energiesatz für eine *RLC*-Schaltung:

Jedem Stromkreiselement wird ein Zweig zugeordnet, dessen Orientierung den gemeinsamen Bezugssinn für Strom und Spannung angibt (Verbraucherbezugs-system). Linearität der Stromkreiselemente und Sinusschwingungen vorausgesetzt, ist die komplexe Wechselstromrechnung anwendbar. Aus dem Satz von Tellegen, geschrieben in komplexen Effektivwerten ($\underline{u} \rightarrow \underline{U}$, $\underline{i}' \rightarrow \underline{I}^*$),

$$\underline{U}_E \underline{I}_E^* = \sum_{k=1}^{n_R} \underline{U}_{Rk} \underline{I}_{Rk}^* + \sum_{k=1}^{n_L} \underline{U}_{Lk} \underline{I}_{Lk}^* + \sum_{k=1}^{n_C} \underline{U}_{Ck} \underline{I}_{Ck}^*,$$

folgt mit den Elementgleichungen (Abb.AT.10b)

$$\underline{U}_{Rk} \underline{I}_{Rk}^* = R_k I_k^2, \quad \underline{U}_{Lk} \underline{I}_{Lk}^* = j\omega L_k I_k^2, \quad \underline{U}_{Ck} \underline{I}_{Ck}^* = j\omega C_k U_k^2,$$

also

$$\underline{U}_E \underline{I}_E^* = \underbrace{\sum_{k=1}^{n_R} R_k I_k^2}_P + j\omega 2 \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n_L} \frac{1}{2} L_k I_k^2}_{W_m} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n_C} \frac{1}{2} C_k U_k^2}_{W_e} \right).$$

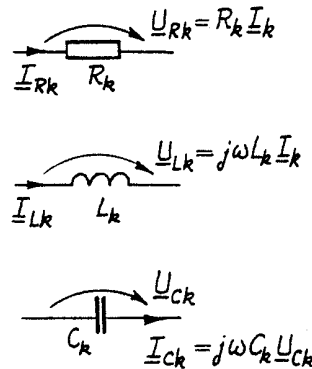


Abb.AT.10b

AA.1 Zweigimpedanzmatrix:

Aus den Zweiggleichungen

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2, \\ \underline{U}_2 &= j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2, \\ \underline{U}_3 &= R_0 \underline{I}_3 + \underline{U}_o, \\ \underline{U}_4 &= \underline{I}_4 R / (1 + j\omega RC) \end{aligned}$$

lässt sich die Zweigimpedanzmatrix sofort ablesen,

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M & 0 & 0 \\ j\omega M & j\omega L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R/(1 + j\omega RC) \end{bmatrix},$$

Sie ist symmetrisch (*RLCM*-Schaltung).

AA.2 Zweigadmittanzmatrix:

Die Zweigströme lassen sich ganz einfach durch die Spannungen ausdrücken, und daraus ist die Zweigadmittanzmatrix sofort ablesbar,

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{U}_1 / R_1, \\ \underline{I}_2 &= \underline{U}_2 / R_2, \\ \underline{I}_3 &= g_1 \underline{U}_1 \\ \underline{I}_4 &= g_2 \underline{U}_2 \\ \underline{I}_5 &= \underline{U}_5 / R_A, \\ \underline{I}_6 &= \underline{U}_6 / R_0 - \underline{U}_E / R_0, \end{aligned} \quad \underline{Y} = \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_0 \end{bmatrix}$$

Die Zweigadmittanzmatrix ist unsymmetrisch (unsymmetrische Zweigkopplungen über die gesteuerten Quellen) und überdies singular (Nullspalten), d.h. die Zweigimpedanzmatrix existiert nicht.

AA.3 Quellenmatrizen:

- (i) Die Quellenmatrizen berücksichtigen nur die unabhängigen, nicht die gesteuerten Quellen (Bezugssinne beachten!).

$$\underline{U}_q = [-\underline{U}_q, 0, 0]^T, \quad \underline{I}_q = [0, 0, 0]^T$$

- (ii) Die Zweigimpedanzmatrix \underline{Z} lässt sich aus den Zweiggleichungen

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \quad \text{für} \quad \underline{U}_q = \underline{0} \quad \text{und} \quad \underline{I}_q = \underline{0}$$

bestimmen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 &= \underline{I}_2 / (j\omega C), \\ \underline{U}_3 &= \alpha \underline{U}_2 + j\omega L \underline{I}_3 = \underline{I}_2 \alpha / (j\omega C) + j\omega L \underline{I}_3 \end{aligned}$$

und daraus die (unsymmetrische) Matrix

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & 1/(j\omega C) & 0 \\ 0 & \alpha/(j\omega C) & j\omega L \end{bmatrix}.$$

AA.4 Zweiggleichungen:

Benötigt werden die Quellenmatrizen $\underline{U}_q, \underline{I}_q$ und die Zweigimpedanzmatrix \underline{Z} . In den Quellenmatrizen sind die unabhängigen Quellen zu berücksichtigen,

$$\underline{U}_q = [-\underline{U}_s, 0, 0]^T, \quad \underline{I}_q = \underline{0}.$$

Die Impedanzmatrix folgt aus $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$ für $\underline{U}_q = \underline{0}$,

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \underline{I}_1, \\ \underline{U}_2 &= R_2 \underline{I}_2, \\ \underline{U}_3 &= R_3 \underline{I}_3, \\ \underline{I}_4 &= \alpha \underline{I}_1 + j\omega C \underline{U}_4 \Rightarrow \\ \underline{U}_4 &= (-\alpha \underline{I}_1 + \underline{I}_4) / (j\omega C), \end{aligned} \quad \underline{Z} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 \\ \alpha/(j\omega C) & 0 & 0 & 1/(j\omega C) \end{bmatrix}$$

AA.5 Knotenspannungsverfahren:

- (i) „Zulässige“ Zweige enthalten zu idealen Spannungsquellen und zu idealen Stromquellen zusätzlich Impedanzen in Reihe bzw. parallel, Abb.5b,c.
- (ii) Mit ③ als Referenzknoten gilt

$$\tilde{A}_v = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}.$$

- (iii) Da keine Zweigkopplungen vorliegen, kann die Zweigadmittanzmatrix sofort angeschrieben werden,

$$\tilde{Y} = \text{diag}[0, 2; 0, 1; 1, 0; 0, 4] \text{ S},$$

ebenso die Quellenmatrizen,

$$\tilde{U}_q = [50\text{V}; 0; 0; 0]^T,$$

$$\tilde{I}_q = [0; 0; 6\text{A}; 0]^T.$$

- (iv) Die Knotenadmittanzmatrix ist gemäß

$$\tilde{Y}_K = \tilde{A}\tilde{Y}\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

zu berechnen,

$$\tilde{Y}_K = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,4 \\ -0,4 & 1,4 \end{bmatrix} \text{ S}.$$

Ähnlich erhalten wir für die Knotenquellenmatrix

$$\tilde{I}_{qK} = \tilde{A}(\tilde{Y}\tilde{U}_q - \tilde{I}_q) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 10\text{A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6\text{A} \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\tilde{I}_{qK} = [10\text{A}; 6\text{A}]^T.$$

Mit $\underline{U}_K = [U_{13}, U_{23}]^T := [V_1, V_2]^T$ ist daher das lineare Gleichungssystem

$$\underline{Y}\underline{U}_K = \underline{I}_q K, \quad \begin{bmatrix} 0,7\text{S} & -0,4\text{S} \\ -0,4\text{S} & 1,4\text{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\text{A} \\ 6\text{A} \end{bmatrix}$$

zu lösen. Dies liefert

$$\underline{U} = [20\text{V}; 10\text{V}]^T.$$

(v) Die Zweigspannungen folgen aus

$$\underline{U} = \underline{A}^T \underline{U}_K, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20\text{V} \\ 10\text{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix} \text{ V},$$

und die Zweigströme aus

$$\underline{I} = \underline{Y}(\underline{U} - \underline{U}_q) + \underline{I}_q = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -30 \\ 20 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix} \text{ A} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6\text{A} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ A}.$$

(vi) Der Satz von Tellegen,

$$\underline{U}^T \underline{I} = (-120 + 40 + 40 + 40) \text{ VA} = 0,$$

ist mit den berechneten Zweigspannungen und Zweigströmen erfüllt.

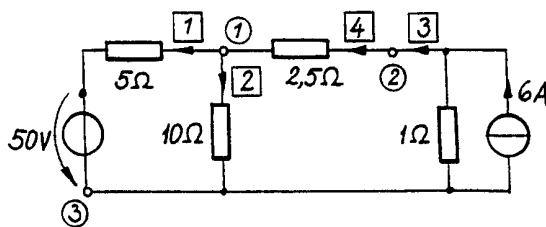


Abb. AA.5b

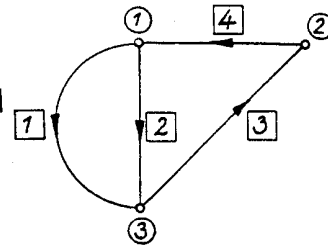


Abb. AA.5c

AA.6 Maschenverfahren:

Für das Maschenverfahren brauchen wir die Matrizen ($z = 5, k = 4, s = 3, m = 2$)

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{Z} = \text{diag}[-j2; 4; j; -j5; 3]\Omega,$$

$$\underline{U}_q = [0; 0; 0; 0; 10]^T \text{V}, \quad \underline{I}_q = [j5; 2; 0; 0; 0]^T \text{A.}$$

Daraus folgt die Maschenimpedanzmatrix

$$\underline{Z}_V = \underline{M} \underline{Z} \underline{M}^T = \begin{bmatrix} 3-j6 & ; & 3-j5 \\ 3-j5 & ; & 7-j5 \end{bmatrix} \Omega$$

und die Maschenquellenmatrix

$$\underline{U}_{qV} = \underline{M}(\underline{Z} \underline{I}_q - \underline{U}_q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{V.}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems $\underline{Z}_V \underline{I}_V = \underline{U}_{qV}$ führt auf

$$\underline{I}_V = \begin{bmatrix} 0,401 + j 0,118 \\ -0,470 - j 0,100 \end{bmatrix} \text{A,}$$

und damit erhalten wir die Zweiggrößen

$$\underline{I} = \underline{M}^T \underline{I}_V = \begin{bmatrix} 0,401 + j 0,118 \\ 0,470 - j 0,100 \\ -0,401 - j 0,118 \\ -0,069 + j 0,018 \\ -0,069 + j 0,018 \end{bmatrix} \text{A,}$$

$$\underline{U} = \underline{Z}(\underline{I} - \underline{I}_q) + \underline{U}_q = \begin{bmatrix} -9,764 - j 0,802 \\ -9,882 - j 0,401 \\ 0,118 - j 0,401 \\ 0,090 + j 0,347 \\ 9,792 + j 0,054 \end{bmatrix} \text{V.}$$

AA.7 Schnittverfahren:

Das Schnittverfahren geht von den Matrizen

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{Y} = \text{diag} [j/2; 1/4; -j; j/5; 1/3] \text{S,}$$

$$\underline{U}_q = [0; 0; 0; 0; 10]^T \text{V}, \quad \underline{I}_q = [j5; 2; 0; 0; 0]^T \text{A}$$

aus. Es sind die Schnittmatrix

$$\underline{Y}_B = \underline{S} \underline{Y} \underline{S}^T = \begin{bmatrix} -j 0,5 & ; & -j 0,5 & ; & -j 0,5 \\ -j 0,5 & ; & 0,25+j 0,7 & ; & 0,25+j 0,5 \\ -j 0,5 & ; & 0,25+j 0,5 & ; & 0,58\bar{3}+j 0,5 \end{bmatrix} \text{S}$$

und die Schnittquellenmatrix

$$\underline{I}_{qB} = \underline{S}(\underline{Y} \underline{U}_q - \underline{I}_q) = \begin{bmatrix} - & j 5 \\ 2 & + j 5 \\ 5,3 & + j 5 \end{bmatrix} \text{A}$$

zu berechnen, und es ist das lineare Gleichungssystem $\underline{Y}_B \underline{U}_B = \underline{I}_{qB}$ zu lösen.

Dies liefert $\underline{U}_B = \begin{bmatrix} 0,118 & - & j 0,401 \\ 0,090 & + & j 0,347 \\ 9,792 & + & j 0,054 \end{bmatrix}$ und damit

$$\underline{U} = \underline{S}^T \underline{U}_B = \begin{bmatrix} -9,764 & - & j 0,802 \\ -9,882 & - & j 0,401 \\ 0,118 & - & j 0,401 \\ 0,090 & + & j 0,347 \\ 9,792 & + & j 0,054 \end{bmatrix} \text{ V,}$$

$$\underline{I} = \underline{Y}(\underline{U} - \underline{U}_q) + \underline{I}_q = \begin{bmatrix} 0,401 & + & j 0,118 \\ -0,470 & - & j 0,100 \\ -0,401 & - & j 0,118 \\ -0,069 & + & j 0,018 \\ -0,069 & + & j 0,018 \end{bmatrix} \text{ A.}$$

AS.1 Überlagerungssatz:

Die Schaltung ist linear, der Überlagerungssatz somit anwendbar.

1) $\underline{U}_{q2} = 0$: Rechnung mit komplexen Effektivwerten,

$$\underline{I}_{1,\omega} = \frac{\underline{U}_{q1}}{R_1}, \quad \frac{\underline{I}_{3,\omega}}{\beta \underline{I}_{1,\omega}} = \frac{R_2}{R} \quad \text{mit } R = R_2 + R_3 + R_4 = 267,5 \Omega,$$

also

$$\underline{I}_{3,\omega} = \frac{R_2}{R} \cdot \frac{\beta}{R_1} \underline{U}_{q1} = 37,01 \text{ mA, Kreisfrequenz } \omega.$$

2) $\underline{U}_{q1} = 0$:

$$\underline{I}_{1,0} = 0, \quad \underline{I}_{3,0} = -\underline{U}_{q2}/R = -37,38 \text{ mA, Gleichstrom.}$$

Die Überlagerung der beiden Zustände liefert

$$i_3(t) = \text{Re}(\underline{I}_{3,\omega} \sqrt{2} e^{j\omega t}) + \underline{I}_{3,0} = [52,3 \cos(\omega t) - 37,4] \text{ mA.}$$

Der Widerstand R_3 muss dabei die Wirkleistung

$$P_3 = R_3(|\underline{I}_{3,\omega}|^2 + |\underline{I}_{3,0}|^2) = 130 \text{ mW}$$

aufnehmen. ■